

ce Naukowe Instytutu Sterowania i Techniki Systemów
itechniki Wrocławskiej
ia: Monografie

4

2

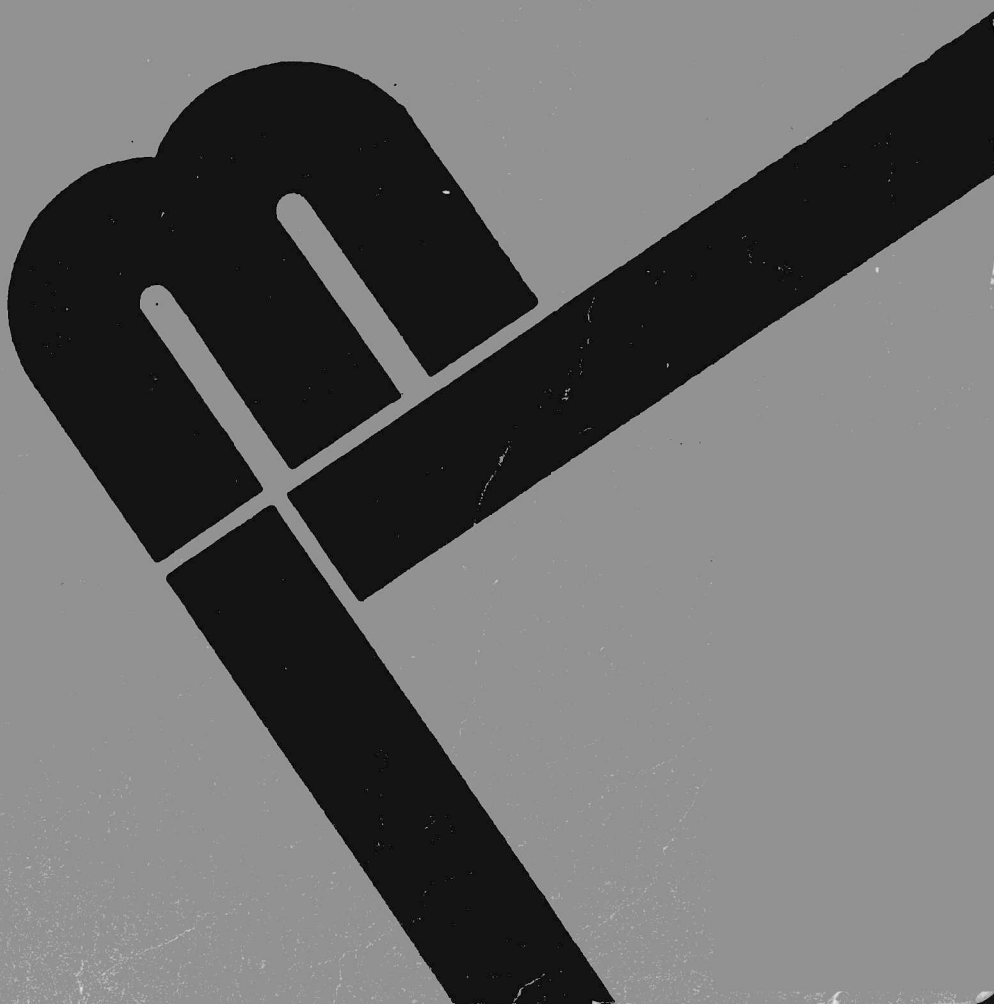
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
MAGAZYN
KOWALE

rzy Świętek

entyfikacja dwustopniowa oraz jej zastosowania
chniczne i biomedyczne

Wrocław 1987

A 5133 I



PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Control
and Systems Engineering

No 4 of the Wrocław Technical University

No 4

Monographs

No 2

1987

Jerzy ŚWIĄTEK

Two-stage identification and its technical and biomedical
applications

Prace Naukowe Instytutu Sterowania i Techniki Systemów
Politechniki Wrocławskiej

4

Seria:
Monografie

2



Jerzy Świątek

**Identyfikacja dwustopniowa
oraz jej zastosowania
techniczne i biomedyczne**



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1987.

Recenzenci

Andrzej WERYŃSKI
Roman ŚWINIARSKI

Redaktor naczelny

Jerzy CIEKOT

Redaktor naukowy

Adam GRZECH

Opracowanie redakcyjne

Maria KOPEĆ

Korekta

Maria GALIK

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1987

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0209 – 2573

Nakład 160 + 65 egz. Ark. wyd. 11,25. Ark. druk. 10³/8. Papier offset. kl. III, 70 g. B1.
Oddano do druku w lutym 1987 r. Druk ukończono w marcu 1987 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr. 4027/87. – Cena zł 180,–

*identyfikacja,
systemy złożone,
biocybernetyka*

Jerzy ŚWIĄTEK *

IDENTYFIKACJA DWUSTOPNIOWA ORAZ JEJ ZASTOSOWANIA TECHNICZNE I BIOMEDYCZNE

Przedstawiono usystematyzowany przegląd problematyki identyfikacji dwustopniowej. Sformułowano zadanie estymacji dwustopniowej i dwustopniowego wyboru najlepszego modelu. Opracowano ogólne procedury uzyskiwania algorytmów dwustopniowej i bezpośredniej estymacji z zastosowaniem metody maksymalnej wiarygodności i metody minimalnego ryzyka. Przedstawiono konkretne algorytmy estymacji dla typowych przypadków. Opisano ogólną procedurę wyznaczania optymalnych parametrów dla zadania dwustopniowego i bezpośredniego wyboru najlepszego modelu przy pełnej informacji probabilistycznej, jako podstawę uzyskiwania odpowiednich algorytmów w sytuacji empirycznej. Podano konkretne algorytmy dla przypadku liniowo-kwadratowego. Przedyskutowano problem porównania identyfikacji bezpośredniej i dwustopniowej, a konkretnie sprecyzowano pewne wystarczające warunki równoważności obu podejść. Dotyczą one zarówno zadania estymacji dwustopniowej, jak i dwustopniowego wyboru najlepszego modelu. Przedstawiono wybrane przypadki identyfikacji dwustopniowej systemu dynamicznego. Rozważania ogólne uzupełniają uwagi dotyczące możliwości rozszerzenia na zadania identyfikacji wielostopniowej, zastosowań na potrzeby systemów sterowania oraz realizacji komputerowej algorytmów identyfikacji w odpowiednim systemie informatycznym. Przedstawiono wyniki zastosowań identyfikacji dwustopniowej w wybranych przypadkach technicznych i biomedycznych. Przykłady te wskazują na celowość i możliwość takich zastosowań, a także na liczne występujące tu problemy metodologiczne.

* Instytut Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

- $y, \bar{y}$ - odpowiednio wektor wyjściowy obiektu i modelu na 1. stopniu
 x_1 - wektor wejściowy na 1. stopniu
 x_2 - wektor wejściowy na 2. stopniu
 a_1 - parametr na 1. stopniu
 a_2 - parametr na 2. stopniu
 F_1, F_2 - opisy obiektów odpowiednio na 1. i 2. stopniu
 F - superpozycja funkcji F_1 i F_2 (opis dla podejścia bezpośredniego)
 x_{2j}, a_{1j} - odpowiednio wartości x_2 i a_1 w j -tym takcie identyfikacji na 2. stopniu
 m - liczba taktów identyfikacji na 2. stopniu
 x_{1ij}, y_{ij} - odpowiednio wartości x_1 i y w i -tym momencie identyfikacji na 1. stopniu dla stałej wartości x_{2j}
 n - liczba taktów identyfikacji na 1. stopniu w jednym takcie identyfikacji na 2. stopniu
 w_{ij}, z_{ij} - odpowiednio wynik pomiaru oraz wartości zakłócenia w i -tym momencie identyfikacji dla stałego x_{2j} (w zadaniu estymacji)
 $w_{nj} = [w_{1j} \ w_{2j} \ \dots \ w_{nj}]$ - sekwencja wartości w_{ij} na 1. stopniu
 $x_{1nj} = [x_{11j} \ x_{12j} \ \dots \ x_{1nj}]$ - sekwencja wejściowa na 1. stopniu
 $y_{nj} = [y_{1j} \ y_{2j} \ \dots \ y_{nj}]$ - sekwencja wartości y_{ij} na 1. stopniu
 $\bar{x}_{1nm} = [\bar{x}_{1n1} \ \bar{x}_{1n2} \ \dots \ \bar{x}_{1nm}]$
 $\bar{w}_{nm} = [\bar{w}_{n1} \ \bar{w}_{n2} \ \dots \ \bar{w}_{nm}]$
 $x_{2m} = [x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2m}]$ - sekwencja wejściowa na 2. stopniu
 a_{1j} - wartość parametru a_1 dla wartości x_{2j}
 z_{ij} - zmienna losowa o wartościach z_{ij} (podobnie wszystkie zmienne losowe zaznaczamy kreskami u dołu)
 a_{1nj} - wynik identyfikacji na 1. stopniu
 Ψ_{1n} - algorytm identyfikacji na 1. stopniu
 a_{2m} - wynik identyfikacji na 2. stopniu
 Ψ_{2m} - algorytm identyfikacji na 2. stopniu
 $A_{1nm} = [a_{1n1} \ a_{1n2} \ \dots \ a_{1nm}]$
 a_{2m}^* - wynik identyfikacji bezpośredniej w zadaniu estymacji
 Ψ_{2m}^* - algorytm identyfikacji bezpośredniej w zadaniu estymacji
 Ψ_{2m} - kompozycja algorytmu identyfikacji na 1. i 2. stopniu
 $f_w(w_{ij}; a_{1j}, x_{1ij})$ - gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej w_{ij}
 $f_{wn}(w_{nj}; a_{1j}, x_{1nj})$ - łączna gęstość prawdopodobieństwa dla w_{nj}
 $f_{a1}(a_{1nj}; a_2, x_{1nj}, x_{2j})$ - gęstość prawdopodobieństwa dla a_{1nj}

- $f_{a1,m}(A_{1nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m})$ - gęstość prawdopodobieństwa dla A_{1nm}
 $f_{w,m}(\bar{W}_{nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m})$ - gęstość prawdopodobieństwa dla $\bar{W}_{nm}$
 $f_2(a_2)$ - gęstość prawdopodobieństwa dla a_2
 $f_1(a_{1j}; x_{2j})$ - gęstość prawdopodobieństwa dla a_{1j}
 L_1, L_2 - odpowiednio funkcje strat na 1. i 2. stopniu
 Φ_1, Φ_2 - modele obiektów odpowiednio na 1. i 2. stopniu
 Φ - superpozycja funkcji Φ_1 i Φ_2 (model dla podejścia bezpośredniego)
 $\bar{a}_1$ - wyjście modelu na 2. stopniu
 a_1^* - optymalny parametr modelu na 1. stopniu
 a_2^* - optymalny parametr modelu na 2. stopniu przy podejściu dwustopniowym
 $\tilde{a}_2$ - optymalna wartość a_2 przy podejściu bezpośrednim
 $\tilde{a}_{2m}$ - wynik identyfikacji bezpośredniej w zadaniu wyboru najlepszego modelu
 $\tilde{V}_{2m}$ - algorytm identyfikacji bezpośredniej w zadaniu wyboru najlepszego modelu
 $f(x_1, x_2, y)$ - łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych losowych x_1, x_2, y

1. WPROWADZENIE W PROBLEMATYKĘ IDENTYFIKACJI DWUSTOPNIOWEJ

1.1. Wstęp

Na wstępie w sposób ogólny i opisowy zostanie przedstawiony cel, charakter i zakres niniejszej pracy. Nieco bardziej rozwinięty i sprecyzowany przegląd problematyki pracy zostanie podany w p. 1.3 po krótkim opisie koncepcji identyfikacji dwustopniowej.

Problematyka identyfikacji obiektów, tj. ustalania modeli obiektów na podstawie badań eksperymentalnych, po pewnym okresie stagnacji przeżywa obecnie nowy, intensywny etap rozwoju. Wiąże się to z jednej strony z praktyczną koniecznością rozpatrywania nowych, bardziej skomplikowanych obiektów i celów identyfikacji, a z drugiej - z nowymi możliwościami realizacji algorytmów identyfikacji. W pierwszym przypadku chodzi o aktualne problemy identyfikacji systemów złożonych, a także identyfikacji na bieżąco w adaptacyjnych systemach sterowania. W drugim przypadku mamy na myśli nowe możliwości realizacji komputerowej, a mianowicie zastosowania mikrokomputerów w rozproszonych systemach gromadzenia i przetwarzania informacji. Obszar aktualnych zagadnień metodologicznych i technicznych identyfikacji leży na pograniczu automatyki i informatyki, z wyraźną przewagą po stronie informatyki.

Nowe problemy identyfikacji wiążą się wprawdzie z aktualnymi problemami zautomatyzowanych systemów sterowania (zdecentralizowane sterowanie złożonymi obiektami i elastycznymi procesami produkcji, adaptacyjne systemy sterowania w nowym ujęciu), ale wzrasta również rola metod i technik identyfikacji w zadaniach praktycznych, których bezpośrednim celem nie jest sterowanie obiektem eksperymentu. Dotyczy to zwłaszcza komputeryzacji prac eksperymentalnych w laboratoriach badawczych, a także np. identyfikacji procesów i systemów biomedycznych. Z drugiej strony komputerowe systemy identyfikacji są specyficznymi systemami informatycznymi, w których skład wchodzi również źródła informacji, tj. obserwowane obiekty.

Niniejsza praca dotyczy obszernej problematyki związanej ze złożonymi zadaniami i obiektami identyfikacji, czyli w skrócie problematyki identyfikacji systemów złożonych. Przegląd pewnych prac z tego zakresu znaleźć można w pracach [14,77]. O aktualności i ważności tej tematyki świadczy poświęcenie jej sesji specjalnej pn. "Identification in large scale systems" na ostatnim Sympozjum IFAC "Identification and System Parameter Estimation" (wyd. Pergamon Press, Oxford-N. York 1985), obejmującej prace m.in. Ż. Bubnickiego, H. Unbehauena.

W zagadnieniach identyfikacji systemów złożonych przewijają się dwa podstawowe nurty: koncepcja dekompozycji i hierarchicznych systemów identyfikacji sformułowana i rozwinięta przez Sage'a, a następnie Unbehauena i innych oraz koncepcja identyfikacji globalnej sformułowana i rozwinięta przez Bubnickiego i innych. Biorąc pod uwagę również inne zadania, idee i metody, w problematyce identyfikacji systemów złożonych można wyróżnić następujące koncepcje, mniej lub bardziej rozwinięte:

1. Dekompozycja strukturalna i hierarchiczne struktury identyfikacji [53,1,2,76,41,51].
2. Dekompozycja sekwencyjna [38,39,78,77].
3. Identyfikacja globalna [10,11,18,15,42].
4. Identyfikacja przy ograniczonych możliwościach pomiarowych i problem separowalności [22,23,59,61,62,24,25,26].
5. Identyfikacja wielostopniowa.

Obecna praca poświęcona jest ostatniej z wymienionych koncepcji, wprowadzonej wstępnie przez Bubnickiego [12], rozpatrzonej dla prostego przykładu w pracy [46] i występującej następnie w pracach [44,8]. Istota tej koncepcji dla dwóch stopni jest następująca. Dla pewnego obiektu (procesu, zjawiska, urządzenia) badamy zależność wielkości wyjściowej y od wielkości wejściowej x_1 i wyznaczamy parametr a_1 w opisie tej zależności. Jest to identyfikacja na pierwszym stopniu. Następnie zwracamy uwagę na pewną wielkość x_2 , która w czasie iden-

fikacji na 1. stopniu była stała, zmieniamy wartość tej wielkości i powtarzamy identyfikację na 1. stopniu, uzyskując na ogół inną wartość a_1 . Powtarzając wielokrotnie identyfikację na 1. stopniu dla różnych wartości x_2 możemy zbadać zależność a_1 od x_2 , a dokładniej - wyznaczyć parametr a_2 w opisie tej zależności. Jest to identyfikacja na drugim stopniu. Oba stopnie mogą dotyczyć tego samego rzeczywistego obiektu, np. w wyniku identyfikacji pewnego fragmentu układu krążenia (układu krwionośnego) wyznaczamy parametr a_1 charakteryzujący liczbowo ten fragment. Następnie interesuje nas wpływ dawki leku x_2 na wartość tego parametru i wyznaczamy parametr a_2 w opisie tej zależności. Inny przykład to badanie wpływu ilości katalizatora na stałe czasowe wybranego procesu chemicznego, wyznaczane w identyfikacji na 1. stopniu. Opis tego wpływu może być potrzebny do opracowania algorytmów sterowania rozpatrywanym procesem. Pierwszy stopień może również dotyczyć zbioru różnych realnych obiektów, rozproszonych przestrzennie, o różnych stałych parametrach x_2 . Typowe zastosowania dotyczą laboratoriów badawczych, w których bada się te same procesy w różnych warunkach określonych przez x_2 (np. badania zależności odkształceń od naprężeń w płytach o różnej grubości x_2), identyfikacji obiektów technicznych tego samego typu o różnych parametrach konstrukcyjnych x_2 i wreszcie populacyjnych badań biomedycznych, w których badani osobnicy mają różne cechy x_2 .

Jeśli interesuje nas tylko wartość a_2 w zależności y od x_1 , x_2 i nie jest potrzebne wyodrębnienie 1. stopnia, to można bezpośrednio badać tę zależność. Zastosowanie koncepcji dwustopniowej, czyli rozróżnianie dwóch stopni, oznacza pewnego rodzaju dekompozycję. W różnych realnych obiektach na 1. stopniu jest to naturalna dekompozycja przestrzenna, w jednym obiekcie - tylko dekompozycja czasowa wynikająca z określonej organizacji eksperymentu (szybka identyfikacja na pierwszym stopniu i wolna na drugim). Dokładniejsze sprecyzowanie koncepcji identyfikacji dwustopniowej i przyczyn uzasadniających wyodrębnienie obu stopni przedstawiono w p. 1.3.

Praktyczne i metodologiczne znaczenie tej wstępnie zarysowanej koncepcji, a także poprzednie doświadczenia z prac podstawowych i stosowanych z zakresu identyfikacji, skłoniły autora do postawienia sobie za cel systematycznego opracowania tej problematyki zawężonej do identyfikacji dwustopniowej, a przede wszystkim opracowania metod tworzenia algorytmów takiej identyfikacji dla wybranych typowych sytuacji oraz zbadania możliwości zastosowań technicznych i biomedycznych przez opracowanie wybranych przykładów. Problematyka biomedyczna została wybrana nie tylko ze względu na związek z wcześniejszymi pracami autora z tego zakresu [57,58,60,64,65], ale też ze względu na

znaczenie praktyczne [np. 33] oraz pewne ogólne problemy, specyficzne dla identyfikacji dwustopniowej i występujące w różnych zastosowaniach biomedycznych (badania wyników terapii, badania populacyjne). Konieczność opracowania podstaw metodologicznych koncepcji dwustopniowej pojawiła się po rozpatrzeniu prostych przykładów, które pokazały, że nie można przenieść "mechanicznie" oddzielenie na poszczególne stopnie znanych metod i algorytmów identyfikacji pojedynczego elementu (z wyjątkiem stopnia 1.) oraz, że istotne jest porównanie podejścia bezpośredniego i dwustopniowego - czyli, że z identyfikacją dwustopniową wiążą się specyficzne, nowe problemy.)

