PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1108 2006
Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce

Krzysztof Dębicki
Uniwersytet Wrocławski

APROKSYMACJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA RUINY DLA GAUSSOWSKIEGO PROCESU RYZYKA*

1. Wstęp

Rodzina gaussowskich procesów stochastycznych odgrywa ważną rolę w stochastycznym modelowaniu. Jest ona szeroko stosowana jako bogate źródło modeli w wielu obszarach matematyki, w tym w matematyce aktuarialnej oraz finansowej.

Istnieje wiele praktycznych oraz teoretycznych powodów, aby używać procesów gaussowskich w modelowaniu problemów aktuarialnych. Za ich stosowaniem szczególnie przemawia to, że:

- rodzina procesów gaussowskich pokrywa pełny zakres możliwych funkcji kowariancji (każdej nieujemnie określonej funkcji $R(s,t)$ odpowiada pewien proces gaussowski $X(t)$ o funkcji kowariancji $Cov(X(s), X(t)) = R(s,t)$;
- bogactwo matematycznych technik gaussowskich pozwala na dokładną analizę modeli, dla których nie wystarczają klasyczne narzędzia używane w teorii odnowy;
- teoretyczne wyniki oparte na centralnych twierdzeniach granicznych dla procesów stochastycznych formalnie legitymują poprawność gaussowskich aproksymacji (np. [14; 15; 17]).

W artykule tym dokonamy przeglądu aktualnych wyników związanych z problemem aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny firmy ubezpieczeniowej, przy założeniu, że proces nadwyżki żądań modelowany jest przez gaussowski proces stochastyczny o stacjonarnych przyrostach. W punkcie 2 wprowadzimy oznaczenia oraz podstawowe wielkości. W punktach 3 i 4 podane zostaną oszacowania i asymptotyki prawdopodobieństw ruiny dla odpowiednio skończonego i nieskoń-

* Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 1 P03A 03128 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2005-2007.

czonego horyzontu czasu. Punkt 5 poświęcony jest analizie własności stałych Pickandsa, które odgrywają istotną rolę w dokładnych asymptotykach uzyskanych w części 4.

2. Notacja i definicje

W punkcie tym wprowadzimy podstawowe pojęcia i klasy procesów stochastycznych pełniących istotną funkcję w analizie gaussowskiej aproksymacji procesu ryzyka. Rozpoczniemy od definicji procesu gaussowskiego.

Definicja 1

Proces stochastyczny $\{X(t): t \in T\}$ nazywamy gaussowskim, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}$ oraz $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ zmienna losowa $\sum_{k=1}^{n} a_i X(t_i)$ ma rozkład gaussowski.

Jedną z istotnych własności procesów gaussowskich jest to, iż funkcja wartości oczekiwanej $EX(t)$ wraz z funkcją kowariancji $R(s,t) = Cov(X(s), X(t))$ całkowicie determinują własności procesu.

W dalszej części niniejszej pracy przez $X(t)$ rozumieć będziemy scentrowany $(EX(t) \equiv 0)$ gaussowski proces stochastyczny o stacjonarnych przyrostach i funkcji wariancji $\sigma^2(t) = Var(X(t))$. Zauważmy, że korzystając z założenia stacjonarności przyrostów

$$R(s,t) = \frac{\sigma^2(s) + \sigma^2(t) - \sigma^2(|t-s|)}{2},$$

co oznacza, że aby scharakteryzować konkretny scentrowany proces gaussowski o stacjonarnych przyrostach, wystarczy podać funkcję wariancji.

W pracy tej przez $\mathcal{N}$ rozumieć będziemy zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Ponadto niech $\Psi(x) := P(\mathcal{N} > x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz symbol $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość według rozkładu.

3. Gaussowska aproksymacja procesu ryzyka

Jednym z podstawowych obiektów badań teorii ryzyka jest klasyczny proces ryzyka

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k,$$

gdzie $u > 0$ jest kapitałem początkowym, $c > 0$ jest intensywnością wpłacanych składek, $\{X_k : k = 1, 2, ...\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych (zazwyczaj nieujemnych) opisujących wysokości kolejnych odszkodowań, a $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$ modelującym chwile, w których następują żądania.