Realizacja postawionego celu dała następujące rezultaty:

1. Opracowano ogólne procedury uzyskiwania algorytmów identyfikacji dwustopniowej dla systemu statycznego w zadaniu estymacji parametrów i zadaniu wyboru optymalnego modelu oraz podano konkretne algorytmy analityczne w typowych przypadkach, w których było to możliwe.
2. Zbadano porównanie podejścia bezpośredniego i dwustopniowego, a konkretnie sprecyzowano pewne wystarczające warunki równoważności.
3. Rozszerzono koncepcję dwustopniową na proste przypadki dynamiczne, wskazujące na możliwość opracowania przypadków bardziej skomplikowanych.
4. Wskazano możliwość uogólnień na zadanie identyfikacji wielostopniowej.
5. Zastosowano "eksperymenty obliczeniowe" i symulację komputerową w celu zbadania pewnych przypadków niemożliwych do potraktowania analitycznego (zarówno w części ogólnej, jak i dla przykładów zastosowań).
6. Opracowano przykłady zastosowań technicznych: identyfikację kolumny destylacyjnej i silnika elektrycznego z wykorzystaniem wyników pomiarów dla rzeczywistych obiektów.
7. Opracowano przykłady zastosowań biomedycznych: identyfikację pewnych własności układu oddechowego oraz układu krążenia z wykorzystaniem dostępnych wyników pomiarów, a także zwrócono uwagę na ogólne możliwości i uzasadnienia zastosowania podejścia dwustopniowego dla systemów biomedycznych.

Przykłady praktyczne mają oczywiście jedynie charakter ilustracyjny, wskazujący na celowość i możliwość zastosowań technicznych i biomedycznych identyfikacji dwustopniowej.

Celem niniejszej pracy było usystematyzowanie i syntetyczne ujęcie przedstawionych rezultatów wraz z krótkimi uzupełnieniami wskazującymi na związek z zadaniami sterowania oraz na problemy związane z realizacją komputerową, prowadzącą do określonego systemu informacyjnego. Praca obejmuje wyniki przedstawione we wcześniejszych pra-

cach autora [63,66-70,72,74,75] oraz dotychczas nie publikowane, dotyczące przypadków dynamicznych, możliwości uogólnień na wiele stopni oraz dalszych opracowań przykładów praktycznych.

Rozdział 1 zawiera krótkie przedstawienie podstawowych problemów identyfikacji rozwijanych dalej w ujęciu dwustopniowym, charakterystykę koncepcji identyfikacji dwustopniowej oraz uwagi o sterowaniu i realizacji komputerowej. Podstawowe rozważania metodologiczne dotyczące wyznaczania algorytmów identyfikacji przedstawiono w rozdz. 2 i 3, natomiast opracowanie przykładów zastosowań w rozdz. 4 i 5. Pracę uzupełniają uwagi końcowe, zawierające propozycje dalszych prac w omawianym zakresie.

Na koniec zauważmy, że po wprowadzeniu koncepcji dwustopniowej można by formułować i próbować opracowywać w ujęciu dwustopniowym w zasadzie wszystkie problemy znane i opracowane dla identyfikacji pojedynczego elementu. Oczywiście autor dokonał określonej selekcji w wyborze problemów, ich opracowaniu i przedstawieniu w obecnej pracy, koncentrując się na problemach podstawowych i ich praktycznym uzasadnieniu. Dlatego np. problematyka identyfikacji obiektów dynamicznych potraktowana została fragmentarycznie, praca nie zawiera rozważań na temat planowania eksperymentów dwustopniowych czy identyfikacji dwustopniowej "na bieżąco", a rozdz. 2 i 3 mogą stanowić jedynie podstawę dalszych prac w tym zakresie. Z kolei rezultaty prac metodologicznych związanych przede wszystkim z algorytmizacją przetwarzania informacji mogą stanowić podstawę do opracowania obszernej problematyki odpowiednich systemów informatycznych, o której wspomniano w p. 1.5, i która w tej pracy nie będzie omawiana. Problematyka ta jest stopniowo opracowywana w Instytucie Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej w powiązaniu z opracowaniem i realizacją konkretnych systemów informatycznych: EXPES, BAMED, sieć lokalna NETEX, w których wykorzystano pewne koncepcje i wyniki dotyczące identyfikacji dwustopniowej.

1.2. Identyfikacja pojedynczego elementu

W celu wprowadzenia i ujednolicenia nomenklatury, oznaczeń i rozpatrywanych problemów identyfikacji dwustopniowej - przypomnijmy krótko podstawowe problemy identyfikacji pojedynczego elementu (obiektu). Problematyka ta jest dokładnie przedstawiona w wielu książkach na temat identyfikacji np. [52,31,48,32]. Rozważania w niniejszej pracy oparto w większości na ujęciu przedstawionym w pracy [10]. Ograniczając się w tym miejscu do obiektów statycznych, przedstawimy dwa podstawowe problemy identyfikacji: estymację parametrów i wybór optymalnego modelu.

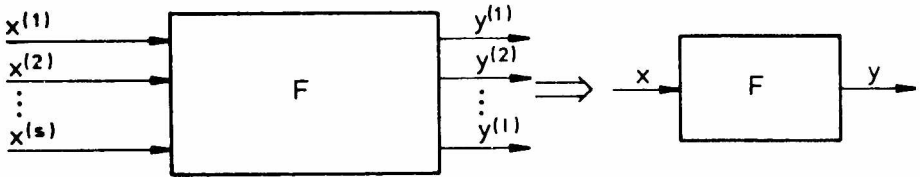
A. Estymacja parametrów

Założmy, że opis obiektu (rys. 1.1) jest znany z dokładnością do parametrów:

$$y = F(x, a),$$

gdzie

$x = [x^{(1)} \ x^{(2)} \ \dots \ x^{(s)}]^T \in \mathcal{R}^s$ - wektor wejściowy,
 $y = [y^{(1)} \ y^{(2)} \ \dots \ y^{(l)}]^T \in \mathcal{R}^l$ - wektor wyjściowy,
 $a = [a^{(1)} \ a^{(2)} \ \dots \ a^{(r)}]^T \in \mathcal{R}^r$ - wektor parametrów,
 $F: \mathcal{R}^s \times \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^l$ jest znaną funkcją.



Rys. 1.1. Obiekt identyfikacji
 Fig. 1.1. Identification plant

W przypadku deterministycznym zadanie polega na wyznaczaniu wartości a na podstawie ciągu pomiarów wejścia i wyjścia. W przypadku pomiarów z losowymi zakłóceniami powstaje zadanie estymacji nieznanymi parametrów na podstawie wyników pomiarów. W dalszym ciągu zakładamy będziemy, że jedynie pomiar wyjścia jest zniekształcony zakłóceniami. Założenie spowodowane jest z jednej strony tym, że często eksperyment ma charakter aktywny, tzn. wartości x są podawane na wejście obiektu przez eksperymentatora. Z drugiej strony uwzględnienie zakłóceń na wejściu komplikuje zapis i rozważania formalne, a idea pozostaje ta sama i z przypadku zakłóceń tylko na wyjściu może być przeniesiona na przypadek pomiaru obu wielkości z zakłóceniami. Dla poszczególnych momentów (taktów) identyfikacji

$$y_i = F(x_i, a), \quad w_i = h(y_i, z_i),$$

gdzie i jest numerem kolejnego pomiaru (taktu identyfikacji), h jest znaną funkcją określającą wpływ zakłóceń, z_i jest wektorem zakłóceń, w_i - wektorem wyniku pomiaru. Będziemy zakładać, że z_i jest wartością ciągłej zmiennej losowej $\underline{z}_i$, zmienne $\underline{z}_i$ są stochastycznie niezależne dla różnych i o tej samej gęstości prawdopodobieństwa $f_z(z)$. Wprowadźmy oznaczenia:

$X_n = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ - sekwencja wejściowa (macierz wartości wejściowych),

$W_n = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ - sekwencja wyjściowa (macierz pomiarów na wyjściu).

Algorytm estymacji ma ogólną postać

$$a_n = \Psi_n(X_n, W_n),$$

gdzie a_n jest estymatą a po n taktach. Do wyznaczenia tego algorytmu stosuje się najczęściej dwie podstawowe metody estymacji: metodę maksymalnej wiarygodności oraz metodę minimalnego ryzyka.

W pierwszym przypadku dla danych F , h i f_z wyznaczamy funkcję wiarygodności, tj. łączną gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{wn}(W_n; a, X_n) = \prod_{i=1}^n f_w(w_i; a, x_i),$$

gdzie f_w oznacza gęstość zmiennej losowej w_i , a następnie maksymalizujemy f_{wn} względem a otrzymując zależność wyniku maksymalizacji a_n od X_n i W_n .

W drugim przypadku (podejście bayesowskie) zakładamy, że a jest wartością zmiennej losowej a opisanej gęstością prawdopodobieństwa $f_a(a)$. Dla danych F , h , f_z , f_a wyznaczamy funkcję Ψ_n minimalizującą tzw. ryzyko średnie

$$R = E_{\substack{a, W_n}} \{L[a, \Psi_n(X_n, W_n)]\},$$

gdzie $L(a, a_n)$ jest zadana funkcją strat. Można to sprowadzić do minimalizacji względem $\bar{a}$ ryzyka warunkowego

$$r(\bar{a}, W_n) = E_{\bar{a}} [L(\bar{a}, \bar{a}) | W_n],$$

a w konsekwencji do minimalizacji

$$\bar{r}(\bar{a}, W_n) \triangleq \int_A L(a, \bar{a}) f_a(a) f_{wn}(W_n | a; X_n) da,$$

gdzie $A = \mathcal{R}^F$. Ostatecznie otrzymujemy zależność wartości minimalizującej $\bar{a} = a_n$ od X_n , W_n . Przy odpowiednim wyborze funkcji strat minimalizacja ryzyka sprowadza się do maksymalizacji gęstości a posteriori dla a

$$f_a(a | W_n; X_n),$$

czyli do maksymalizacji względem a funkcji

$$f_a(a) f_{wn}(W_n | a; X_n).$$

Mówimy wówczas w skrócie o metodzie maksymalnego prawdopodobieństwa. W szczególnym przypadku liniowym jednowymiarowym, tj. dla

$$y = ax,$$

gdy $\underline{a}$ i $\underline{z}$ mają rozkłady normalne i $E(\underline{z}) = 0$, oszacowanie uzyskane metodą maksymalnego prawdopodobieństwa jest następujące:

$$\hat{a}_n = \frac{\tilde{a} + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_z}\right)^2 \underline{x}_n^T W_n^T}{1 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_z}\right)^2 \underline{x}_n^T \underline{x}_n^T},$$

gdzie $\tilde{a}$ jest wartością oczekiwaną $\underline{a}$; σ_a^2 , σ_z^2 są odpowiednio wariancjami $\underline{a}$ i $\underline{z}$.

B. W y b ó r o p t y m a l n e g o m o d e l u

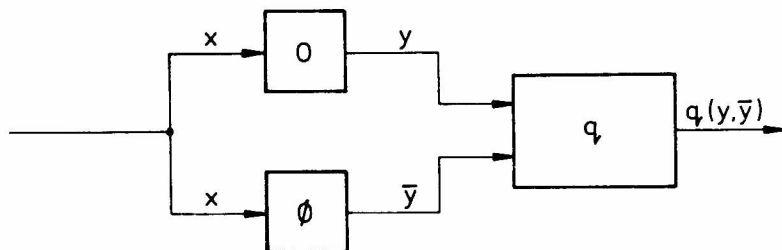
Obecnie rozpatrujemy sytuację, gdy opis obiektu taki jak poprzednio nie jest znany lub może nie istnieć. Zakładamy pewną postać modelu obiektu $\Phi: \mathcal{R}^S \times \mathcal{R}^T \rightarrow \mathcal{R}^1$, tj.

$$\bar{y} = \Phi(x, a),$$

gdzie $\bar{y}$ oznacza wektor wyjściowy modelu. Zakładamy również, że (x_1, y_1) są wartościami zmiennych losowych $(\underline{x}_1, \underline{y}_1)$, niezależnych dla różnych i o tej samej łącznej gęstości $f(x, y)$. W zadaniu parametrycznym, tj. przy ustalonej funkcji Φ , problem wyboru optymalnego modelu polega na wyborze w określonym sensie najlepszej wartości $a \in A$, gdzie $A \subseteq \mathcal{R}^T$ (w szczególnym przypadku $A = \mathcal{R}^T$). Przy pełnej informacji probabilistycznej, tj. znajomości $f(x, y)$, zadanie sprowadza się do wyznaczenia $a = a^*$ minimalizującego kryterium jakości identyfikacji

$$Q(a) = E_{\underline{x}, \underline{y}} \{q[\underline{y}, \Phi(\underline{x}, a)]\},$$

gdzie q jest określoną funkcją porównującą wyjście obiektu i modelu dla tego samego wejścia (rys. 1.2), np. w przypadku jednowymiarowym $q(y, \bar{y}) = (y - \bar{y})^2$. W szczególnych przypadkach do wyznaczenia a^* wystarczy jedynie znajomość odpowiednich momentów rozkładu $f(x, y)$.



Rys. 1.2. Porównanie obiektu identyfikacji i modelu Φ
Fig. 1.2. Comparison of the identification plant and the model Φ

W przypadku liniowo-kwadratowym ($l = 1$, $s = r$), tj. dla

$$\bar{y} = a^T x, \quad q(y, \bar{y}) = (y - \bar{y})^2, \quad A = \mathcal{R}^T$$

wynik jest następujący:

$$a^* = \left[E_{\underline{x}} (\underline{x} \underline{x}^T) \right]^{-1} E_{\underline{x}, \underline{y}} (\underline{x} \underline{y}),$$

a dla $s = r = 1$

$$a^* = \frac{E_{\underline{x}, \underline{y}} (\underline{x} \underline{y})}{E_{\underline{x}} (\underline{x}^2)}.$$

W rozważaniach dotyczących konkretnych przypadków identyfikacji dwustopniowej będziemy zakładać brak ograniczeń na wybór a , tj. $A = \mathcal{R}^T$.

W sytuacji empirycznej, tj. gdy nie znamy $f(x, y)$ - posługujemy się wynikami pomiarów, czyli X_n i

$$Y_n = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n].$$

Wówczas stosować można dwa na ogół różne sposoby wyznaczania algorytmu identyfikacji

$$a_n = \psi_n(X_n, Y_n),$$

a mianowicie minimalizować względem a empiryczne kryterium identyfikacji

$$Q_n(a) = \sum_{i=1}^n q[y_i, \Phi(x_i, a)]$$

lub wykorzystać X_n i Y_n do ustalenia empirycznej gęstości dla $(\underline{x}, \underline{y})$ i wyznaczać a^* jak poprzednio za pomocą gęstości empirycznej. W przedstawionym przypadku liniowo-kwadratowym oba sposoby dają ten sam algorytm identyfikacji (w sposobie drugim wystarczy wprowadzić empiryczne momenty):

$$a_n = (X_n X_n^T)^{-1} X_n Y_n^T,$$

a w przypadku jednowymiarowym

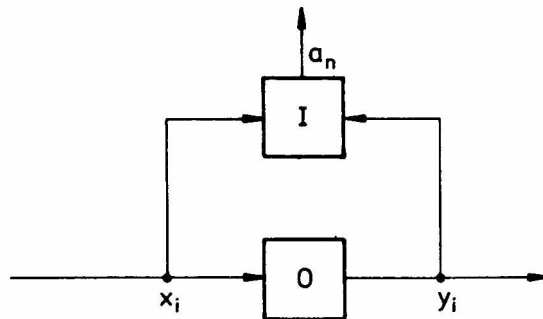
$$a_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Warto zauważyć, że wszystkie rezultaty dla przypadku liniowego względem a oraz x łatwo przenieść na przypadek liniowy względem a , tj.

$$\bar{y} = a^T \varphi(x),$$

wprowadzając $\bar{x} = \varphi(x)$ w miejsce x . Uwaga ta odnosi się do wszystkich rozpatrywanych dalej przypadków liniowych metodą identyfikacji dwustopniowej, zarówno w zadaniu estymacji, jak i w zadaniu wyboru optymalnego modelu.

Wprowadźmy na koniec podstawowy schemat blokowy systemu identyfikacji (rys. 1.3), w którym I oznacza identyfikator realizujący algorytm identyfikacji, tj. wyznaczający a_n po n pomiarach (x_i, y_i) . W przypadku estymacji w miejsce y_i wystąpi w_i .



Rys. 1.3. Podstawowy system identyfikacji
Fig. 1.3. Basic identification system

1.3. Koncepcja identyfikacji dwustopniowej. Problemy pracy

Obecnie możemy nieco dokładniej niż w p. 1.1 scharakteryzować koncepcję identyfikacji dwustopniowej, a także uzasadnienie jej wprowadzenia oraz problemy niniejszej pracy. Dokładne sformułowanie problemu estymacji dwustopniowej i dwustopniowego wyboru optymalnego modelu przedstawiono w rozdz. 2 i 3. Również i w obecnej krótkiej charakterystyce podstawowej koncepcji ograniczymy się do przypadku statycznego. Rozpatrywać będziemy dwustopniowy obiekt identyfikacji (rys. 1.4). W problemie estymacji dwustopniowej jest to system statyczny opisany zależnościami

$$y = F_1(x_1, a_1), \quad a_1 = F_2(x_2, a_2),$$

charakteryzującymi odpowiednio obiekty O_1 i O_2 dla obu stopni. Parametr a_1 jest wyjściem dla 2. stopnia, badamy bowiem wpływ wejścia x_2

na parametr zależności opisującej 1. stopień. Implikuje to określony sposób organizacji eksperymentu. Mianowicie dla stałej wartości x_{2j} uzyskujemy sekwencje wyników pomiarów wejścia i wyjścia na 1. stopniu

$$X_{1nj}, W_{nj}$$

zdefiniowane tak, jak w p. 1.2. Stosując odpowiedni algorytm estymacji dla 1. stopnia wyznaczamy a_{1nj} dla stałego x_{2j} :

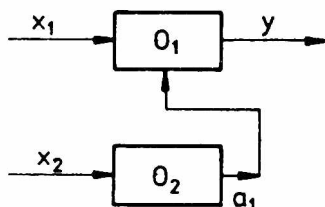
$$a_{1nj} = \Psi_{1n}(X_{1nj}, W_{nj}).$$

Powtarzanie identyfikacji na 1. stopniu dla $j = 1, 2, \dots, m$ oznacza kolejne takty identyfikacji na 2. stopniu, w wyniku których uzyskujemy sekwencję wejściową i wyjściową dla 2. stopnia, tj.

$$A_{1nm} = [a_{1n1} \ a_{1n2} \ \dots \ a_{1nm}], \quad X_{2m} = [x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2m}],$$

a następnie oszacowanie a_2 z zastosowaniem odpowiedniego algorytmu estymacji

$$a_{2m} = \Psi_{2m}(A_{1nm}, X_{2m}).$$



Rys. 1.4. Dwustopniowy obiekt identyfikacji
Fig. 1.4. Two-stage identification plant

Warto zauważyć, że w identyfikacji dwustopniowej a_{1nj} nie jest wynikiem bezpośredniego pomiaru wyjścia na 2. stopniu, lecz wynikiem j -tej identyfikacji na 1. stopniu. Analogicznie charakteryzujemy koncepcję dwustopniowego wyboru optymalnego modelu. Proponujemy mianowicie oddzielne postaci modeli dla zależności y od x_1 na 1. stopniu oraz zależności a_1 od x_2 na 2. stopniu:

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, a_1), \quad \bar{a}_1 = \Phi_2(x_2, a_2).$$

Przy pełnej informacji probabilistycznej zakładamy znajomość łącznej gęstości prawdopodobieństwa $f(x_1, x_2, y)$. Optymalizacja na 1. stopniu polega na wyborze $a_1 = a_1^*$ minimalizującym

$$Q_1(a_1) = E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, a_1)] | x_2\}.$$

Ostatecznie otrzymujemy zależność a_1^* od x_2 :

$$a_1^* = G(x_2).$$

Optymalizacja na 2. stopniu polega zatem na najlepszej w sensie probabilistycznym aproksymacji funkcji G za pomocą funkcji Φ_2 , tj. wyznaczeniu $a_2 = a_2^*$ minimalizującego

$$Q_2(a_2) = E_{\underline{x}_2} \{q_2[G(\underline{x}_2), \Phi_2(\underline{x}_2, a_2)]\}.$$

W sytuacji empirycznej wystąpią algorytmy identyfikacji na obu stopniach, przy czym w odróżnieniu od zadania estymacji wystąpi Y_{nj} w miejsce W_{nj} , zgodnie z notacją wprowadzoną w p. 1.2. Oczywiście i obecnie a_{1nj} nie jest wynikiem bezpośredniego pomiaru, lecz j -tej identyfikacji na 1. stopniu.

W niektórych zadaniach praktycznych identyfikacja na 1. stopniu ma charakter pomocniczy, a celem jest wyznaczenie a_2 . Wówczas podejście dwustopniowe porównać można z podejściem bezpośrednim, bez dekompozycji na dwa stopnie. W problemie estymacji będzie to oznaczało bezpośrednie wyznaczenie oszacowania

$$a_{2m}^* = \Psi_{2m}^*[(X_{1n1}, W_{n1}), \dots, (X_{1nm}, W_{nm}); X_{2m}]$$

dla opisu obiektu o wejściach x_1 , x_2 , wyjściu y i parametrze a_2 :

$$y = F_1[x_1, F_2(x_2, a_2)] \triangleq F(x_1, x_2, a_2).$$

W problemie wyboru najlepszego modelu przy podejściu bezpośrednim rozpatrywać będziemy model, który jest kompozycją modeli przyjętych dla poszczególnych stopni, tj.

$$\bar{y} = \Phi_1[x_1, \Phi_2(x_2, a_2)] \triangleq \Phi(x_1, x_2, a_2)$$

i wyznaczać optymalne $\tilde{a}_2$ dla modelu Φ przy pełnej informacji probabilistycznej lub $\tilde{a}_{2m}$ w sytuacji empirycznej.

Warto zauważyć, że jeśli w celu wyznaczania algorytmów identyfikacji na 1. stopniu wystarczy wprost zastosować znane metody identyfikacji dla pojedynczego elementu, to zadanie dla 2. stopnia jest bardziej skomplikowane i stwarza nowe problemy. Wiąże się to z faktem, że przy pełnej informacji dane aprioryczne nie są określone wprost dla wyjścia na 2. stopniu, tj. dla a_1 , i przy danych dotyczących x_1 , x_2 , y (lub z) muszą być wyznaczone dla określonego wyniku identyfikacji na 1. stopniu. Podobnie w sytuacji empirycznej a_1 nie jest wprost mierzone, lecz wyliczane dla określonego algorytmu identyfikacji na 1. stopniu. W efekcie dla identyfikacji na 2. stopniu na ogół nie mogą być przeniesione wprost metody identyfikacji pojedynczego elementu. Wraz z zadaniem bezpośrednim i jego porównaniem z podejściem dwustopniowym

stwarza to nowe problemy, specyficzne dla identyfikacji dwustopniowej. Obecnie możemy nieco dokładniej scharakteryzować wymienioną na wstępie problematykę niniejszej pracy, na którą składają się następujące zadania:

1. Dokładne sformułowanie problemu estymacji dwustopniowej i dwustopniowego wyboru najlepszego modelu dla systemu statycznego.

2. Opracowanie procedur uzyskiwania algorytmów Ψ_{1n} , Ψ_{2m} , Ψ_{2m}^* dla estymacji dwustopniowej i bezpośredniej z zastosowaniem dwóch podstawowych metod estymacji, tj. metody maksymalnej wiarygodności i metody minimalnego ryzyka (w szczególnym przypadku metody maksymalnego prawdopodobieństwa). Uzyskanie konkretnych algorytmów dla typowych przypadków.

3. Porównanie estymacji dwustopniowej i bezpośredniej, a konkretnie sformułowanie i udowodnienie twierdzeń przedstawiających wystarczające warunki równoważności, tj. równości $a_{2m} = a_{2m}^*$ dla tych samych sekwencji (X_{1nj}, W_{nj}) i X_{2m} , czyli identyczności algorytmów estymacji bezpośredniej i dwustopniowej.

4. Opracowanie ogólnej procedury wyznaczania optymalnych parametrów a_1^* , a_2^* , $\tilde{a}_2$ dla dwustopniowego i bezpośredniego wyboru optymalnego modelu przy pełnej informacji probabilistycznej, jako podstawy uzyskiwania odpowiednich algorytmów w sytuacji empirycznej oraz podanie konkretnych algorytmów dla przypadku liniowo-kwadratowego.

5. Porównanie dwustopniowego i bezpośredniego wyboru optymalnego modelu, a konkretnie sformułowanie i udowodnienie twierdzeń przedstawiających wystarczające warunki równoważności i wprowadzenie wskaźnika porównania przy nierównoważności, a także przeprowadzenie eksperymentów obliczeniowych w celu zbadania tego wskaźnika na wybranym przykładzie.

6. Przedstawienie wybranych przypadków identyfikacji dwustopniowej systemu dynamicznego, które można by potraktować jako wprowadzenie charakteryzujące możliwości opracowania koncepcji dwustopniowej dla innych przypadków. Zadanie to potraktowano nieco szerzej dla estymacji dwustopniowej przez rozpatrzenie różnych możliwości: jeden stopień dynamiczny, oba stopnie dynamiczne.

7. Ilustracja możliwości zastosowań dla wybranych przykładów technicznych i biomedycznych z konkretnymi wynikami pomiarów dla realnych obiektów z zastosowaniem metody symulacji komputerowej w wybranych przypadkach oraz z przedstawieniem ogólnej charakterystyki identyfikacji dwustopniowej dla przypadku biomedycznego.

Jeśli powyższe zestawienie potraktować jednocześnie jako przegląd treści pracy, to podobnie jak w p. 1.1 należy dodać, że pracę uzupełniają uwagi dotyczące możliwości uogólnienia dla identyfikacji wielo-

stopniowej, zastosowań na potrzeby systemów sterowania oraz realizacji komputerowej w odpowiednim systemie informatycznym.

Nieco dokładniej niż w p. 1.1 scharakteryzować można również uzasadnienie wprowadzenia i opracowania koncepcji dwustopniowej. Można wymienić następujące powody, które zresztą są z sobą związane i mogą wystąpić łącznie:

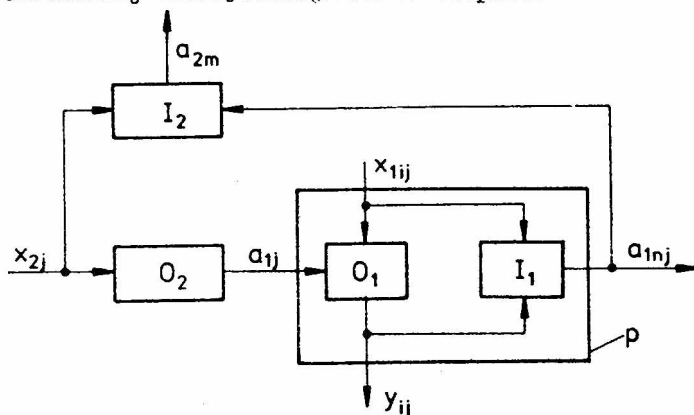
1. Na 1. stopniu identyfikujemy oddzielne realne obiekty o tej samej naturze (urządzenia, procesy), charakteryzujące się różnymi stałymi wartościami x_2 . Wielkości x_1 i y są te same dla wszystkich obiektów. Jest to częsta sytuacja w badaniach doświadczalnych, a poszczególne obiekty mogą być nawet badane w różnych pomieszczeniach (laboratoriach). Dla wymienionego w p. 1.1 przykładu z badaniem płyt x_1 oznacza naprężenie, y - odkształcenie, x_2 - grubość płyty. W populacyjnych badaniach biomedycznych badać można zależność y od x_1 dla różnych osobników (organizmów) z różnymi parametrami x_2 . Celem identyfikacji na 2. stopniu jest zbadanie wpływu x_2 na parametr a_1 , wyznaczany w wyniku identyfikacji na 1. stopniu. Ogólnie rozpatrywany przypadek można określić jako dekompozycję przestrzenną, w której celem identyfikacji na 2. stopniu jest badanie zbioru realnych obiektów identyfikowanych na 1. stopniu, przy czym zmiana x_2 w jednym realnym obiekcie jest niewygodna lub wręcz niemożliwa (np. x_2 jest parametrem konstrukcyjnym urządzenia lub wiekiem osobnika w badaniach biomedycznych).

2. Równoczesna zmiana x_1 i x_2 w celu wyznaczenia a_2 jest niewygodna lub niemożliwa nawet jeśli oba stopnie dotyczą tego samego realnego obiektu. Na przykład w rozpatrywanym przypadku identyfikacji układu krążenia jest nierealne i wręcz bezsensowne zmienianie dawki leku tak szybko, jak zmieniają się i są mierzone wielkości x_1 i y , charakteryzujące dynamikę układu krążenia. Podobnie, jeśli np. badany wpływ dawki katalizatora na stałą czasową pewnego procesu chemicznego, to identyfikacja na 1. stopniu w celu wyznaczenia tej stałej, tj. a_1 , musi być szybka, natomiast identyfikacja na 2. stopniu wolna, tzn. x_2 musi być stałe w jednym cyklu wyznaczania a_1 . Ogólnie rozpatrywany przypadek można scharakteryzować jako dekompozycję czasową, w której z konieczności lub dla wygody eksperyment zorganizowany jest tak, że utrzymywana jest stała wartość x_2 w kolejnych cyklach, w których zmieniają się x_1 i y .

3. Zarówno przy jednoczesnej zmianie x_1 i x_2 , jak i przy szybkiej zmianie x_1 i wolnej x_2 , możliwe jest bezpośrednie wyznaczanie a_2 . Wyostrzenie 1. stopnia, czyli zastosowanie dekompozycji może być wówczas uzasadnione względami obliczeniowymi, tzn. ułatwieniami w wyznaczaniu i realizacji algorytmów identyfikacji. Aktualne jest wówczas porównanie podejścia dwustopniowego i bezpośredniego.

4. W sytuacji takiej jak poprzednio wyodrębnienie 1. stopnia może być również podyktowane jego samoistnym znaczeniem praktycznym, uzasadniającym wprowadzenie i wyznaczanie a_1 , np. stałej czasowej badanego procesu chemicznego, co jest potrzebne do zaprojektowania odpowiedniego regulatora tego procesu. Co więcej, podczas identyfikacji realnego obiektu, której celem jest wyznaczenie a_1 , drugi stopień może jeszcze nie być zaplanowany.

5. Wyodrębnienie 1. stopnia jest koniecznością, ponieważ a_1 nie może być bezpośrednio mierzone. W tym przypadku podstawowym celem identyfikacji jest zbadanie zależności a_1 od x_2 , czyli wyznaczenie a_2 , natomiast identyfikacja na 1. stopniu pełni rolę pomocniczą jako pewnego rodzaju układ pomiarowy, w którym mierzy się pomocnicze wielkości x_1 i y oraz wylicza a_1 . Schemat blokowy podstawowego systemu identyfikacji (rys. 1.5) zawiera wówczas pomocniczy system identyfikacji na 1. stopniu, który potraktować można jak układ pomiarowy P. Na przykład w rozpatrywanych w rozdz. 5 przypadkach wpływu metacholiny na układ oddechowy czy dawek leku na układ krążenia, odpowiedni parametr ujawniający ten wpływ nie może być mierzony bezpośrednio, lecz wyznaczony w wyniku pomocniczej identyfikacji na 1. stopniu.



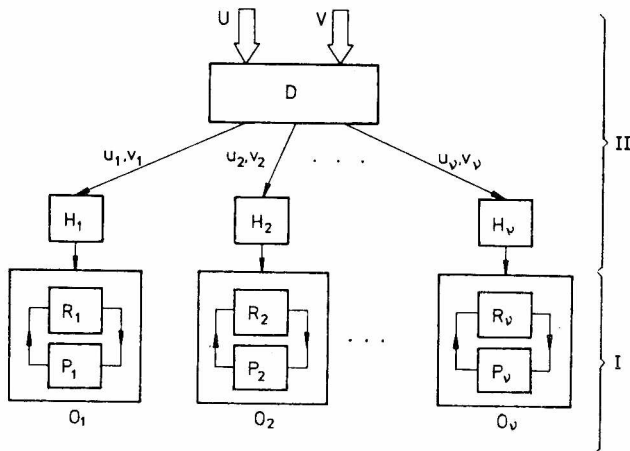
Rys. 1.5. Schemat blokowy rozpatrywanego systemu identyfikacji
Fig. 1.5. Block diagram of the considered identification system

1.4. Identyfikacja dwustopniowa na potrzeby sterowania automatycznego

Ostatni przypadek uzasadniający koncepcję dwustopniową, przedstawiony w poprzednim punkcie, wiąże się ściśle z zastosowaniem identyfikacji dwustopniowej na potrzeby sterowania. Najczęściej identyfikowanym obiektem sterowania jest tu obiekt na 2. stopniu, tzn. o wielkości ste-

rującej x_2 i wielkości sterowanej a_1 i w celu wyznaczenia algorytmu sterowania należy określić model obiektu, tj. zależność a_1 od x_2 . Dotyczy to nie tylko sterowania procesami technologicznymi, ale i terapii medycznej. Na przykład określenie zależności parametru układu krążenia od dawki leku potrzebne jest do racjonalnej terapii. W zastosowaniach technicznych określenie zależności a_1 od x_2 jest niezbędne do algorytmizacji i w konsekwencji automatyzacji sterowania.

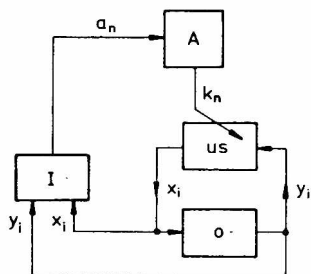
Warto zauważyć, że podczas sterowania złożonymi procesami technologicznymi również identyfikacja na 1. stopniu może mieć samoistne znaczenie praktyczne. Sytuacja taka występuje w dwupoziomowych systemach sterowania, w których w celu szybkiego sterowania lokalnego na 1. poziomie konieczne jest wyznaczenie zależności y od x_1 dla lokalnych obiektów (identyfikacja na 1. stopniu), natomiast identyfikacja na 2. stopniu konieczna jest do algorytmizacji sterowania na 2. poziomie. Dekompozycja identyfikacji na dwa stopnie jest tu związana z dekompozycją sterowania na dwa poziomy. Przypadek ten odnosi się do dwupoziomowego sterowania kompleksem operacji z lokalnie regulowanymi operacjami [19,28] (rys. 1.6), w których wyróżniono poziom bezpośredniej regulacji procesów technologicznych P za pomocą regulatorów R (poziom I) oraz poziom sterowania produkcją (poziom II), polegającego na rozdzielnie ograniczonej ilości zasobów U i określonego rozmiaru zadania produkcyjnego V pomiędzy lokalne procesy. Poszczególne procesy z regulatorami można traktować jak operacje, a powiązania między nimi tworzą określony kompleks operacji. Sterowanie kompleksem [13] sprowadza się



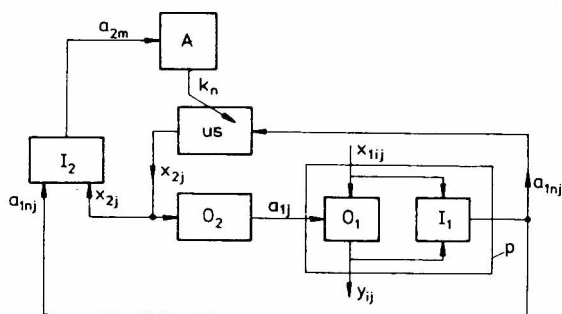
Rys. 1.6. Schemat blokowy rozpatrywanego systemu sterowania
Fig. 1.6. Block diagram of the considered control system

do wyznaczenia i realizacji odpowiedniego rozdziału i dystrybucji zasobów oraz zadań (u, v) w kolejnych cyklach produkcyjnych i jest realizowane przez system dystrybucyjny D. Wielkości (u, v) mogą wpływać na parametry b niższego poziomu (parametry procesu, wartości początkowe, wartości zadane regulatorów). Celem identyfikacji na 1. stopniu dla wyodrębnionego procesu P jest określenie modelu na potrzeby regulacji automatycznej, np. wyznaczenie stałej czasowej $b = a_1$ procesu chemicznego. Celem identyfikacji na 2. stopniu jest określenie modeli tzw. członów pośredniczących H, tzn. określenie zależności między b i (u, v) = x_2 , np. zależności stałej czasowej od ilości katalizatora w przypadku zasobów lub od ilości przerabianego materiału w przypadku zadań. Wiąże się z tym problematyka identyfikacji kompleksów operacji [15,18] oraz możliwość wprowadzenia koncepcji dwustopniowej, która w tym zastosowaniu nie będzie dalej rozpatrywana.