Idea aproksymacji procesu ryzyka (odpowiednio przeskalowanego) przez ruch Browna została sprecyzowana matematycznie w pracy Igleharta [14]. Polega ona na wykazaniu, że proces ryzyka $U_n(t)$ zdefiniowany następująco

$$U_n(t) = u + c_n t - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{N(nt)} X_k,$$

gdzie: X_k mają wartość oczekiwaną μ oraz skończoną wariancję σ^2, $c_n = c + \lambda\mu\sqrt{n}$, może być dla dużych n aproksymowany przez proces $u + ct - \sqrt{\lambda}\sigma B(t)$, gdzie $B(t)$ jest standardowym ruchem Browna. Formalnie wynik ten opisać można w następujący sposób.

Twierdzenie 1

Ciąg procesów ryzyka $U_n(t)$ słabo zbiega w $D[0,\infty)$ z topologią Skorochoda do procesu $u + ct - \sqrt{\lambda}\sigma B(t)$.

Dowód tego twierdzenia znaleźć można w pracy [14].

Podejście to, zwane aproksymacją dyfuzyjną, otworzyło drogę do analizy bardziej ogólnych klas procesów ryzyka, dla których użycie klasycznych narzędzi teorii odnowy było niewystarczające. Szczegółowa analiza zastosowania aproksymacji dyfuzyjnej w modelowaniu procesu ryzyka przeprowadzona została m.in. w pracach [10; 11, dodatek A.4].

Z punktu widzenia współczesnych oczekiwań dotyczących założeń nakładanych na rozkład wysokości żądań oraz proces $N(t)$ nie zawsze można stosować aproksymację dyfuzyjną. Szczególnie nie można jej stosować, gdy:

- $Var(X_k) = \infty$ (np. gdy rozkład X_k jest ciężkoogonowy);
- $N(t)$ nie jest jednorodnym w czasie procesem Poissona.

Ograniczenia te były bezpośrednią motywacją poszukiwań rozszerzeń idei Igleharta, w kontekście których naturalnym uogólnieniem jest analiza procesu ryzyka

$$U(t) = u + ct - X(t), \tag{1}$$

gdzie $\{X(t) : t \geq 0\}$ jest scentrowanym ($EX(t) \equiv 0$) procesem gaussowskim o stacjonarnych przyrostach i funkcji wariancji $\sigma^2(t)$ [4; 6; 13; 15; 17].

Wspólną własnością rodzin procesów gaussowskich rozpatrywanych w literaturze dotyczącej gaussowskich aproksymacji procesu ryzyka są następujące warunki regularności funkcji wariancji procesu gaussowskiego:

C1 $\sigma^2(t) \in C^1[0,\infty)$ jest ściśle rosnąca i wypukła;

C2 $\sigma^2(t)$ jest regularnie zmieniająca się w 0 z indeksem $\alpha_0 \in (0,2]$ oraz regularnie zmieniająca się w ∞ z indeksem $\alpha_\infty \in (0,2)$.

Założenie wypukłości funkcji wariancji nie zmniejsza (z aplikacyjnego punktu widzenia) ogólności rozpatrywanych procesów. Ściśle związane jest ono bowiem z dodatnim skorelowaniem przyrostów procesu $X(t)$, które z punktu widzenia zastosowań wydaje się naturalnym założeniem.

W gaussowskiej teorii ruiny istotną rolę odgrywają następujące klasy procesów stochastycznych:

1. **FBM** – $X(t) = B_H(t)$, gdzie $B_H(t)$ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $H \in (0,1]$, czyli scentrowanym procesem gaussowskim o stacjonarnych przyrostach, $B_H(0) = 0$ z P.1 oraz $\sigma^2(t) = t^{2H}$. W kontekście aktualnych zainteresowań teorii ryzyka szczególnie ważna jest klasa ułamkowych ruchów Browna z parametrem Hursta $H > 1/2$, gdyż mają one tzw. własność zależności dalekiego zasięgu (*long range dependence*) oraz dodatnio skorelowane przyrosty. Klasa ta w naturalny sposób uogólnia pojęcie ruchu Browna, gdyż dla $H = 1/2$ proces $B_{1/2}(t) = B(t)$ jest standardowym ruchem Browna. Teoretyczna motywacja aproksymacji procesu ryzyka przez ułamkowe ruchy Browna wyprowadzona została w pracy [17]; zob. także [15].