Zauważmy na koniec, że wprowadzenie koncepcji dwustopniowej może mieć określone implikacje dla struktury i metodyki projektowania adaptacyjnych systemów sterowania z bieżącą identyfikacją i wykorzystywaniem jej wyników do modyfikacji sterowania. W podstawowym systemie adaptacji (rys. 1.7) w wyniku identyfikacji realizowanej przez identyfikator I - adaptator A zmienia parametr k podstawowego urządzenia sterującego (algorytmu sterowania) US. Jeśli wyjście obiektu nie może



Rys. 1.7. Schemat blokowy adaptacyjnego systemu sterowania
Fig. 1.7. Block diagram of the adaptive control system



Rys. 1.8. System adaptacyjny z identyfikacją dwustopniową
Fig. 1.8. Adaptive system with two-stage identification

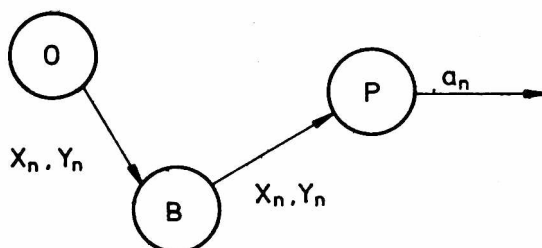
być mierzone bezpośrednio, stosujemy pomocniczą identyfikację na 1. stopniu taką, jak na rys.

1.5 i ostatecznie adaptacyjny system sterowania ma strukturę przedstawioną na rys. 1.8, przy czym oznaczenia wejścia i wyjścia obiektu O

zmieniono tak, aby odpowiadały one przyjętym oznaczeniom w identyfikacji na 2. stopniu. Bieżąca identyfikacja dwustopniowa w adaptacyjnym systemie sterowania stanowi oddzielne zagadnienie, którego opracowanie wykracza poza ramy niniejszej pracy.

1.5. Realizacja komputerowa - system informatyczny

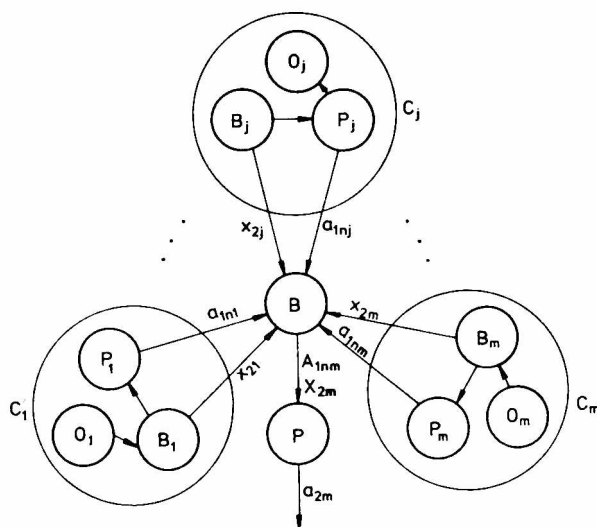
Zastosowanie komputera z odpowiednimi urządzeniami dodatkowymi jako identyfikatora gromadzącego i przetwarzającego dane pomiarowe według odpowiednich algorytmów identyfikacji prowadzi do komputerowego systemu identyfikacji, który w przypadku badań eksperymentalnych w laboratoriach badawczych bywa nazywany komputerowym systemem eksperymentowania [20]. W prostym systemie z jednym obiektem identyfikacji O można wyróżnić podstawowe elementy (rys. 1.9): bazę danych B , w której gromadzone są tabele wyników pomiarów X_n, Y_n oraz procesor P , realizujący algorytm identyfikacji Ψ . Możliwe są również inne powiązania między elementami O, B, P nie przedstawione na rysunku. Na przykład, gdy komputer wyznacza plan eksperymentu dla eksperymentu aktywnego lub w przypadku współdziałania eksperymentatora w systemie komputerowo-wspomagane go eksperymentowania.



Rys. 1.9. Prosty komputerowy system identyfikacji
Fig. 1.9. Basic computer identification system

W złożonych zadaniach lub obiektach identyfikacji realizacja komputerowa algorytmów identyfikacji będzie prowadziła do złożonego systemu informatycznego, zawierającego zbiór elementów O, B, P odpowiednio powiązanych przepływem informacji. Będzie to obiektowy system informatyczny, zawierający jako części składowe źródła informacji, czyli elementy O współdziałające z pozostałymi elementami w czasie rzeczywistym. Zgodnie z przedstawioną w p. 1.3 charakterystyką identyfikacji dwustopniowej, struktura odpowiedniego systemu informatycznego może być taka, jak na rys. 1.10. W centralnej bazie danych B gromadzone są wyniki identyfikacji obiektów $O_1, O_2, \dots, O_m$ na 1. stopniu, tj.

($a_{1n1}, a_{1n2}, \dots, a_{1nm}$) oraz wartości charakteryzujące te obiekty ($x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$). Centralny procesor P wyznacza a_{2m} według algorytmu identyfikacji na 2. stopniu. Struktura ta odpowiada bezpośrednio sytuacji przestrzennego rozmieszczenia obiektów identyfikacji 1. stopnia i zawiera lokalne centra przetwarzania $C_1, C_2, \dots, C_m$ (np. lokalne laboratoria badawcze). Poszczególne stopnie identyfikacji mogą być realizowane przez oddzielne procesory również wtedy, gdy identyfikacja wielostopniowa dotyczy jednego rzeczywistego obiektu.

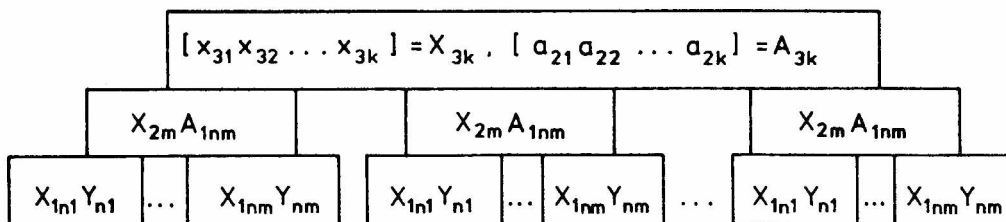


Rys. 1.10. Rozproszony komputerowy system identyfikacji
Fig. 1.10. Distributed computer identification system

Oprócz różnych modyfikacji rozproszonego systemu gromadzenia i przetwarzania [16,17] można również rozważyć strukturę scentralizowaną i rozpatrywać odpowiednie problemy wyboru struktury oraz transmisji danych i ewentualnie rozdziału zadań w strukturze zdecentralizowanej, jeśli zadania identyfikacji poszczególnych obiektów nie są stałe, lecz pojawiają się w pewnych momentach. Problemy te mogą tu mieć specyficzny charakter odpowiadający specyfice zadania, metodyki i algorytmów identyfikacji dwustopniowej.

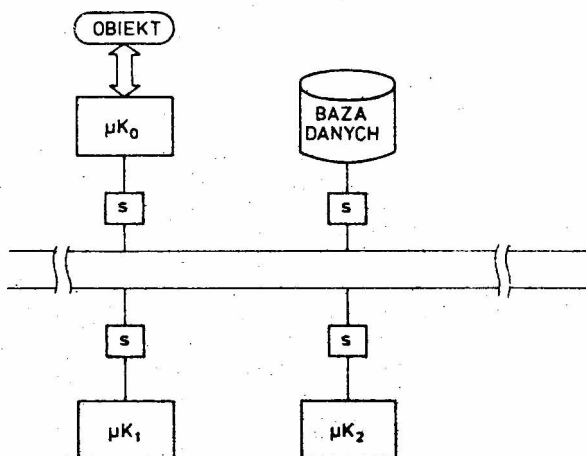
Specyficzna jest tu również problematyka zbiorów danych, które mają charakter ewolucyjny, tzn. dochodzą kolejne tabele dla kolejnych taktów identyfikacji 2. stopnia. Sekwencji tabel z danymi do identyfikacji na 1. stopniu odpowiada jedna tabela danych do identyfikacji na 2. stopniu, zawierająca wyniki identyfikacji na 1. stopniu. Organizacja danych komplikuje się w zadaniu identyfikacji wielostopniowej.

W zadaniu trójstopniowej identyfikacji (rys. 1.11) zestawowi segmentów wymienionych poprzednio dla dwóch stopni odpowiada tabela danych do 1-identyfikacji na 3. stopniu. Poszczególne segmenty dotyczą kolejnych taktów identyfikacji na 3. stopniu, których indeksy nie zostały zaznaczone na rysunku - k oznacza liczbę taktów. Problemy organizacji i kierowania dla takiej problemowo zorientowanej bazy danych zostały już wstępnie opracowane [9].



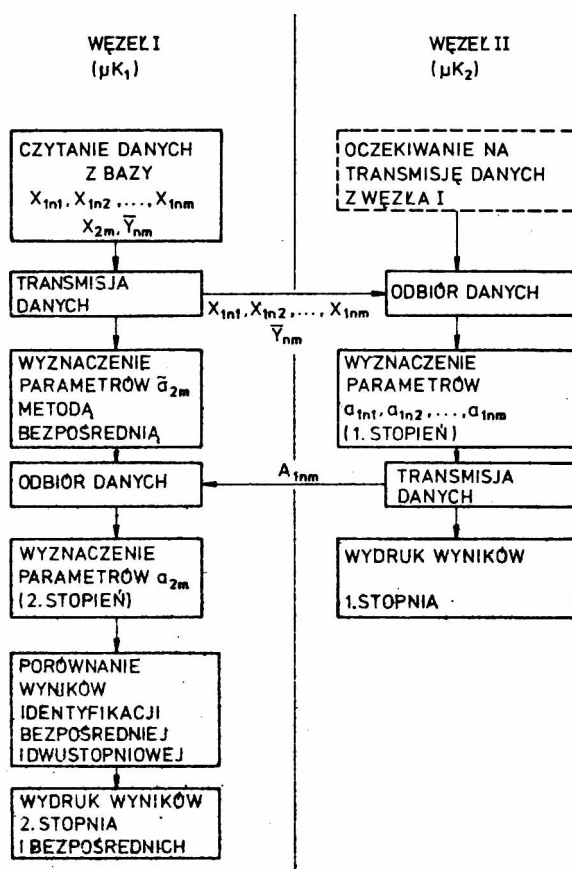
Rys. 1.11. Zbiór danych dla identyfikacji trójstopniowej
Fig. 1.11. Data file for three stage identification

Pewne koncepcje i algorytmy identyfikacji dwustopniowej zostały wykorzystane w systemach opracowanych i zrealizowanych w Instytucie Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej: w przetwarzaniu scentralizowanym w komputerowym systemie eksperymentowania EXPES [45] i komputerowym systemie populacyjnych badań medycznych BAMED [24] oraz w strukturze sieciowej w lokalnej sieci komputerowej NETEX [6,47]. Fragment sieci NETEX przedstawiono na rys. 1.12.



Rys. 1.12. Fragment lokalnej sieci komputerowej
Fig. 1.12. Part of the local area computer network

W przedstawionej tu wersji mikrokomputer μK_0 realizuje planowanie eksperymentu i steruje jego przebiegiem. Oba stopnie identyfikacji dotyczą jednego obiektu, natomiast algorytmy identyfikacji realizowane są w oddzielnych węzłach przez mikrokomputery μK_1 i μK_2 , s - oznacza sterowniki. Współpracę między obu węzłami i ich funkcje przedstawiono schematycznie na rys. 1.13. Dla rozpatrywanego przypadku opracowano odpowiednie oprogramowanie użytkowe, które wykorzystano w badaniach laboratoryjnych identyfikacji dwustopniowej i bezpośredniej, realizowanej w sieci NETEX.



Rys. 1.13. Schemat blokowy procedur i ich współpracy w sieci dla identyfikacji dwustopniowej i bezpośredniej
Fig. 1.13. Block diagram of procedures and their cooperation in a computer network for two-stage and direct identification

Wymienione powyżej problemy transmisji danych, zbiorów danych oraz struktur systemów informatycznych na potrzeby identyfikacji dwustopniowej nie będą dalej rozpatrywane. Celem powyższych fragmentarycznych uwag jest wskazanie, jak algorytmy identyfikacji dwustopniowej mogą być realizowane w odpowiednim systemie informatycznym i jakie stwarza to nowe problemy, oprócz podstawowego, którym jest algorytmizacja przetwarzania informacji.

2. ESTYMACJA DWUSTOPNIOWA PARAMETRÓW

Z dwóch podstawowych problemów identyfikacji przedstawionych w rozdz. 1, zajmiemy się obecnie pierwszym problemem identyfikacji dwustopniowej, czyli problemem estymacji dwustopniowej [66,68,63]. Po wprowadzeniu odpowiednich opisów i wyjaśnieniu zadań estymacji na obu stopniach i estymacji bezpośredniej - przedstawimy ogólne procedury otrzymywania algorytmów estymacji z zastosowaniem metody maksymalnej wiarygodności oraz metody minimalnego ryzyka. Następnie wyznaczmy algorytmy estymacji dla typowych przypadków, sformułujemy wystarczający warunek równoważności podejścia bezpośredniego i dwustopniowego oraz przedstawimy krótko analogiczne rozważania dla trzech przypadków systemu dynamicznego. Jak zauważymy, wyznaczania algorytmów na drugim stopniu nie można traktować wprost jako znanego zadania estymacji dla pojedynczego elementu, bowiem odpowiednie dane dla tego zadania trzeba dopiero wyznaczyć i zależą one zarówno od algorytmu estymacji, jak i wartości wejściowych na pierwszym stopniu. Stąd nawet w typowych przypadkach algorytmy estymacji mają bardziej skomplikowaną postać niż przy analogicznym zadaniu i metodzie dla pojedynczego elementu. Rozdział uzupełniają uwagi o możliwościach uogólnienia dla estymacji wielostopniowej.

2.1. Opisy matematyczne i sformułowanie problemu dla przypadku statycznego

Rozważmy system statyczny (rys. 2.1) opisany na pierwszym i drugim stopniu odpowiednio zależnościami

$$y = F_1(x_1, a_1), \quad (2.1)$$

$$a_1 = F_2(x_2, a_2), \quad (2.2)$$

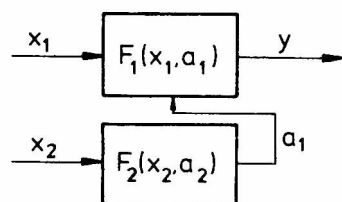
gdzie:

$x_1 \in \mathcal{R}_{s_1}^{s_1}$ - wektor wejściowy na 1. stopniu o s_1 składowych,
 $x_2 \in \mathcal{R}_{r_1}^{s_2}$ - wektor wejściowy na 2. stopniu o s_2 składowych,
 $a_1 \in \mathcal{R}^{r_1}$ - wektor parametrów na 1. stopniu o r_1 składowych,

$a_2 \in \mathcal{R}^{r_2}$ - wektor parametrów na 2. stopniu o r_2 składowych,
 $y \in \mathcal{R}^1$ - wektor wyjściowy na 1. stopniu o 1 składowych,

$$F_1: \mathcal{R}^{s_1} \times \mathcal{R}^{r_1} \rightarrow \mathcal{R}^1, \quad F_2: \mathcal{R}^{s_2} \times \mathcal{R}^{r_2} \rightarrow \mathcal{R}^{r_1}.$$

W dalszym ciągu wektory zapisywać będziemy w postaci macierzy jednokolumnowych. Zakładamy, że funkcje F_1, F_2 są znane, a zatem identyfikacja dwustopniowa sprowadza się do estymacji



Rys. 2.1. System statyczny o 2. stopniach
 Fig. 2.1. Static system with two stages

nieznanego parametru a_1 na podstawie wyników pomiarów (x_1, y) z zakłóceniami oraz estymacji a_2 na podstawie wyników pomiarów x_2 i wyników estymacji a_1 dla odpowiednich wartości x_2 . W dalszym ciągu, zgodnie z odpowiednią uwagą w p.1.2, będziemy zakładać, że wielkości x_1 i x_2 mierzone są bez zakłóceń lub ich dokładne wartości są podawane na wejścia w eksperymencie aktywnym. Wyjście dla 2. stopnia, tj. a_1 nie jest mierzone bezpośrednio, lecz jest wynikiem estymacji na 1. stopniu. Jeden "pomiar", czyli jeden takt (krok) identyfikacji na 2. stopniu wymaga zatem całego procesu estymacji, czyli określonej sekwencji

pomiarów na 1. stopniu, w czasie której x_2 jest stałe. Do oznaczenia wartości w poszczególnych momentach wprowadzmy następującą notację:

x_{2j}, a_{1j} - odpowiednio wartości x_2 i a_1 w j -tym takcie estymacji na 2. stopniu, $j = 1, 2, \dots, m$,

x_{1ij}, y_{ij} - odpowiednio wartości x_1 oraz y w i -tym momencie estymacji na 1. stopniu w takcie j , czyli dla stałej wartości x_{2j} , $i = 1, 2, \dots, n$, co oznacza, że jeden takt estymacji na 2. stopniu zawiera n momentów (taktów) estymacji na stopniu pierwszym,

$X_{1nj} = [x_{11j} \ x_{12j} \ \dots \ x_{1nj}]$ - sekwencja wejściowa na 1. stopniu w j -tym takcie estymacji na 2. stopniu, tj. dla x_{2j} (macierz $s_1 \times n$),

$$w_{ij} = h(y_{ij}, z_{ij}) \quad (2.3)$$

- wynik pomiaru wyjścia y_{ij} z zakłóceniem $z_{ij} \in \mathcal{R}^1$,

$h: \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$ jest znaną funkcją,

$W_{nj} = [w_{1j} \ w_{2j} \ \dots \ w_{nj}]$ - sekwencja pomiarów na 1. stopniu w j -tym takcie estymacji na 2. stopniu (macierz $1 \times n$),

$$\bar{X}_{1nm} = [X_{1n1} \ X_{1n2} \ \dots \ X_{1nm}],$$

$$\bar{W}_{nm} = [W_{n1} \ W_{n2} \ \dots \ W_{nm}],$$

$X_{2m} = [x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2m}]$ - sekwencja wejściowa dla estymacji na 2. stopniu (macierz $s_2 \times m$).

Dla poszczególnych momentów (taktów) opisy (2.1) i (2.2) przyjmują postać

$$y_{ij} = F_1(x_{1ij}, a_{1j}), \quad (2.4)$$

$$a_{1j} = F_2(x_{2j}, a_2). \quad (2.5)$$

Dla dalszych rozważań założymy, że z_{ij} jest realizacją (wartością) ciągłej zmiennej losowej z_{ij} , przy czym zmienne losowe z_{ij} są stochastycznie niezależne dla różnych momentów i mają tę samą gęstość prawdopodobieństwa $f_z(z)$. W j-tym takcie

$$a_{1nj} = \Psi_{1n}(X_{1nj}, W_{nj}), \quad (2.6)$$

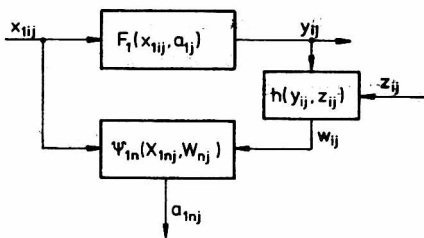
gdzie a_{1nj} jest estymacją nieznanego parametru a_{1j} , zaś Ψ_{1n} oznacza algorytm estymacji na 1. stopniu. Estymację na 1. stopniu ilustruje rys. 2.2. Dla 2. stopnia

$$a_{2m} = \Psi_{2m}(X_{2m}, A_{1nm}), \quad (2.7)$$

gdzie a_{2m} jest estymatą nieznanego parametru a_2 , Ψ_{2m} oznacza algorytm estymacji na 2. stopniu, zaś $A_{1nm} = [a_{1n1} \ a_{1n2} \ \dots \ a_{1nm}]$ - jest sekwencją wyników estymacji na 1. stopniu dla $j = 1, 2, \dots, m$ (macierz $r_1 \times m$). Estymata a_{1nj} może być traktowana jak wynik pomiaru wyjścia w j-tym takcie estymacji na 2. stopniu, z błędem estymacji (zakłóceniem)

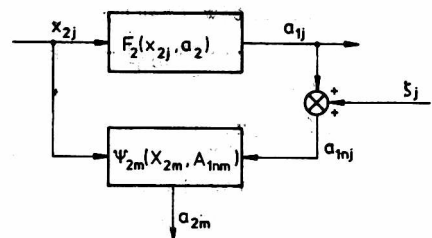
$$\zeta_j = a_{1nj} - a_{1j}$$

analogicznym do zakłócenia z_{ij} na 1. stopniu. Estymację na 2. stopniu ilustruje rys. 2.3.



Rys. 2.2. Estymacja parametrów na 1. stopniu

Fig. 2.2. Parameter estimation at the 1-st stage



Rys. 2.3. Estymacja parametrów na 2. stopniu

Fig. 2.3. Parameter estimation at the 2-nd stage

Parametr a_2 może być również estymowany bezpośrednio po przyjęciu opisu:

$$y = F_1[x_1, F_2(x_2, a_2)] \triangleq F(x_1, x_2, a_2), \quad (2.8)$$

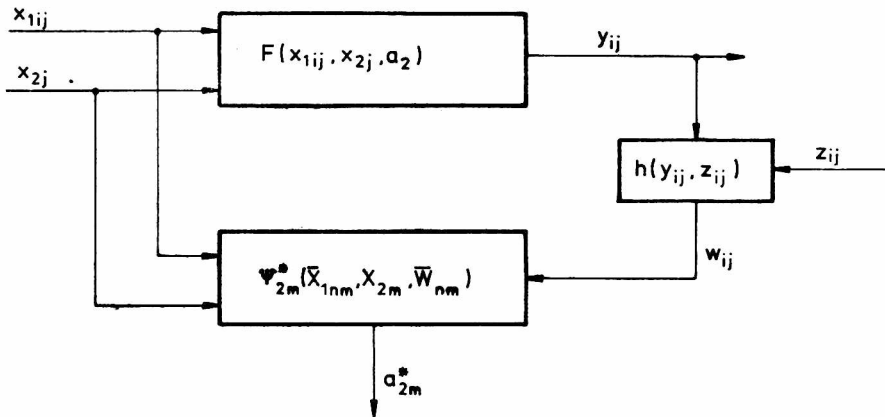
czyli

$$y_{ij} = F(x_{1ij}, x_{2j}, a_2) \quad (2.9)$$

z wykorzystaniem wyników pomiarów x_1 , x_2 , y . Oznaczmy wynik przez

$$a_{2m}^* = \Psi_{2m}^*(\bar{X}_{1nm}, X_{2m}, \bar{W}_{nm}), \quad (2.10)$$

gdzie Ψ_{2m}^* jest algorytmem estymacji bezpośredniej (rys. 2.4).



Rys. 2.4. Bezpośrednia estymacja parametrów
Fig. 2.4. Direct parameter estimation

Podstawowym problemem estymacji dwustopniowej jest zbadanie możliwości stosowania znanych metod estymacji do wyznaczania algorytmów estymacji na obu stopniach (2.6) i (2.7). W dalszych punktach przedstawimy metodykę postępowania z zastosowaniem dwóch podstawowych metod estymacji stosowanych w identyfikacji, tj. metody maksymalnej wiarygodności oraz podejścia bayesowskiego. Dla typowych przypadków podane zostaną algorytmy estymacji.

Istotne jest również porównanie wyniku estymacji bezpośredniej z wynikiem estymacji dwustopniowej, którą można traktować jako zastosowanie pewnego rodzaju dekompozycji, czyli porównanie wartości a_{2m} (2.7) i a_{2m}^* (2.10) z wykorzystaniem tej samej metody estymacji. Algorytm Ψ_{2m}^* należy porównać z kompozycją algorytmów (2.6) i (2.7). Wprowadzając oznaczenie

$$A_{1nm} = [\Psi_{1n}(X_{1n1}, W_{n1}) \dots \Psi_{1n}(X_{1nm}, W_{nm})] \triangleq \bar{\Psi}_{1n}(\bar{X}_{1nm}, \bar{W}_{nm}) \quad (2.11)$$

i wstawiając (2.11) do (2.7), otrzymujemy

$$a_{2m} = \Psi_{2m}[X_{2m}, \bar{\Psi}_{1n}(\bar{X}_{1nm}, \bar{W}_{nm})] \cong \bar{\Psi}_{2m}(\bar{X}_{1nm}, X_{2m}, \bar{W}_{nm}). \quad (2.12)$$

Podejścia bezpośrednie i dwustopniowe są równoważne, jeśli algorytmy (2.10) i (2.12) są identyczne, tzn. dla tych samych wyników pomiarów otrzymujemy identyczne wartości a_{2m}^* i a_{2m} .

2.2. Zastosowanie metody maksymalnej wiarygodności

2.2.1. Ogólna metodyka postępowania

W wyniku zastosowania metody maksymalnej wiarygodności (MM) należy na obu stopniach wyznaczyć i maksymalizować funkcje wiarygodności. Postępowanie na pierwszym stopniu sprowadza się do znanej metody estymacji dla pojedynczego elementu statycznego [10]. Zadanie dla drugiego stopnia jest nieco bardziej skomplikowane, wymaga bowiem wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa nie bezpośrednio wyniku obserwacji, lecz wyniku estymacji na 1. stopniu dla kolejnych taktów na 2. stopniu. Procedura wyznaczania algorytmów estymacji jest zatem następująca:

1. Dla 1. stopnia wyznaczamy łączną gęstość prawdopodobieństwa dla $\underline{W}_{nj}^{(*)}$

$$f_{wm}(W_{nj}; a_{1j}, X_{1nj}) = \prod_{i=1}^n f_w(w_{ij}; a_{1j}, x_{1ij}), \quad (2.13)$$

gdzie

$$f_w(w_{ij}; a_{1j}, x_{1ij}) = f_z[h^{-1}(w_{ij}, F_1(x_{1ij}, a_{1j}))] |J|, \quad (2.14)$$

h^{-1} jest funkcją odwrotną do (2.3) względem z_{ij} , $|J|$ jest jacobianem funkcji h^{-1} z argumentem w_{ij} - przy założeniu, że przekształcenie h jest ciągle i wzajemnie jednoznaczne.

2. Maksymalizujemy (2.13) względem a_{1j} i otrzymujemy algorytm estymacji (2.6), gdzie a_{1nj} oznacza wynik maksymalizacji.

3. Na podstawie zależności (2.6) oraz (2.3) po podstawieniu (2.5) wyznaczamy gęstość prawdopodobieństwa $f_{a1}(a_{1nj}; a_2, X_{1nj}, x_{2j})$ dla zmiennej losowej a_{1nj} . Gęstość ta może być również wyznaczona z zależności (2.6) po podstawieniu (2.3) i (2.9) oraz skorzystaniu ze znajomości $f_z(z)$.

4. Dla 2. stopnia wyznaczamy łączną gęstość prawdopodobieństwa dla $\underline{A}_{1nm}$

$$f_{a1,m}(A_{1nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m}) = \prod_{j=1}^m f_{a1}(a_{1nj}; a_2, X_{1nj}, x_{2j}), \quad (2.15)$$

$^{(*)}$ $\underline{W}_{nj}$ jest realizacją zmiennej losowej $\underline{W}_{nj}$; podobnie dalej $\underline{A}_{1nm}$ jest realizacją zmiennej losowej $\underline{A}_{1nm}$.

bowiem ze stochastycznej niezależności z_{ij} dla różnych momentów wynika stochastyczna niezależność a_{1nj} dla różnych j . Funkcja (2.15) z argumentem a_2 jest funkcją wiarygodności dla 2. stopnia.

5. Maksymalizujemy (2.15) względem a_2 i otrzymujemy algorytm estymacji (2.7), gdzie a_{2m} oznacza wynik maksymalizacji. Przy podejściu bezpośrednim wstawiamy (2.5) do f_{wm} (2.13) i wyznaczamy łączną gęstość prawdopodobieństwa dla $\bar{w}_{nm}$

$$\bar{f}_{w,m}(\bar{w}_{nm}; a_2, \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n f_w(w_{ij}; F_2(x_{2j}, a_2), x_{1ij}). \quad (2.16)$$

Funkcja (2.16) z argumentem a_2 jest występującą w naszym zadaniu funkcją wiarygodności. W wyniku maksymalizacji tej funkcji względem a_2 otrzymujemy algorytm estymacji bezpośredniej (2.10), gdzie a_{2m}^* oznacza wynik maksymalizacji.

2.2.2. Typowe przypadki - przykłady

Rozpatrzmy w charakterze przykładów typowe przypadki, dla których można analitycznie wyznaczyć algorytmy estymacji, a mianowicie z liniowymi zależnościami na obu stopniach, co daje opis bezpośredni (2.8) o postaci multiplikatywnej - dla dwóch różnych rozkładów prawdopodobieństwa zakłócenia i dwóch różnych postaci funkcji h (2.3).

A. Niech $s_1 = 1 = r_1 = 1$, $s_2 = r_2$, zależności (2.4), (2.5) i (2.3) przyjmują odpowiednio postaci

$$y_{ij} = a_{1j} x_{1ij}, \quad a_{1j} = a_2^T x_{2j}, \quad (2.17)$$

$$w_{ij} = y_{ij} + z_{ij},$$

gdzie T oznacza transpozycję macierzy jednokolumnowej.

Ostatecznie zależność (2.9) przyjmuje postać:

$$y_{ij} = (a_2^T x_{2j}) x_{1ij}, \quad (2.18)$$

a zatem

$$w_{ij} = (a_2^T x_{2j}) x_{1ij} + z_{ij}. \quad (2.19)$$

Niech zakłócenie ma rozkład normalny

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2\sigma_z^2}\right).$$

Łatwo w tym przypadku otrzymać znany wynik dla pierwszego stopnia

$$a_{1nj} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1ij} w_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2} = \frac{x_{1nj} w_{nj}^T}{x_{1nj} x_{1nj}^T}. \quad (2.20)$$

Po wstawieniu (2.19) do (2.20) otrzymujemy

$$a_{1nj} = (a_2^T x_{2j}) + \frac{\sum_{i=1}^n x_{1ij} z_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2}. \quad (2.21)$$

Zmienna losowa a_{1nj} ma zatem również rozkład normalny z wartością oczekiwaną

$$E(a_{1nj}) = a_2^T x_{2j}$$

i wariancją

$$\text{Var}(a_{1nj}) = \frac{\sigma_z^2 \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right)^2} = \frac{\sigma_z^2}{\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2} \triangleq \sigma_j^2.$$

Gęstość prawdopodobieństwa (2.15) jest następująca:

$$f_{a_1, m}(A_{1nm}; a_2, \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) = \frac{1}{(\sigma_j \sqrt{2\pi})^m} \times \\ \times \exp \left[- \frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{j=1}^m (a_{1nj} - a_2^T x_{2j})^2 \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right].$$

Maksymalizacja powyższej funkcji wiarygodności względem a_2 sprowadza się do minimalizacji względem a_2 funkcji

$$\sum_{j=1}^m (a_{1nj} - a_2^T x_{2j})^2 \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2.$$

W wyniku tej minimalizacji otrzymujemy algorytm estymacji na 2. stopniu

$$a_{2m} = \left[\sum_{j=1}^m x_{2j} x_{2j}^T \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right]^{-1} \sum_{j=1}^m a_{1nj} x_{2j} \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2, \quad (2.22)$$

czyli

$$a_{2m} = (X_{2m} D_m X_{2m}^T)^{-1} X_{2m} D_m A_{1nm}^T,$$

gdzie D_m jest macierzą diagonalną i

$$\text{diag } D_m = [X_{1n1} X_{1n1}^T, X_{1n2} X_{1n2}^T, \dots, X_{1nm} X_{1nm}^T].$$

Macierz D_m występuje jako parametr algorytmu (2.7), bowiem wariancja σ_j^2 w odróżnieniu od stałej wariancji σ_z^2 na 1. stopniu zależy od j , a dokładniej od X_{1nj} .

Łatwo zauważyć, że metoda maksymalnej wiarygodności dla estymacji bezpośredniej redukuje się do metody najmniejszych kwadratów (podobnie jak dla 1. stopnia) i algorytm estymacji bezpośredniej jest następujący [10]:

$$a_{2m}^* = \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{2j} x_{2j}^T x_{1ij}^2 \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{2j} x_{1ij} w_{ij}, \quad (2.23)$$

czyli

$$a_{2m}^* = (X_{2m} D_m X_{2m}^T)^{-1} X_{2m} B_m,$$

gdzie B_m jest macierzą jednokolumnową:

$$B_m^T = [X_{1n1} w_{n1}^T, X_{1n2} w_{n2}^T, \dots, X_{1nm} w_{nm}^T].$$

Po podstawieniu (2.20) do (2.22) otrzymujemy $a_{2m} = a_{2m}^*$, a zatem w rozpatrywanym przypadku dwustopniowa i bezpośrednia estymacja a_2 dają ten sam wynik.

Rozważania można uogólnić dla wielu wejść na 1. stopniu ($s_1 = r_1 > 1$). Wówczas w miejsce (2.17) mamy

$$y_{ij} = a_{1j}^T x_{1ij}, \quad a_{1j} = A_2 x_{2j},$$

gdzie A_2 jest macierzą nieznanych parametrów na 2. stopniu.

Algorytmy estymacji są wówczas znacznie bardziej skomplikowane i nie będą tu przedstawiane. Zauważymy jedynie, że dla przypadku $s_2 = 1$ (jedno wejście na 2. stopniu), czyli $a_{1j} = a_2 x_{2j}$, łatwo uzyskać odpowiednie algorytmy, podobnie jak dla przypadku poprzednio rozpatrywanego:

$$a_{1nj} = (X_{1nj} X_{1nj}^T)^{-1} X_{1nj} w_{1nj}^T,$$

$$a_{2m} = \left[\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 X_{1nj} X_{1nj}^T \right]^{-1} \sum_{j=1}^m x_{2j} X_{1nj} X_{1nj}^T a_{1nj}$$

$$a_{2m}^* = \left[\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 x_{1nj} x_{1nj}^T \right]^{-1} \sum_{j=1}^m x_{2j} x_{1nj} w_{nj}^T.$$

Obecnie a_1 i a_2 są wektorami o r_1 składowych.

B. Rozpatrzmy ponownie przypadek A dla jednowymiarowej zależności na drugim stopniu, tzn. $a_2 = r_2 = 1$, czyli

$$a_{1j} = a_2 x_{2j}, \quad y_{ij} = a_2 x_{2j} x_{1ij}$$

i założmy zakłócenie multiplikatywne

$$w_{ij} = y_{ij} z_{ij}$$

z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa na odcinku $[\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha > 0$:

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{dla } z \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{dla pozostałych } z \end{cases}$$

Obecnie

$$f_w\left(\frac{w_{ij}}{x_{1ij}}; a_{1j}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha) a_{1j}} & \text{dla } \frac{w_{ij}}{x_{1ij}} \in [\alpha a_{1j}, \beta a_{1j}] \\ 0 & \text{dla pozostałych } \frac{w_{ij}}{x_{1ij}} \end{cases}, \quad (2.24)$$

czyli

$$f_w(w_{ij}; a_{1j}, x_{1ij}) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha) a_{1j} x_{1ij}} & \text{dla } w_{ij} \in [\alpha a_{1j} x_{1ij}, \beta a_{1j} x_{1ij}] \\ 0 & \text{dla pozostałych } w_{ij} \end{cases}.$$

Łączna gęstość prawdopodobieństwa (2.13) jest zatem następującą funkcją a_{1j}

$$f_{wn}(W_{nj}; a_{1j}, x_{1nj}) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha) n a_{1j} \prod_{i=1}^n x_{1ij}} & \text{dla } a_{1j} \in \left[\frac{1}{\beta} \max_i \frac{w_{ij}}{x_{1ij}}, \frac{1}{\alpha} \min_i \frac{w_{ij}}{x_{1ij}} \right] \\ 0 & \text{dla pozostałych } a_{1j} \end{cases} \quad (2.25)$$

Ponieważ jest to malejąca funkcja a_{1j} w przedziale

$$\left[\frac{1}{\beta} \max_i \frac{w_{ij}}{x_{1ij}}, \frac{1}{\alpha} \min_i \frac{w_{ij}}{x_{1ij}} \right],$$

zatem maksymalizacja tej funkcji względem a_{1j} daje następujący algorytm estymacji na 1. stopniu

$$a_{1nj} = \frac{1}{\beta} \max_i \frac{w_{ij}}{x_{1ij}}, \text{ gdzie } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.26)$$

Na podstawie znanego sposobu wyznaczania rozkładu zmiennej losowej o postaci (2.26) [27,40] oraz z (2.24) po podstawieniu $a_{1j} = a_2 x_{2j}$ otrzymujemy gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej a_{1nj}

$$f_{a1}(a_{1nj}; a_2, x_{1nj}, x_{2j}) = \begin{cases} \frac{\beta^n n (a_{1nj} - \frac{\alpha}{\beta} a_2 x_{2j})^{n-1}}{(\beta - \alpha)^n a_2^n x_{2j}^n} & \text{dla } a_{1nj} \in \left[\frac{\alpha}{\beta} a_2 x_{2j}, a_2 x_{2j} \right] \\ 0 & \text{dla pozostałych } a_{1nj} \end{cases}.$$

Ostatecznie łączna gęstość prawdopodobieństwa (2.15) jest następującą funkcją a_2

$$f_{a1,m}(A_{1nm}; a_2, \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) = \begin{cases} \frac{(\beta^n n)^m \prod_{j=1}^m (a_{1nj} - \frac{\alpha}{\beta} a_2 x_{2j})^{n-1}}{(\beta - \alpha)^{nm} a_2^{nm} \left(\prod_{j=1}^m x_{2j} \right)^n} & \text{dla } a_2 \in \left[\max_j \frac{a_{1nj}}{x_{2j}}, \frac{\beta}{\alpha} \min_j \frac{a_{1nj}}{x_{2j}} \right] \\ 0 & \text{dla pozostałych } a_2 \end{cases}.$$

Jest to malejąca funkcja a_2 w przedziale

$$\left[\max_j \frac{a_{1nj}}{x_{2j}}, \frac{\beta}{\alpha} \min_j \frac{a_{1nj}}{x_{2j}} \right].$$

W wyniku jej maksymalizacji względem a_2 dostajemy zatem następujący algorytm estymacji na 2. stopniu

$$a_{2m} = \max_j \frac{a_{1nj}}{x_{2j}}, \text{ gdzie } j \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (2.27)$$

Dla bezpośredniej estymacji parametru a_2 wyznaczamy łączną gęstość prawdopodobieństwa (2.16) jako funkcję a_2 , na podstawie (2.25)

$$\bar{f}_{w,m}(\bar{w}_{nm}; a_2, \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha)^{nm} a_2^{nm} \prod_{j=1}^m x_{2j} \prod_{i=1}^n x_{1ij}} & \text{dla } a_2 \in \left[\frac{1}{\beta} \max_{i,j} \frac{w_{ij}}{x_{1ij} x_{2j}}, \frac{1}{\alpha} \min_{i,j} \frac{w_{ij}}{x_{1ij} x_{2j}} \right] \\ 0 & \text{dla pozostałych } a_2 \end{cases}$$

W wyniku maksymalizacji względem a_2 otrzymujemy algorytm estymacji bezpośredniej

$$a_{2m}^* = \frac{1}{\beta} \max_{i,j} \frac{w_{ij}}{x_{1ij} x_{2j}}.$$

Po wstawieniu (2.26) do (2.27) łatwo zauważyć, że $a_{2m} = a_{2m}^*$, a zatem również w tym przypadku estymacja dwustopniowa i bezpośrednia dają ten sam wynik.