2. **IG** (*Integrated Gaussian*) – $X(t) = \int_0^t Z(s)ds$, gdzie $\{Z(t) : t \geq 0\}$ jest scentrowanym stacjonarnym procesem gaussowskim o ciągłej funkcji kowariancji $R(t) = Cov(Z(s), Z(s+t))$, takiej że $R(t) > 0$ dla każdego $t \geq 0$. Proces $Z(t)$ ma naturalną interpretację jako proces intensywności żądań. W rodzinie tej wyróżnia się dwie podklasy:

- **SRD IG** – procesy o zależnościach krótkiego zasięgu (*short range dependence*), gdzie o funkcji kowariancji dodatkowo zakłada się, że $\int_0^\infty R(s)ds < \infty$ oraz $\int_0^\infty s^2 R(s)ds < \infty$. Procesy te analizowane były m.in. w pracach [6; 7].
- **LRD IG** – procesy o zależnościach dalekiego zasięgu, gdzie zakłada się, że $R(t) \approx At^{-\alpha}$ dla $t \to \infty$ oraz $\alpha \in (0,1)$, $A > 0$. Zauważmy, że warunek ten im-

plikuje $\int_0^\infty R(s)ds = \infty$. W kontekście funkcji ruiny procesy te analizowane były w pracach [8; 13].

4. Prawdopodobieństwo ruiny

Ważną charakterystyką związaną z procesem ryzyka jest prawdopodobieństwo ruiny. W punkcie tym zaprezentujemy nierówności i oszacowania prawdopodobieństwa ruiny w skończonym i nieskończonym horyzoncie czasu dla procesu ryzyka danego wzorem (1).

Dla zdefiniowanego w (1) procesu ryzyka $U(t)$ określmy prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u,T)$ w skończonym horyzoncie czasu T:

$$\psi(u,T) := P\left(\inf_{t\in[0,T]} U(t) < 0\right) \tag{2}$$

oraz prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u)$ w nieskończonym horyzoncie czasu:

$$\psi(u) := \psi(u,\infty) = P\left(\inf_{t\in[0,\infty)} U(t) < 0\right). \tag{3}$$

Gdy $X(t) = B(t)$ jest standardowym ruchem Browna, znana jest dokładna postać rozkładów $\psi(u,T)$ oraz $\psi(u)$; zob. np. [10].

Twierdzenie 2

Załóżmy, że $X(t) = B(t)$ jest standardowym ruchem Browna. Wówczas

1) $\psi(u,T) = \Psi\left(\frac{cT+u}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2cu)\left(1-\Psi\left(\frac{cT-u}{\sqrt{T}}\right)\right)$;

2) $\psi(u) = \exp(-2cu)$

dla każdego $u > 0$ oraz $c, T > 0$.

W podpunktach 4.1-4.2 dokonamy przeglądu aktualnego stanu wiedzy dotyczącego prawdopodobieństw ruiny dla procesu ryzyka modelowanego przez proces gaussowski spełniający **C1-C2**. Przedstawione wyniki podzielić można na:

1. Asymptotyki logarytmiczne, polegające na znalezieniu funkcji $m(u,T)$, że

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\log(\psi(u,T))}{m(u,T)} = -\text{const}.$$

2. Dokładne asymptotyki, polegające na znalezieniu reprezentacji $\psi(u,T) = A(u,T)\Psi(m(u,T))(1+o(1))$, gdy $u \to \infty$.

3. Dolne oszacowania polegające na znalezieniu funkcji $A(u,T)$ oraz $m(u,T)$, takich że $\psi(u,T) \geq A(u,T)\Psi(m(u,T))$ dla każdego $u > 0$.