2.2.3. Porównanie estymacji dwustopniowej i bezpośredniej

Obecnie sformułujemy ogólny warunek wystarczający dla równoważności dwustopniowej i bezpośredniej estymacji parametru a_2 z zastosowaniem metody maksymalnej wiarygodności (MM):

Twierdzenie 2.1. Jeśli na 1. stopniu (2.6) jest dostatecznym estymatorem parametru a_1^* oraz estymator (2.7) na 2. stopniu i estymator bezpośredni (2.10) zostały wyznaczone metodą MM, to estymacja dwustopniowa i bezpośrednia są równoważne.

DOWÓD. Wprowadźmy funkcję

$$b_{nj} \triangleq \phi_n(W_{nj}), \quad b_{nj} \in \mathcal{R}^{1 \times n-r_1}$$

taką, że dla funkcji

$$\bar{\phi}_n(W_{nj}, X_{1nj}) \triangleq (a_{1nj}, b_{nj}) = [\psi_{1n}(X_{1nj}, X_{nj}), \phi_n(W_{nj})]$$

istnieje funkcja odwrotna względem W_{nj} :

$$W_{nj} = \bar{\phi}_n^{-1}[(a_{1nj}, b_{nj}), X_{1nj}].$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$B_{nm} = [b_{n1} \ b_{n2} \ \dots \ b_{nm}] = [\phi_n(W_{n1}) \ \phi_n(W_{n2}) \ \dots \ \phi_n(W_{nm})] \triangleq \phi(\bar{W}_{nm}).$$

Zgodnie z (2.11)

$$(A_{1nm}, B_{1nm}) = [\bar{\psi}_{1n}(\bar{X}_{1nm}, \bar{W}_{nm}), \bar{\phi}(\bar{W}_{nm})] \triangleq H(\bar{W}_{nm}, \bar{X}_{1nm}). \quad (2.28)$$

Gęstość prawdopodobieństwa (2.15) można przedstawić następująco:

$$f_{a_1, m}(A_{1nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m}) = \frac{f(A_{1nm}, B_{nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m})}{f_{b, m}(B_{nm} | A_{1nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m})}, \quad (2.29)$$

*) Dla ścisłości należy zauważyć, że estymatorem jest funkcja $a_{1nj} = \psi_{1n}(X_{1nj}, W_{nj})$. W dalszym ciągu nie będziemy stosować takiego rozróżnienia.

gdzie w liczniku jest łączna gęstość prawdopodobieństwa, natomiast w mianowniku gęstość warunkowa

$$f_{b,m}(B_{nm}|A_{1nm};a_2,\bar{X}_{1nm},X_{2m}) = \prod_{j=1}^m f_b(b_{nj}|a_{1nj};a_{1j},X_{1nj}) \quad (2.30)$$

po wstawieniu $a_{1j} = F_2(a_2, x_{2j})$. Ponieważ a_{1nj} określone przez (2.6) jest estymatorem dostatecznym parametru a_{1j} [27,40] zatem gęstość warunkowa $f_b(b_{nj}|a_{1nj})$ nie zależy od a_{1j} . Tak więc dla danego X_{2m} warunkowa gęstość prawdopodobieństwa (2.30) nie zależy od a_2 . A zatem a_{2m} w metodzie MM, tj. wartość a_2 maksymalizującą (2.29), otrzymujemy przez maksymalizację względem a_2 licznika (2.29).

Zgodnie z (2.28), gęstość (2.16) przyjmuje postać

$$\bar{f}_{w,m}(\bar{W}_{nm};a_2,\bar{X}_{1nm},X_{2m}) = f[H(\bar{W}_{nm},\bar{X}_{1nm});a_2,\bar{X}_{1nm},X_{2m}]|J|, \quad (2.31)$$

przy czym odpowiedni jakobian $|J|$ nie zależy od a_2 . Stąd a_{2m}^* według metody MM, tj. wartość a_2 maksymalizująca (2.31) jest równa a_{2m} dla tych samych wartości $\bar{X}_{1nm}$, X_{2m} , $\bar{W}_{nm}$, czyli algorytmy ψ_{2m}^* (2.10) i $\bar{\psi}_{2m}$ (2.12) są identyczne

Q. E. D.

W przypadkach rozpatrywanych w p. 2.2.2 estymatory na 1. stopniu były dostateczne. W pracy [66] podano przykład, w którym estymacja dwustopniowa i bezpośrednia były równoważne, choć estymator na 1. stopniu nie był dostateczny. Nie jest to zatem warunek konieczny równoważności. Z drugiej strony, mimo licznych prób autorowi nie udało się znaleźć przykładu, dla którego $a_{2m} \neq a_{2m}^*$. Istnienie takich przypadków pozostaje zatem sprawą otwartą.

2.3. Zastosowanie metody maksymalnego prawdopodobieństwa

2.3.1. Ogólna metodyka postępowania

Zacznijmy od bardziej ogólnej metody minimalnego ryzyka [10], tj. ogólnego podejścia bayesowskiego. Metoda maksymalnej gęstości prawdopodobieństwa a posteriori - zwana dalej w skrócie metodą maksymalnego prawdopodobieństwa (MP) - jest szczególnym, najczęściej występującym przypadkiem podejścia ogólnego i dla tej metody rozpatrzmy dalej typowy przypadek naszego problemu oraz kwestię równoważności.

Obecnie założymy, że a_2 jest realizacją ciągłej zmiennej losowej a_2 o znanej gęstości prawdopodobieństwa $f_2(a_2)$. Zgodnie z (2.5) również a_{1j} jest realizacją odpowiedniej zmiennej losowej a_{1j} i znając $f_2(a_2)$ oraz funkcję F_2 w (2.5) można wyznaczyć jej gęstość prawdopodobieństwa $f_1(a_{1j};x_{2j})$. Gdy stosujemy metodę minimalnego ryzyka, należy

na obu stopniach minimalizować ryzyko średnie dla określonej funkcji strat, co jak wiadomo, można sprowadzić do minimalizacji odpowiedniego ryzyka warunkowego. Postępowanie na 1. stopniu sprowadza się do znanej metody estymacji bayesowskiej dla pojedynczego elementu statycznego [10]. Zadanie na 2. stopniu, podobnie jak w metodzie MM jest bardziej skomplikowane, wymaga bowiem wyznaczenia odpowiedniego warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa. Procedura wyznaczania algorytmów estymacji jest zatem następująca:

1. Dla danej gęstości $f_2(a_2)$ wyznaczamy na podstawie (2.5) gęstość $f_1(a_{1j}; x_{2j})$.

2. Wyznaczamy gęstość (2.13) jak w metodzie MM. Jest to obecnie gęstość warunkowa, tzn.

$$f_{wn}(w_{nj}; a_{1j}, x_{1nj}) = f_{wn}(w_{nj} | a_{1j}; x_{1nj}). \quad (2.32)$$

3. Dla 1. stopnia, przy danej funkcji strat $L_1(a_{1j}, \bar{a}_{1j})$, minimalizujemy względem $\bar{a}_{1j}$ ryzyko warunkowe

$$r_1(\bar{a}_{1j}, w_{nj}) = E_{\bar{a}_{1j}} [L_1(a_{1j}, \bar{a}_{1j}) | w_{nj}],$$

co sprowadza się do minimalizacji

$$\bar{r}_1(\bar{a}_{1j}, w_{nj}) \triangleq \int_{\mathcal{R}_1} L_1(a_{1j}, \bar{a}_{1j}) f_1(a_{1j}; x_{2j}) f_{wn}(w_{nj} | a_{1j}; x_{1nj}) da_{1j}. \quad (2.33)$$

W wyniku otrzymujemy algorytm estymacji (2.6), gdzie a_{1nj} oznacza wynik minimalizacji (2.33) względem $\bar{a}_{1j}$. Warto zauważyć, że x_{2j} wystąpi tu jako parametr algorytmu (2.6).

4. Dla 2. stopnia wyznaczamy gęstość (2.15) jak w metodzie MM. Jest to obecnie gęstość warunkowa, tzn.

$$f_{a1,m}(A_{1nm}; a_2, \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) = f_{a1,m}(A_{1nm} | a_2; \bar{x}_{1nm}, x_{2m}). \quad (2.34)$$

5. Dla danej funkcji strat $L_2(a_2, \bar{a}_2)$ minimalizujemy względem $\bar{a}_2$ ryzyko warunkowe

$$\bar{r}_2(\bar{a}_2, A_{1nm}) = E_{\bar{a}_2} [L_2(a_2, \bar{a}_2) | A_{1nm}],$$

co sprowadza się do minimalizacji

$$\bar{r}_2(\bar{a}_2, A_{1nm}) \triangleq \int_{\mathcal{R}_2} L_2(a_2, \bar{a}_2) f_2(a_2) f_{a1,m}(A_{1nm} | a_2; \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) da_2, \quad (2.35)$$

stąd otrzymujemy algorytm estymacji (2.7), gdzie a_{2m} oznacza wartość a_2 minimalizującą (2.35).

Przy podejściu bezpośrednim wyznaczamy gęstość (2.16) jak w metodzie MM. Jest to obecnie gęstość warunkowa $\bar{w}_{nm}$ względem $\bar{a}_2$. Następnie minimalizujemy względem $\bar{a}_2$ ryzyko warunkowe

$$r(\bar{a}_2, \bar{w}_{nm}) = E_{\bar{a}_2} [L_2(a_2, \bar{a}_2) | \bar{w}_{nm}],$$

co sprowadza się do minimalizacji

$$\bar{r}(\bar{a}_2, \bar{w}_{nm}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^2} L_2(a_2, \bar{a}_2) f_2(a_2) \bar{f}_{w,m}(\bar{w}_{nm} | a_2; \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) da_2. \quad (2.36)$$

W wyniku otrzymujemy algorytm estymacji (2.10), gdzie a_{2m}^* oznacza wartość $\bar{a}_2$ minimalizującą (2.36).

Jak wiadomo, przy odpowiednim doborze funkcji strat, minimalizacja ryzyka sprowadza się do maksymalizacji gęstości prawdopodobieństwa a posteriori dla nieznanego parametru estymowanego (metoda MP). Po pominięciu mianowników niezależnych od zmiennych maksymalizujących - a_{1nj} jest wartością a_{1j} maksymalizującą iloczyn gęstości w (2.33), tj.

$$f_1(a_{1j}; x_{2j}) f_{wn}(w_{nj} | a_{1j}; \bar{x}_{1nj}). \quad (2.37)$$

Podobnie a_{2m} i a_{2m}^* otrzymamy w wyniku maksymalizacji względem a_2 odpowiednio

$$f_2(a_2) f_{a1,m}(A_{1nm} | a_2; \bar{x}_{1nm}, x_{2m}) \quad (2.38)$$

oraz

$$f_2(a_2) \bar{f}_{w,m}(\bar{w}_{nm} | a_2; \bar{x}_{1nm}, x_{2m}). \quad (2.39)$$

2.3.2. Rezultaty w typowym przypadku

Rozpatrzmy w charakterze przykładu typowy przypadek, dla którego można analitycznie wyznaczyć algorytm estymacji metodą MP, a mianowicie z liniowymi zależnościami i z normalnymi rozkładami prawdopodobieństwa.

Zależności (2.4), (2.5), (2.9) oraz funkcja h są takie same jak w przypadku A w punkcie 2.2.2, tzn. mają postać (2.17), (2.18), (2.19) i zakłócenie ma identyczny jak poprzednio rozkład normalny. Założmy rozkład normalny wektora $\underline{a}_2$, tj.

$$f_2(a_2) = \frac{1}{(2\pi)^{r_2/2} \sqrt{|M|}} \exp \left[- \frac{(\underline{a}_2 - \tilde{\underline{a}}_2)^T M^{-1} (\underline{a}_2 - \tilde{\underline{a}}_2)}{2} \right],$$

gdzie $\tilde{\underline{a}}_2$ i M oznaczają odpowiednio wektor wartości oczekiwanych i macierz kowariancji $\underline{a}_2$. Zmienna $\underline{a}_{1j}$ ma zatem rozkład normalny z wartością oczekiwaną i wariancją odpowiednio

$$E(\underline{a}_{1j}) = \tilde{\underline{a}}_2^T x_{2j}; \quad \text{Var}(\underline{a}_{1j}) = x_{2j}^T M x_{2j}. \quad (2.40)$$

W rezultacie maksymalizacji (2.37) otrzymujemy dobrze znany [10] wynik dla 1. stopnia

$$a_{1nj} = \frac{\tilde{a}_2^T x_{2j} + \frac{x_{2j}^T M x_{2j}}{\sigma_z^2} x_{1nj} w_{nj}^T}{1 + \frac{x_{2j}^T M x_{2j}}{\sigma_z^2} x_{1nj} x_{1nj}^T} \quad (2.41)$$

W odróżnieniu od estymacji pojedynczego elementu, wartość oczekiwana i wariancja estymowanego parametru a_{1j} nie są tu dane wprost, lecz muszą być wyznaczone dla danego x_{2j} według (2.40). Na podstawie (2.19) i (2.41) łatwo zauważyć, że rozkład warunkowy a_{1nj} względem a_2 jest normalny z warunkową wartością oczekiwaną i warunkową wariancją odpowiednio

$$E(a_{1nj}|a_2) = \frac{\sigma_z^2 \tilde{a}_2^T x_{2j} + x_{2j}^T M x_{2j} x_{1nj} x_{1nj}^T \tilde{a}_2^T x_{2j}}{\sigma_z^2 + x_{2j}^T M x_{2j} x_{1nj} x_{1nj}^T},$$

$$\text{Var}(a_{1nj}|a_2) = \frac{(x_{2j}^T M x_{2j})^2 x_{1nj} x_{1nj}^T}{(\sigma_z^2 + x_{2j}^T M x_{2j})^2}.$$

Maksymalizacja (2.38) sprowadza się zatem do maksymalizacji

$$\exp \left[-(a_2 - \tilde{a}_2)^T M^{-1} (a_2 - \tilde{a}_2) - \sum_{j=1}^m \frac{[a_{1nj} - E(a_{1nj}|a_2)]^2}{\text{Var}(a_{1nj}|a_2)} \right].$$

Przyrównując gradient tej funkcji względem a_2 do wektora zerowego otrzymamy po przekształceniach następujący algorytm estymacji na 2. stopniu

$$a_{2m} = \left[I + \frac{1}{\sigma_z^2} M \sum_{j=1}^m x_{1nj} x_{1nj}^T x_{2j} x_{2j}^T \right]^{-1} \left[\left(I - M \sum_{j=1}^m \frac{x_{1nj} x_{1nj}^T x_{2j} x_{2j}^T}{x_{2j}^T M x_{2j}} \right) \tilde{a}_2 + \frac{1}{\sigma_z^2} M \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sigma_z^2}{x_{2j}^T M x_{2j}} + x_{1nj} x_{1nj}^T \right) a_{1nj} x_{2j} \right], \quad (2.42)$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Maksymalizacja (2.39) prowadzi do znanego wyniku zastosowania metody MP dla elementu liniowego (2.18) o wejściu x_{2j}, x_{1ij} , podobnie jak na 1. stopniu. Algorytm estymacji bezpośrednio jest następujący

$$a_{2m}^* = \left[I + \frac{1}{\sigma_z^2} M \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{2j} x_{2j}^T x_{1ij}^2 \right]^{-1} \left[\tilde{a}_2 + \frac{1}{\sigma_z^2} M \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{2j} x_{1ij} w_{ij} \right], \quad (2.43)$$

co również można zapisać bez sumowania w postaci macierzowej, podobnie jak w p. 2.2.2 dla metody MM. Po wstawieniu (2.41) do (2.42) i po przekształceniach można sprawdzić, że $a_{2m} = a_{2m}^*$, a zatem w rozpatrywanym przypadku dwustopniowa i bezpośrednia estymacja a_2 są równoważne.

2.3.3. Porównanie estymacji dwustopniowej i bezpośredniej

Ogólny warunek wystarczający dla równoważności estymacji dwustopniowej i bezpośredniej a_2 jest tu identyczny z warunkiem dla metody MM (twierdzenie 2.1).

Twierdzenie 2.2. Jeśli na 1. stopniu (2.6) jest dostatecznym estymatorem parametru a_1 oraz estymator (2.7) na 2. stopniu i estymator bezpośredni (2.10) zostały wyznaczone metodą MP, to estymacja dwustopniowa i bezpośrednia są równoważne.

DOWÓD. W dowodzie twierdzenia 2.1, po wprowadzeniu B_{nm} i funkcji H wykazano, że dla gęstości (2.34) przedstawionej w postaci (2.29) tylko licznik zależy od a_2 . Stąd a_{2m} w metodzie MP, tj. wartość a_2 minimalizującą (2.38), otrzymuje się w wyniku maksymalizacji względem a_2 funkcji

$$f_2(a_2)f(A_{1nm}, B_{nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m}). \quad (2.44)$$

Zgodnie z (2.31) i stwierdzeniem, że jacobian nie zależy od a_2 - wartość a_2 maksymalizującą (2.39), tj. a_{2m}^* w metodzie MP, otrzymujemy w wyniku maksymalizacji względem a_2 funkcji (2.44) po wstawieniu (2.28). Zatem $a_{2m}^* = a_{2m}$ dla tych samych wartości $\bar{X}_{1nm}$, X_{2m} , $\bar{W}_{nm}$, czyli algorytmy Ψ_{2m}^* (2.10) i $\bar{\Psi}_{2m}$ (2.12) są identyczne Q.E.D.

Łatwo zauważyć, że powyższe twierdzenie można uogólnić na metodę minimalnego ryzyka z dowolnymi funkcjami strat.

Twierdzenie 2.3. Jeśli na 1. stopniu (2.6) jest dostatecznym estymatorem parametru a_1 oraz estymator (2.7) na 2. stopniu i estymator bezpośredni (2.10) zostały wyznaczone metodą minimalnego ryzyka z tą samą funkcją strat L_2 , to estymacja dwustopniowa i bezpośrednia są równoważne.

DOWÓD. Wystarczy skorzystać z dowodu poprzedniego twierdzenia i zauważyć, że minimalizacja (2.35) względem $\bar{a}_2$ sprowadza się do minimalizacji funkcji

$$\int_{R^2} L_2(a_2, \bar{a}_2) f_2(a_2) f(A_{1nm}, B_{nm}; a_2, \bar{X}_{1nm}, X_{2m}) da_2. \quad (2.45)$$

Podobnie minimalizacja (2.36) względem $\bar{a}_2$ sprowadza się do minimalizacji (2.45) po wstawieniu (2.28), a zatem zależności a_{2m} i a_{2m}^* od $\bar{X}_{1nm}$, X_{2m} , $\bar{W}_{nm}$ są identyczne Q.E.D.

Podobnie jak dla metody MP zauważmy, że podany tu warunek równoważności jest tylko wystarczający, co nie wyklucza możliwości istnienia przypadków, dla których $a_{2m} \neq a_{2m}^*$.

2.4. Estymacja systemu dynamicznego

2.4.1. Ogólna metodyka postępowania

Przejdźmy obecnie do analogicznych problemów i rozważań dotyczących dwustopniowej estymacji systemu dynamicznego. Już dla pojedynczego elementu jest to problematyka bardzo obszerna [10] i obejmuje różne przypadki związane z różną formą opisu obiektu dynamicznego, różnym przedmiotem estymacji i różnymi metodami. W dodatku nawet, gdy problemy i metody są w pełni analogiczne do przypadku statycznego – sama notacja jest tu znacznie obszerniejsza i bardziej skomplikowana. Rozpatrzenie wszystkich przypadków dwustopniowej estymacji dynamicznej oczywiście wykracza poza ramy niniejszego opracowania choćby ze względów objętościowych. Ograniczymy się do dyskretnych obiektów dynamicznych opisanych ogólnie w formie operatorowej [10,22], co w konkretnych sytuacjach oznacza estymację parametrów charakterystyki czasowej. Skrótowość ujęcia jest tu uzasadniona pełną analogią do systemu statycznego i możliwością korzystania z metod i rezultatów przedstawionych w p. 2.2 i 2.3. Również organizacja eksperymentu może mieć różny charakter: oprócz najczęściej rozpatrywanej estymacji parametrów obiektu na podstawie jednej długiej sekwencji wejścia i wyjścia można rozpatrywać estymację na podstawie wielokrotnie powtarzanych krótkich sekwencji przy tych samych warunkach początkowych, jak np. w pracy [63]. To drugie podejście jako praktycznie mało przydatne nie będzie tu rozpatrywane dla pojedynczej estymacji na obu stopniach. Powtarzanie sekwencji pomiarowych na 1. stopniu przy tych samych warunkach początkowych będzie natomiast niezbędne do kolejnych taktów estymacji na 2. stopniu, podobnie jak dla systemu statycznego.

Przedstawimy krótko trzy wersje:

A. Opis na 1. stopniu jest dynamiczny, a na 2. statyczny. Jest to sytuacja najczęściej spotykana, szczególnie wtedy, gdy x_2 dla różnych j oznaczają x_2 dla różnych rzeczywistych obiektów (por. uwagi w p. 1.1).

B. 1. stopień jest statyczny, a 2. dynamiczny. Oznacza to, że wartość parametru a_{1j} w opisie na 1. stopniu zależy nie tylko od x_{2j} , lecz również od poprzednich wartości x_2 . Na przykład w zastosowaniu biomedycznym wartość parametru charakteryzującego układ krążenia może zależeć nie tylko od ostatniej dawki leku, lecz również od dawek poprzed-

nich; w zastosowaniu technicznym - stała czasowa obiektu chemicznego w określonym cyklu może zależeć od ilości katalizatora w tym cyklu i w poprzednich.

C. Oba stopnie są dynamiczne.

We wszystkich wersjach przyjmijmy ten sam co poprzednio opis zależności w_{ij} od z_{ij} (2.3) oraz takie, jak w p. 2.1 założenia o z_{ij} .

Ad. A. Opis na stopniu 1. analogiczny do (2.4) ma postać

$$y_j|_1^n = \hat{F}_1(x_{1j}|_1^n, a_{1j})$$

przy znanych warunkach początkowych, gdzie

$$x_{1j}|_1^n = (x_{11j}, x_{12j}, \dots, x_{1nj}), y_j|_1^n = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})$$

oznaczają odpowiednio sekwencję wejściową i wyjściową dla ustalonego x_{2j} , $\hat{F}_1$ jest odpowiednim operatorem, a_{1j} jego parametrem. W praktyce ze względu na inercję sekwencja wyjściowa nie będzie zależała od x_{1nj} . Jeśli sekwencje wejść i wyjść oznaczać za pomocą macierzy, jak w p. 2.1, to opis na 1. stopniu przyjmie postać

$$Y_{nj} = \tilde{F}_1(X_{1nj}, a_{1j}), \quad (2.46)$$

gdzie $Y_{nj} = [y_{1j} \ y_{2j} \ \dots \ y_{nj}]$, X_{1nj} zostało zdefiniowane w p. 2.1. Można również korzystać z innego opisu na 1. stopniu, czasem wygodniejszego w zastosowaniach:

$$y_{ij} = F_1(X_{1ij}, a_{1j}), \quad (2.47)$$

bowiem y_{ij} zależy tylko od $x_{11j}, \dots, x_{1ij}$. Opis na 2. stopniu jest taki jak poprzednio, tzn. (2.5). Opis analogiczny do (2.9) przyjmuje obecnie postać

$$y_{ij} = F_1[x_{1ij}, F_2(x_{2j}, a_2)] \triangleq F(x_{1ij}, x_{2j}, a_2).$$

Zakładamy, że dla kolejnych estymacji na 1. stopniu, tj. dla kolejnych taktów j warunki początkowe na 1. stopniu są te same. Ostatecznie algorytmy estymacji mają ogólną postać taką, jak w przypadku statycznym, tzn. (2.6), (2.7) i (2.10), czyli te same co poprzednio dane służą do wyznaczenia odpowiednio a_{1nj} , a_{2m} i a_{2m}^* . Co więcej, łatwo zauważyć, że również procedury wyznaczania algorytmów estymacji zarówno dla metody MM, jak i podejścia bayesowskiego są identyczne z przedstawionymi w p. 2.2.1 i 2.3.1. Różnica w zapisie polega na tym, że w (2.14) w miejsce $F_1(x_{1ij}, a_{1j})$ wstawiamy (2.47). Dlatego też gęstość f_w zmiennej w_{ij} zależy od całej sekwencji X_{1ij} i łączna gęstość dla w_{nj}

$$\tilde{f}_{wn}(W_{nj}; a_{1j}, X_{11j}, X_{12j}, \dots, X_{1nj}) = \prod_{i=1}^n f_w(w_{ij}; a_{1j}, X_{1ij}). \quad (2.48)$$

Ponieważ macierze $X_{11j}, X_{12j}, \dots$ są podmacierzami macierzy X_{1nj} , więc można zastosować oznaczenie

$$\tilde{f}_{wn}(W_{nj}; a_1, X_{11j}, X_{12j}, \dots, X_{1nj}) \triangleq f_{wn}(W_{nj}; a_{1j}, X_{1nj}).$$

Wówczas wszystkie dalsze wzory i sposoby postępowania są identyczne jak w p. 2.2.1 i 2.3.1. Oczywiście w (2.16) wystąpi obecnie $f_w(w_{ij}; F_2(x_{2j}, a_2), X_{11j})$. Ten sam jest również warunek wystarczający dla równoważności, tzn. dla rozpatrywanego przypadku dynamicznego obowiązuja twierdzenia 2.1, 2.2 i 2.3.

Ad. B. Obecnie opis na 1. stopniu jest (2.4), na 2. natomiast

$$a_{1j} = F_2(X_{2j}, a_2) \quad (2.49)$$

przy znanych warunkach początkowych podobnie jak (2.47) w wersji poprzedniej. Zależność analogiczna do (2.9) przyjmuje postać

$$y_{1j} = F_1[x_{11j}, F_2(X_{2j}, a_2)] \triangleq F(x_{11j}, X_{2j}, a_2). \quad (2.50)$$

Notacja (2.6), (2.7) i (2.10) dla algorytmów estymacji zostaje zachowana. W procedurach przedstawionych w p. 2.2.1 i 2.3.1 w miejsce $f_{a1}(a_{1nj}; a_2, X_{1nj}, x_{2j})$ występuje $f_{a1}(a_{1nj}; a_2, X_{1nj}, X_{2j})$ otrzymane z zależności (2.6) po wstawieniu (2.3) i (2.50). W miejsce

$$f_w(w_{ij}; F_2(x_{2j}, a_2), x_{1ij})$$

wystąpi natomiast

$$f_w(w_{ij}; F_2(X_{2j}, a_2), x_{1ij}).$$

Łatwo zauważyć, że z uwzględnieniem powyższych zmian wszystkie wzory i sposoby postępowania są identyczne jak w p. 2.2.1 i 2.3.1 oraz te same są warunki wystarczające dla równoważności (twierdzenia 2.1, 2.2 i 2.3).

Ad. C. Opisy analogiczne do (2.4), (2.5) i (2.9) mają obecnie postać

$$y_{1j} = F_1(X_{11j}, a_{1j}), \quad (2.51)$$

$$a_{1j} = F_2(X_{2j}, a_2), \quad (2.52)$$

$$y_{1j} = F_1[X_{11j}, F_2(X_{2j}, a_2)] \triangleq F(X_{11j}, X_{2j}, a_2). \quad (2.53)$$

Notacja dla algorytmów (2.6), (2.7) i (2.10) zostaje zachowana. Sposoby postępowania są identyczne jak w p. 2.2.1 i 2.3.1 oraz te same wa-

runki wystarczające dla równoważności. Gęstość dla w_{ij} ma obecnie postać taką jak w (2.48) z tym, że zamiast

$$f_w(w_{ij}; F_2(x_{2j}, a_2), x_{1ij})$$

wystąpi

$$f_w(w_{ij}; F_2(x_{2j}, a_2), x_{1ij}),$$

natomiast gęstość dla a_{1nj} ma postać taką, jak w wersji B, otrzymaną z zależności (2.6) po wstawieniu (2.3) i (2.53).

Pewna specyfika wyznaczania i notacji algorytmów estymacji wystąpi w konkretnych przypadkach przedstawionych poniżej.

2.4.2. Typowe przypadki - przykłady

W charakterze przykładów rozpatrzmy typowe przypadki z liniowymi zależnościami na obu stopniach i normalnymi rozkładami prawdopodobieństwa.

A. Niech $s_1 = 1 = s_2 = 1$, $r_1 = r_2 = r > 1$, zależność (2.47) ma postać

$$y_{ij} = \sum_{l=1}^i k_{i-l,j} x_{1lj} \quad (2.54)$$

przy zerowych warunkach początkowych, gdzie charakterystyka czasowa (dyskretna odpowiedź impulsowa) ma postać

$$k_{i,j} = a_{1j}^{(1)} k_i^{(1)} + a_{1j}^{(2)} k_i^{(2)} + \dots + a_{1j}^{(r)} k_i^{(r)} = a_{1j}^T \bar{k}_i,$$

$$a_{1j}^T = [a_{1j}^{(1)} \ a_{1j}^{(2)} \ \dots \ a_{1j}^{(r)}], \quad \bar{k}_i^T = [k_i^{(1)} \ k_i^{(2)} \ \dots \ k_i^{(r)}],$$

układ charakterystyk $k_i^{(1)}, \dots, k_i^{(r)}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) jest znany, a_{1j} jest przedmiotem estymacji. Jest to zadanie analogiczne do estymacji parametrów charakterystyki statycznej, która jest kombinacją liniową zadanego układu funkcji. Zakłócenie z_{ij} jest addytywne, tzn. $w_{ij} = y_{ij} + z_{ij}$, rozkład z_{ij} jest normalny z zerową wartością oczekiwaną jak w przypadkach rozpatrywanych w p. 2.2 i 2.3. Zależność (2.5) jest liniowa

$$a_{1j} = a_2 x_{1j} \quad (a_2 \text{ jest wektorem o } r \text{ składowych}),$$

jest to zatem przypadek ilustrujący wersję A z p. 2.4.1. Zgodnie z (2.54)

$$y_{ij} = a_{1j}^T \xi_{ij}, \quad (2.55)$$

przy czym

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{l=1}^i \bar{k}_{i-l} x_{1lj} = K_i x_{1ij}^T, \quad (2.56)$$

gdzie

$$K_i = [\bar{k}_{i-1} \ \bar{k}_{i-2} \ \dots \ \bar{k}_0].$$

Przy zastosowaniu metody MM można na podstawie (2.55) skorzystać z ostatniego wyniku w przypadku A w p. 2.2.2 i wówczas należy wstawić ε_{ij} w miejsce x_{1ij} , czyli G_{nj} w miejsce X_{1nj} , gdzie

$$G_{nj} = [\varepsilon_{1j} \ \varepsilon_{2j} \ \dots \ \varepsilon_{nj}]. \quad (2.57)$$

Zgodnie z (2.56)

$$G_{nj} = [K_1 x_{11j}^T \ K_2 x_{12j}^T \ \dots \ K_n x_{1nj}^T], \quad (2.58)$$

a zatem algorytmy estymacji na 1. i 2. stopniu oraz bezpośredniej są odpowiednio następujące:

$$a_{1nj} = (G_{nj} G_{nj}^T)^{-1} G_{nj} W_{nj}^T, \quad (2.59)$$

$$a_{2m} = \left[\sum_{j=1}^n x_{2j}^2 G_{nj} G_{nj}^T \right]^{-1} \sum_{j=1}^m x_{2j} G_{nj} G_{nj}^T a_{1nj}, \quad (2.60)$$

$$a_{2m}^* = \left[\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 G_{nj} G_{nj}^T \right]^{-1} \sum_{j=1}^m x_{2j} G_{nj} W_{nj}^T, \quad (2.61)$$

gdzie G_{nj} wyznaczamy według (2.58).

Łatwo sprawdzić na podstawie (2.56), że macierz G_{nj} (2.57) można również zapisać następująco:

$$G_{nj} = \bar{X}_{1nj} \bar{K}_n,$$

gdzie

$$\bar{X}_{1nj} = [x_{11j} I \ x_{12j} I \ \dots \ x_{1nj} I], \quad \bar{K}_n = \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \dots & \bar{k}_{n-2} & \bar{k}_{n-1} \\ \bar{0} & \bar{k}_0 & \dots & \bar{k}_{n-3} & \bar{k}_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \bar{k}_0 \end{bmatrix},$$

I oznacza macierz jednostkową $r \times r$, $\bar{0}$ oznacza kolumnową macierz zerową $r \times 1$. Zapis ten jest szczególnie wygodny, gdy na 1. stopniu jest tylko jeden parametr estymowany, tzn. $r = 1$ oraz

$$k_{1,j} = a_{1j} k_1.$$

Wówczas w algorytmach (2.59), (2.60), (2.61) w miejsce G_{nj} należy wstawić

$$G_{nj} = X_{1nj} \bar{K}_n,$$

gdzie $\bar{K}_n$ jest macierzą $n \times n$:

$$\bar{K}_n = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \dots & k_{n-2} & k_{n-1} \\ 0 & k_0 & \dots & k_{n-3} & k_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_0 \end{bmatrix}$$

B. Rozpatrzmy przypadek ilustrujący wersję B z p. 2.4.1 dla $s_1 = 1, r_1 = r_2 = s_2 = 1, r_2 = r > 1$ z opisami (2.4) i (2.49) o postaci

$$y_{ij} = a_{1j} x_{1ij}, \quad a_{1j} = \sum_{l=1}^j k_{j-l} x_{2l} \quad (2.62)$$

przy zerowych warunkach początkowych, gdzie charakterystyka czasowa na 2. stopniu

$$k_j = a_2^{(1)} k_j^{(1)} + a_2^{(2)} k_j^{(2)} + \dots + a_2^{(r)} k_j^{(r)} = a_2^T k_j, \quad (2.63)$$

$$a_2^T = [a_2^{(1)} \ a_2^{(2)} \ \dots \ a_2^{(r)}], \quad \bar{k}_j^T = [k_j^{(1)} \ k_j^{(2)} \ \dots \ k_j^{(r)}],$$

układ charakterystyk $k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(r)}$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) jest znany.

Zakłócenia z_{ij} są takie jak w przypadku poprzednim. Po wstawieniu (2.63) do (2.62) otrzymujemy

$$a_{1j} = a_2^T h_j, \quad (2.64)$$

gdzie

$$h_j = \sum_{l=1}^j \bar{k}_{j-l} x_{2l} = K_j x_{2j}^T,$$

$$K_j = [\bar{k}_{j-1} \ \bar{k}_{j-2} \ \dots \ \bar{k}_0].$$

Przy zastosowaniu metody MM można na podstawie (2.64) skorzystać z wyników (2.20), (2.22) oraz (2.23) i wówczas należy wstawić h_j w miejsce x_{2j} , czyli $H_j = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_j]$ w miejsce X_{2j} . Ostatecznie algorytm estymacji na 1. stopniu dany jest wzorem (2.20), algorytmy estymacji na 2. stopniu i bezpośredniej są odpowiednio następujące:

$$a_{2m} = (H_m D_m H_m^T)^{-1} H_m D_m A_{1m}^T, \quad (2.65)$$

$$a_{2m}^* = (H_m D_m H_m^T)^{-1} H_m B_m, \quad (2.66)$$

gdzie

$$H_m = [K_1 X_{21}^T \ K_2 X_{22}^T \ \dots \ K_n X_{2m}^T], \quad (2.67)$$

natomiast macierze D_m i B_m są takie jak w przypadku A, p. 2.2.2.