4.1. Skończony horyzont czasu

Zdefiniowane w (2) prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u,T)$ w skończonym horyzoncie czasu wygodnie jest przekształcić do następującej postaci

$$\begin{aligned}\psi(u,T) &= P\left(\inf_{t\in[0,T]} U(t) < 0\right) = P\left(\inf_{t\in[0,T]} u + ct - X(t) < 0\right) = \\ &= P\left(\sup_{t\in[0,T]} X(t) - ct > u\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Analizę rozpoczniemy od znalezienia dolnego oszacowania dla $\psi(u,T)$. Korzystając z (4), dla każdego $u > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\psi(u,T) &> \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{P}(X(t) - ct > u) = \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{P}(X(t) > u + ct) = \\ &= \Psi\left(\min_{t\in[0,T]} \frac{u+ct}{\sqrt{Var(X(t))}}\right).\end{aligned}$$

Okazuje się, że oszacowanie to w wielu przypadkach prowadzi do dokładnej asymptotyki $\psi(u,T)$ dla $u \to \infty$; [7]. Następujący wynik wyprowadzony został w pracy [7], gdy $X(t) \in$ **FBM** dla $H > 1/2$ lub $X(t) \in$ **IG.**

Twierdzenie 3

1) Jeśli $X(t) \in FBM$ dla $H > 1/2$, to

$$\begin{aligned}\psi(u,T) &= \Psi\left(\frac{u+cT}{T^H}\right)(1+o(1)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{T^H}{u}\exp\left(-\frac{u^2}{2T^{2H}}\right)(1+o(1)),\end{aligned}$$

gdy $u \to \infty$.

2) Jeśli $X(t) \in$ **SRD IG** lub $X(t) \in$ **LRD IG**, to

$$\psi(u,T) = \Psi\left(\frac{u+cT}{\sqrt{2\int_0^T\int_0^s R(v)dvds}}\right)(1+o(1)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\int_0^T\int_0^s R(v)dvds}}{u}\exp\left(-\frac{u^2}{4\int_0^T\int_0^s R(v)dvds}\right)(1+o(1)),$$

ły $u \to \infty$.

Zauważmy, że typ zależności (dalekiego lub krótkiego zasięgu) nie ma wpływu ı jakościową formę uzyskanej asymptotyki, która zawsze przybiera postać

$$\psi(u,T) = \frac{\operatorname{const}(T)}{u}\exp\left(-\frac{u^2}{2\operatorname{Var}(X(T))}\right)(1+o(1)).$$

Jak przekonamy się w podpunkcie 4.2, sytuacja diametralnie zmienia się, gdy ›zpatrujemy ruinę w nieskończonym horyzoncie czasu.

4.2. Nieskończony horyzont czasu

W części tej skoncentrujemy się na oszacowaniach i asymptotykach prawdo-odobieństwa ruiny $\psi(u)$ w nieskończonym horyzoncie czasu. Zauważmy, że

$$\psi(u) = \mathrm{P}\left(\inf_{t\in[0,\infty)} U(t) < 0\right) = \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,\infty)} X(t) - ct > u\right). \qquad (5)$$

Następująca funkcja odgrywa kluczową rolę w dalszej analizie:

$$m(u) = \min_{t\ge 0}\frac{u+ct}{\sqrt{\operatorname{Var}X(t)}}.$$

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do przedstawionego w podpunkcie 3.1, trzymujemy następujące dolne oszacowanie

$$\psi(u) \ge \Psi(m(u)).$$

Oszacowanie to prowadzi do poprawnej asymptotyki logarytmicznej dla rodziny procesów gaussowskich spełniających **C1-C2**. W szczególności zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4
Jeśli $X(t)$ spełnia założenia **C1-C2**, to

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\log(\psi(u))}{m^2(u)}=-\frac{1}{2}.$$

Dowód
Jeśli skorzystamy z reprezentacji (3), to problem sprowadza się do wyznaczenia logarytmicznej asymptotyki rozkładu supremum z procesu gaussowskiego w nieskończonym horyzoncie czasu. Bezpośrednie zastosowanie kombinacji twierdzenia 3.1 z lematem 4.1 z pracy [3] kończy dowód. □

Aplikacja przedstawionego wyniku do wprowadzonych w punkcie 3 klas procesów gaussowskich prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 1
1. Jeśli $X(t)\in$ **FBM** dla $H>1/2$, to

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\log(\psi(u))}{u^{2-2H}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2-2H}$$

2. Jeśli $X(t)\in$ **SRD IG**, to

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\log(\psi(u))}{u}=-\frac{c}{\int_0^\infty R(v)dv}.$$

3. Jeśli $X(t)\in$ **LRD IG** z funkcją kowariancji o postaci $R(t)\approx H(2H-1)t^{2H-2}$ dla $H>1/2$, to

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\log(\psi(u))}{u^{2-2H}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{H}\right)^{2H}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{2-2H}$$

Dowód wniosku 1 polega na znalezieniu postaci funkcji $m(u)$. Szczegóły wyliczeń znaleźć można w pracach [3; 9].

Postać funkcji kowariancji dla przypadku **LRD IG** została dobrana w taki sposób, by wariancja $X(t)$ wynosiła asymptotycznie t^{2H}, czyli tyle, co dla przypadku **FBM**. Zauważmy, że asymptotyczna równość wariancji implikuje identyczność logarytmicznych asymptotyk. Wynika to z definicji funkcji $m(u)$, gdzie struktura procesu $X(t)$ reprezentowana jest przez funkcję wariancji.

Uzyskanie dokładnej asymptotyki prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu dla aproksymacji gaussowskiej jest dużo trudniejszym zadaniem niż w sytuacji skończonego horyzontu czasu. Podstawową trudnością jest brak odpowiednich narzędzi do analizy rozkładów supremum z niescentrowanego procesu gaussowskiego na zbiorze $[0,\infty)$. Dotychczasowe klasyczne wyniki koncentrowały się bowiem na szukaniu asymptotyk rozkładów supremum ze scentrowanego procesu gaussowskiego na skończonym odcinku. Zagadnienia związane z analizą rozkładu (5) były bezpośrednią stymulacją wypracowania narzędzi pozwalających na analizę niescentrowanych procesów gaussowskich. Skutkowało to znalezieniem dokładnych asymptotyk zarówno dla klas **FBM** [12], **SRD IG** [6], jak i dla **LRD IG** [13]. Idee dowodów dla poszczególnych przypadków, mimo oparcia na wspólnej technice podwójnej sumy, nie dają się bezpośrednio uogólnić, by uzyskać jednolity dowód w odniesieniu do całej klasy procesów gaussowskich spełniających **C1-C2.** Wspólną cechą uzyskanych wyników jest postać asymptotyki $\psi(u)$, którą zawrzeć można w następującej formule

$$\psi(u) = \mathcal{H}_X \operatorname{const} \cdot u^{\beta} \Psi\big(m(u)\big)\big((1+o(1)\big),$$

gdy $u \to \infty$, gdzie const jest znaną stałą dodatnią, β jest stałą dodatnią zależną od lokalnej struktury funkcji kowariancji procesu $X(t)$ i związaną bezpośrednio z wartością parametru α_0 występującego w **C2** oraz H_X jest tzw. stałą Pickandsa, zdefiniowaną następująco

$$\mathcal{H}_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E \exp\left(\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{2}X(t) - \operatorname{Var} X(t) \right). \tag{6}$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5

1. Jeśli $X(t) \in$ **FBM** dla $H > 1/2$, to

$$\psi(u) = \mathcal{H}_{B_H} \sqrt{\frac{\pi}{(1-H)H}}\, 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2H}} \left(\frac{1}{1-H}\right)^{\frac{(1-H)^2}{H}} \left(\frac{1}{H}\right)^{1-H} c^{1-H} u^{\frac{(1-H)^2}{H}} \times$$
$$\times \Psi\left(\left(\frac{c}{H}\right)^{H} \left(\frac{1}{1-H}\right)^{1-H} u^{1-H} \right)\big(1+o(1)\big),$$

gdy $u \to \infty$.

2. Jeśli $X(t) \in$ **SRD IG**, to

$$\psi(u) = \mathcal{H}_{\frac{cG}{\sqrt{2}}X} \frac{1}{Gc^2} e^{-c^2G^2B} e^{-Gcu}\left(1+o(1)\right),$$

gdy $u \to \infty$, gdzie $G = \frac{1}{\int_0^\infty R(t)dt}$ oraz $B = \int_0^\infty tR(t)dt$.

3. Jeśli $X(t) \in$ **LRD IG**, dla $R(t) \approx H(2H-1)t^{2H-2}$ dla $H > 1/2$, to

$$\psi(u) = \mathcal{H}_{B_H}\sqrt{\frac{\pi}{(1-H)H}}\, 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2H}}\left(\frac{1}{1-H}\right)^{\frac{(1-H)^2}{H}}\left(\frac{1}{H}\right)^{1-H}\left(H(2H-1)\right)^{H-\frac{3}{2H}} c^{1-H} u^{\frac{(1-H)^2}{H}} \times$$
$$\times \Psi\left(\left(\frac{c}{H}\right)^H\left(\frac{1}{1-H}\right)^{1-H} u^{1-H}\right)(1+o(1)).$$

Dowód

Ad 1. Jeśli skorzysta się z własności samopodobieństwa ułamkowego ruchu Browna, to otrzymuje się: $\{B_H(at)\} \overset{d}{=} \{a^H B(t)\}$. Zatem

$$\psi(u) = P\left(\sup_{t\in[0,\infty)} B_H(t) - ct > u\right) = P\left(\sup_{t\in[0,\infty)} B_H\left(c^{\frac{1}{H}-1}t\right) - c \cdot c^{\frac{1}{H}-1}t > u\right) =$$
$$= P\left(\sup_{t\in[0,\infty)} c^{\frac{H}{H}-1}B_H(t) - c^{\frac{H}{H}-1}t > u\right) =$$
$$= P\left(\sup_{t\in[0,\infty)} B_H(t) - t > c^{-\frac{H}{H}-1}u\right).$$

Po skorzystaniu z wniosku 1 w [8] uzyskujemy asymptotykę zgodną z tezą.

Ad 2. Wynika z twierdzenia 5.1 w [6].

Ad 3. Wynika z twierdzenia 1 w [12], (zob. także wniosek 3 w [8]) zaaplikowanego do przypadku, gdy $R(t) \approx H(2H-1)t^{2H-2}$ dla $H > 1/2$.□

5. Stałe Pickandsa

Stałe Pickandsa $\mathcal{H}_X$, dane wzorem (6), stanowią nieodłączny składnik dokładnych asymptotyk rozkładów supremum z procesów gaussowskich. W przypadku $X(t)$ będącego ułamkowym ruchem Browna, pojawiły się one po raz pierwszy w pracy J. Pickandsa III [18] dotyczącej asymptotyki supremum dla scentrowanego stacjonarnego procesu gaussowskiego. Rozszerzenie pojęcia stałych Pickandsa na szerszą klasę procesów $X(t)$ o stacjonarnych przyrostach znaleźć można w pracy [6].

Mimo intensywnych badań, których celem było znalezienie dokładnej wartości $\mathcal{H}_X$ [2; 19], brak jest do tej pory zadowalających wyników. Szczególnie gdy $X(t) = B_H(t)$, wiadomo jedynie, że

- $\mathcal{H}_{B_{1/2}} = 1$;
- $\mathcal{H}_{B_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Uzyskanie tych wartości było możliwe dzięki znajomości rozkładu $\sup_{t\in[0,T]} \left(\sqrt{2}B_H(t) - \operatorname{Var} B_H(t)\right)$ dla $H = 1/2$ oraz $H = 1$. W środowisku matematyków specjalizujących się w gaussowskiej teorii wartości ekstremalnych znana jest hipoteza

$$\Upsilon(H) = \mathcal{H}_{B_H} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2H}\right)}.$$

Za prawdziwością hipotezy tej przemawiają zarówno sprawdzenie wartości dla $H = 1/2, 1$, jak i porównanie asymptotyki $\Upsilon(H)$ dla $H \to 0$, wyliczonej w pracy [19], z asymptotyką hipotetycznej wartości $\Upsilon(H)$.

Do niedawna funkcjonowała także alternatywna hipoteza oparta na symulacjach komputerowych stałych Pickandsa wykonanych w pracy [16]. Głosiła ona, że funkcja $\Upsilon(H)$ jest nieciągła w punkcie $H = 1/2$.

Następujące twierdzenie, udowodnione w pracy [5], wyklucza nieciągłość funkcji $\Upsilon(H)$.

Twierdzenie 6
Funkcja $\Upsilon(H)$ jest ciągła na (0, 1].

6. Podsumowanie

W pracy tej zaprezentowany został przegląd aktualnych wyników związanych z aproksymacją prawdopodobieństwa ruiny w przypadku, gdy proces ryzyka jest modelowany procesem gaussowskim.

Mimo znacznego postępu wiedzy w tej dziedzinie, wciąż wiele ważnych zagadnień stanowi otwarte problemy. Istotne są szczególnie zagadnienia związane z dokładnością aproksymacji gaussowskich w konkretnych zagadnieniach aplikacyjnych. Dyskusję nad zastosowaniami aproksymacji gaussowskich w teorii ryzyka przedstawiono w pracach [11; 15; 17].

Teoretyczne własności procesów gaussowskich oraz rozkładów supremum znaleźć można m.in. w monografii Adlera [1]. Praca [4] poświęcona jest przeglądowi metod i technik użytecznych w gaussowskiej teorii ruiny.

Literatura

[1] Adler R.J., *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*, Inst. Math. Statist. Lecture Notes – Monograph Series, vol. 12, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1990.

[2] Aldous D., *Probability Approximations Via the Poisson Clumping Heuristic*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg 1989.

[3] Dębicki K., *A Note on LDP for Supremum of Gaussian Processes Over Infinite Horizon*, „Statistics and Probability Letters" 1999, 44, 211-219.

[4] Dębicki K., *Gaussian Processes*, [w:] *Encyclopedia of Actuarial Science*, vol. 2, Wiley, 2004, 752-757.

[5] Dębicki K., *Properties of Generalized Pickands Constants*, zaakceptowane do publikacji w Prob. Th. Appl.

[6] Dębicki K., *Ruin Probability for Gaussian Integrated Processes*, Stochastic Process. Appl. 2002, 98, 151-174.

[7] Dębicki K., Rolski T., *A Note on Transient Gaussian Fluid Models*, Queueing Syst. Theory Appl. 2002, 41, nr 4, 321-342.

[8] Dieker T., *Extremes of Gaussian Processes Over an Infinite Horizon*, Stochastic Process. App. 2005, 115, 207-248.

[9] Duffield N., O'Connell N., *Large Deviations and Overflow Probabilities for General Single--Server Queue, with Applications*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1995, 118, 363-374.

[10] Embrechts P., Frey R., Furrer H., *Stochastic Processes in Insurance and Finance*, „Handbook of Statistics" 2001, vol. 19, *Stochastic Processes: Theory and Methods*, Elsevier Science, Amsterdam 2001, 365-412.

[11] Grandell J., *Aspects of Risk Theory*, Springer, Berlin 1991.

[12] Hüsler J., Piterbarg V., *Extremes of a Certain Class of Gaussian Processes*, Stochastic Process. Appl. 1999, 83, 257-271.

[13] Hüsler J., Piterbarg V., *On the Ruin Probability for Physical Fractional Brownian Motion*, Stochastic Process. Appl. 1999, 113, 315-332.

[14] Iglehart D., *Diffusion Approximation in Collective Risk Theory*, „Journal of Appl. Prob." 1969, 6, 285-292.

[15] Michna Z., *Modele graniczne w teorii ryzyka ubezpieczeniowego*, AE, Wrocław 2002.

[16] Michna Z., *On Tail Probabilities and First Passage Times for Fractional Brownian Motion*, „Mathematical Methods of Operations Research"1999, 49, 335-354.

[17] Michna Z., *Self-Similar Processes in Collective Risk Theory*. „J. Appl. Math. Stochastic Anal." 1998, 11, nr 4, 429-448.

[18] Pickands J. III, *Asymptotic Properties of the Maximum in a Stationary Gaussian Process*, Trans. Amer. Math. Soc. 1969, 145, 75-86.

[19] Shao Q., *Bounds and Estimators of a Basic Constant in Extreme Value Theory of Gaussian Processes*, „Statictica Sinica" 1996, 6, 245-257.

APPROXIMATIONS OF THE RUIN PROBABILITY FOR A GAUSSIAN RISK PROCESS

Summary

The family of Gaussian stochastic processes is widely used as a reach source of models in applied probability, including actuarial and financial mathematics. The paper reviews some recent results dealing with the approximation of the ruin probability under the condition that the risk process is modeled by a Gaussian stochastic process with stationary increments. General results are illustrated by two special classes of examples: fractional Brownian motions and integrated Gaussian processes.