C. Rozpatrzmy przypadek ilustrujący wersję C z p. 2.4.1 (oba stopnie dynamiczne) dla $s_1 = l_1 = s_2 = r_1 = 1$, $r_2 = r > 1$ z opisami (2.51) i (2.52) w postaci

$$y_{1j} = a_{1j} g_{ij}, \quad a_{1j} = a_{2j}^T, \quad (2.68)$$

gdzie

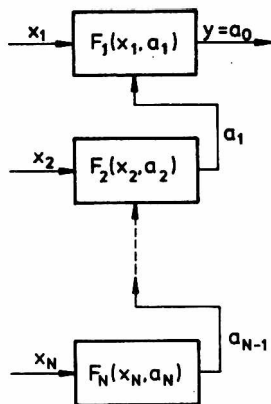
$$g_{ij} = \sum_{l=1}^i k_{i-l} x_{1lj} = K_i X_{1ij}, \quad h_j = \sum_{l=1}^j \hat{k}_{j-l} x_{2j} = \hat{K}_j X_{2j},$$

k_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) jest znaną charakterystyką czasową, $\hat{k}_j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) jest zapisanym w postaci wektorowej znanym układem r charakterystyk podobnie jak w przypadku B, macierze K_i oraz $\hat{K}_j$ są zdefiniowane tak, jak poprzednio. Zakłócenia z_{ij} są takie, jak poprzednio. Postać zależności (2.68) pozwala przy zastosowaniu metody MM na skorzystanie z wyników (2.20), (2.22) i (2.23), w których w celu otrzymania algorytmów estymacji w rozważanym przypadku wstawiamy odpowiednio g_{ij} i h_j zamiast x_{1ij} i x_{2j} , czyli G_{nj} (2.58) w miejsce X_{1nj} oraz H_m (2.67) z zastąpieniem K_j przez $\hat{K}_j$ - w miejsce X_{2m} .

D. W celu ilustracji metody MP rozpatrzmy przypadek, w którym oba stopnie są dynamiczne (wersja C), zakłócenia z_{ij} są takie, jak poprzednio, $s_1 = l_1 = s_2 = r_1 = 1$, $r_2 = r > 1$. Opisy na obu stopniach są zatem takie, jak w poprzednim przypadku, tzn. (2.68). Jeśli założymy normalny rozkład prawdopodobieństwa $f_2(a_2)$ taki, jak w p. 2.3.2, to postać zależności (2.68) pozwala na skorzystanie z wyników (2.41), (2.42) i (2.43), w których w celu otrzymania algorytmów estymacji wstawiamy h_j zamiast x_{2j} oraz g_{ij} zamiast x_{1ij} , czyli G_{nj} (2.58) w miejsce X_{1nj} .

2.5. Możliwość uogólnienia dla zadania estymacji wielostopniowej

Zgodn. z zakresem pracy przedstawionym na wstępie ograniczymy się tylko do krótkiego przedstawienia możliwości uogólnienia przedstawionych rozważań dla zadania estymacji wielostopniowej w przypadku statycznym. Wystąpią wówczas nie tylko znaczne komplikacje z notacją, ale i określone trudności merytoryczne. Rozważmy system statyczny o N stopniach (rys. 2.5), opisany zależnościami



$$y = F_1(x_1, a_1),$$

$$a_1 = F_2(x_2, a_2),$$

$$a_2 = F_3(x_3, a_3),$$

$$\vdots$$

$$a_{N-1} = F_N(x_N, a_N),$$

czyli na k -tym stopniu

$$a_{k-1} = F_k(x_k, a_k) \text{ dla } k = 1, 2, \dots, N,$$

$$a_0 = y.$$

Rys. 2.5. System statyczny o N stopniach
Fig. 2.5. Static system with N stages

Jeden takt estymacji na $(k+1)$ stopniu wymaga określonej sekwencji na potrzeby estymacji na k -tym stopniu, w czasie której mierzymy (lub nastawiamy) kolejne wartości x_k i wyliczamy odpowiadające im wyniki estymacji parametru a_{k-1} na stopniu $(k-1)$.

Jedynie dla 1. stopnia wyjście, tj. y mierzymy bezpośrednio. Jeśli oznaczymy liczbę taktów estymacji, czyli długość sekwencji na k -tym stopniu przez n_k , to jeden takt estymacji na $(k+1)$ stopniu wymaga jednej sekwencji, czyli n_k taktów na k -tym stopniu, co z kolei wymaga n_k sekwencji, czyli $n_k \cdot n_{k-1}$ taktów na $(k-1)$ stopniu itd. Wymagana liczba taktów na 1. stopniu jest zatem równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. Ma to określone implikacje dla formy i organizacji zbioru danych.

Po wprowadzeniu do oznaczeń poszczególnych momentów możemy dla k -tego stopnia i j -tego taktu na $(k+1)$ stopniu wprowadzić oznaczenia sekwencji na wejściu i wyjściu w postaci macierzy, podobnie jak w p. 2.1:

$$[x_{k1,j} \ x_{k2,j} \ \dots \ x_{kn_k,j}] = X_{kn_k,j},$$

$$[a_{k-1,1,j} \ a_{k-1,2,j} \ \dots \ a_{k-1,n_k,j}] = A_{k-1,n_k,j},$$

gdzie $a_{k-1,i,j}$ oznacza wynik estymacji a_{k-1} na $(k-1)$ stopniu dla wartości $x_{ki,j}$. Dla uproszczenia pominięto tu indeks wskazujący na to, że chodzi o estymatę a_{k-1} dla n_{k-1} taktów. Dokładniej powinno być $a_{k-1,n_{k-1},i,j}$, podobnie jak a_{1nj} w p. 2.1. Dla k -tego stopnia

$$a_{k,n_k,j} = \psi_{k,n_k}(x_{kn_k,j}; A_{k-1,n_k,j},$$

gdzie $a_{k,n_k,j}$ jest estymatą $a_{k,j}$ dla stałej wartości $x_{k+1,j}$ na $(k+1)$ stopniu, ψ_k oznacza algorytm estymacji. Dla $(k+1)$ stopnia

$$[x_{k+1,1} \ x_{k+1,2} \ \dots \ x_{k+1,n_{k+1}}] = X_{k+1,n_{k+1}},$$

$$[a_{k,n_k,1} \ a_{k,n_k,2} \ \dots \ a_{k,n_k,n_{k+1}}] = A_{k,n_{k+1}},$$

$$a_{k+1,n_{k+1}} = \psi_{k+1,n_{k+1}}(X_{k+1,n_{k+1}}; A_{k,n_{k+1}}),$$

gdzie $a_{k+1,n_{k+1}}$ jest estymatą a_{k+1} dla stałej wartości $x_{k+2,1}$ w 1-tym takcie estymacji na $(k+2)$ stopniu. Dla uproszczenia pominięto w oznaczeniach indeks 1.

Aby stwierdzić możliwość zastosowania metod MM lub MP do wyznaczania algorytmów na poszczególnych stopniach zauważmy, że w obu metodach konieczne jest wyznaczenie gęstości prawdopodobieństwa dla estymatorów na $(k-1)$ i k -tym stopniu i następnie wyznaczenie odpowiednich gęstości łącznych, podobnie jak przedstawiono to dla estymacji dwustopniowej. Ponieważ algorytmy estymacji dla kolejnych stopni są coraz bardziej skomplikowane (co można było zauważyć już dla dwu stopni), jest to zadanie bardzo trudne lub wręcz niemożliwe do wykonania, w każdym razie w sposób analityczny. W metodzie MP dodatkowe utrudnienie może spowodować konieczność wyznaczenia apriorycznych gęstości dla parametrów a na poszczególnych stopniach przy danej gęstości dla a_N .

Dla estymacji bezpośredniej parametru a_N musimy skorzystać z superpozycji poszczególnych funkcji F_k , tzn.

$$y = F_1(x_1, F_2(x_2, \dots, F_N(x_N, a_N))) \dots \hat{=} F(x_1, x_2, \dots, x_N, a_N).$$

Łatwo zauważyć, że jeśli estymatory bezpośrednie a_k są dostateczne dla $k = 1, 2, \dots, N-1$, to N -stopniowa i bezpośrednia estymacja a_N są równoważne zarówno dla metody MM, jak i MP. W dowodzie wystarczy zauważyć, że twierdzenie jest prawdziwe dla $N = 2$, co udowodniono poprzednio oraz, że z jego prawdziwości dla $N = k \geq 2$ wynika prawdziwość dla $N = k + 1$. Problemy z korzystaniem z tego twierdzenia mogą być spowodowane trudnością stwierdzenia dostateczności odpowiednich estymatorów dla wyższych stopni.

3. DWUSTOPNIOWY WYBÓR OPTYMALNEGO MODELU

Przejdźmy obecnie do drugiego podstawowego zadania identyfikacji wymienionego w rozdz. 1, tj. do dwustopniowego wyboru optymalnego modelu przy pełnej informacji probabilistycznej oraz przy korzystaniu z wyników pomiarów i odpowiednich algorytmów identyfikacji. Po wprowadzeniu oznaczeń i sprecyzowaniu podejścia ogólnego dla systemu statycznego, podamy konkretne rezultaty dla przypadku liniowo-kwadratowego, wys-

tarczające warunki równoważności podejścia dwustopniowego i bezpośredniego oraz wyniki eksperymentów obliczeniowych dla rozpatrywanego przypadku. Następnie przedstawimy rozszerzenie rozważań na pewien przypadek dynamiczny oraz uwagi o możliwościach uogólnienia na zadanie identyfikacji wielostopniowej.

3.1. Sformułowanie problemów dwustopniowego wyboru optymalnego modelu i ogólne procedury ich rozwiązywania

Rozważmy system statyczny o wejściach x_1 i x_2 oraz wyjściu y takich jak w p. 2.1. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że (x_1, x_2, y) są wartościami zmiennych losowych $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y})$, dla których istnieje gęstość prawdopodobieństwa $f(x_1, x_2, y)$. Proponujemy modele na 1. i 2. stopniu (por. p. 1.3) odpowiednio o postaci

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, a_1), \quad (3.1)$$

$$\bar{a}_1 = \Phi_2(x_2, a_2), \quad (3.2)$$

gdzie

$$x_1 \in \mathcal{R}^{s_1} \triangleq \mathcal{X}_1, \quad x_2 \in \mathcal{R}^{s_2} \triangleq \mathcal{X}_2, \quad y \in \mathcal{R}^1 \triangleq \mathcal{Y},$$

$$a_1 \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{R}^{r_1}, \quad a_2 \in \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{R}^{r_2}, \quad \Phi_1 : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{Y},$$

$$\Phi_2 : \mathcal{X}_2 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1.$$

Wprowadzimy definicje precyzujące, w jakim sensie optymalne będą rozpatrywane modele.

Definicja 3.1. Model na 1. stopniu (3.1) nazwiemy modelem optymalnym dla danego x_2 , jeśli $a_1 = a_1^*$, gdzie a_1^* jest wartością a_1 minimalizującą kryterium jakości identyfikacji

$$\begin{aligned} Q_1(a_1, x_2) &\triangleq E_{\underline{x}_1, \underline{y}} [q_1(y, \bar{y}) | x_2] = \\ &= \int_{\mathcal{X}_1} \int_{\mathcal{Y}} q_1[y, \Phi_1(x_1, a_1)] f_1(x_1, y | x_2) dx_1 dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

czyli

$$Q_1(a_1^*) = \min_{a_1 \in \mathcal{A}_1} Q_1(a_1),$$

gdzie $q_1(y, \bar{y})$ jest zadaną funkcją porównującą wyjście obiektu i modelu na 1. stopniu, $q_1 = \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}^1$, $q_1(y, \bar{y}) \geq 0$, $q_1(y, \bar{y}) = 0 \iff y = \bar{y}$, f_1 oznacza warunkową gęstość prawdopodobieństwa ■

W wyniku minimalizacji (3.3) względem a_1 dla danego x_2 otrzymamy zależność a_1^* od x_2

$$a_1^* \triangleq G(x_2). \quad (3.4)$$

Jest to model dla 2. stopnia wyznaczony w wyniku optymalizacji na stopniu 1. Wartości a_1^* można porównywać z wartościami $\bar{a}_1$ wyznaczonymi z modelu (3.2) dla tych samych wartości x_2 i wyznaczyć optymalny model (3.2), tj. najlepszą aproksymację zależności (3.4) za pomocą wzoru o postaci (3.2).

Definicja 3.2. Model na 2. stopniu (3.2) nazwiemy modelem optymalnym dla $a_2 = a_2^*$, gdzie a_2^* jest wartością a_2 minimalizującą kryterium jakości identyfikacji

$$Q_2(a_2) \triangleq E_{\underline{x}_2} [q_2(a_1^*, \bar{a}_1)] = \int_{\underline{x}_2} q_2[G(x_2), \Phi_2(x_2, a_2)] f_2(x_2) dx_2, \quad (3.5)$$

czyli

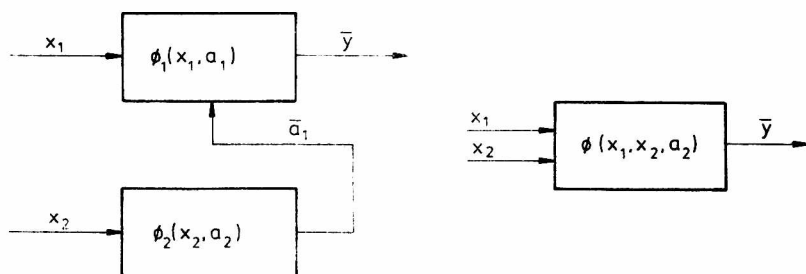
$$Q_2(a_2^*) = \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} Q_2(a_2),$$

gdzie $q_2(a_1^*, \bar{a}_1)$ jest zadaną funkcją porównującą wartość a_1^* wyznaczoną na 1. stopniu z wartością $\bar{a}_1$ wyznaczoną z modelu (3.2) na 2. stopniu o własnościach takich jak q_1 , f_2 oznacza brzegową gęstość prawdopodobieństwa dla $\underline{x}_2$ ■

Gdy zastosujemy podejście bezpośrednie, tj. bez dekompozycji modelu na dwa stopnie, wyznaczamy optymalną wartość a_2 dla modelu bezpośredniego o zadanej postaci $\bar{y} = \Phi(x_1, x_2, a_2)$. W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy model bezpośredni otrzymany w wyniku kompozycji modeli (3.1) i (3.2), tzn.

$$\bar{y} = \Phi(x_1, x_2, a_2) = \Phi_1(x_1, \Phi_2(x_2, a_2)). \quad (3.6)$$

Oznacza to, że pierwotnie określone mamy modele na obu stopniach, tzn. określenie postaci modeli ma charakter dwustopniowy, natomiast wybór optymalnej wartości a_2 może być dwustopniowy lub bezpośredni. Podejście dwustopniowe i bezpośrednie ilustruje rys. 3.1.



Rys. 3.1. Model dwustopniowy i bezpośredni
Fig. 3.1. Two-stage and direct models

Definicja 3.3. Model bezpośredni (3.6) nazwiemy modelem optymalnym dla $a_2 = \tilde{a}_2$, minimalizującego kryterium jakości identyfikacji

$$Q(a_2) \triangleq \int_{x_1} \int_{x_2} \int_y [q_1(y, \bar{y})] = \int_{x_1} \int_{x_2} \int_y q_1[y, \Phi(x_1, x_2, a_2)] \cdot f(x_1, x_2, y) dx_1 dx_2 dy, \quad (3.7)$$

czyli

$$Q(\tilde{a}_2) = \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} Q(a_2) \quad \blacksquare$$

Podejście dwustopniowe i bezpośrednie nazwiemy podejściem równoważnym, jeśli $a_2^* = \tilde{a}_2$.

Przy pełnej informacji probabilistycznej, tj. znajomości gęstości prawdopodobieństwa $f(x_1, x_2, y)$, problem dwustopniowego wyboru optymalnego modelu polega na wyznaczeniu zależności (3.4) minimalizującej (3.3) oraz wartości a_2 minimalizującej (3.5) dla danych funkcji Φ_1, Φ_2, q_1, q_2 . Procedura dwustopniowego wyboru najlepszego modelu jest zatem następująca:

1. Wyznaczamy gęstości f_2 i f_1 :

$$f_2(x_2) = \int_{x_1} \int_y f(x_1, x_2, y) dx_1 dy, \quad f_1(x_1, y | x_2) = \frac{f(x_1, x_2, y)}{f_2(x_2)}.$$

2. W wyniku całkowania (3.3) wyznaczamy funkcję $Q_1(a_1, x_2)$.

3. Minimalizujemy funkcję $Q_1(a_1, x_2)$ względem a_1 przy ograniczeniu $a_1 \in \mathcal{A}_1$ i otrzymujemy zależność (3.4).

4. W wyniku całkowania (3.5) dla wyznaczonej funkcji (3.4) wyznaczamy funkcję $Q_2(a_2)$.

5. Minimalizujemy $Q_2(a_2)$ względem a_2 przy ograniczeniu $a_2 \in \mathcal{A}_2$.

Nawet bez ograniczeń narzuconych na wybór a_1 i a_2 (tzn. $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{R}^1, \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{R}^{r_2}$) wyznaczanie funkcji Q_1 i Q_2 oraz ich minimalizacja mogą być zadaniami trudnymi lub niemożliwymi do rozwiązania analitycznego i konieczne jest stosowanie odpowiednich procedur numerycznych, podobnie zresztą jak w identyfikacji pojedynczego elementu. Wyniki analityczne uzyskać można dla przypadku liniowo-kwadratowego (p. 3.2). Zauważmy również, że podobnie jak w estymacji dwustopniowej, do wyboru optymalnego modelu na 2. stopniu nie można zastosować wprost podejść i wzorów znanych dla identyfikacji pojedynczego elementu. "Wyjście" na 2. stopniu, tj. a_1^* , nie jest wprost realizowane i ewentualnie obserwowane jak dla pojedynczego obiektu, lecz jest wyznaczane w wyniku identyfikacji na 1. stopniu. Stąd też nie można wprost posługiwać się łączną gęstością $f(x_2, a_1)$ jako daną.

Gdy brak pełnej informacji probabilistycznej, a więc w realnej sytuacji, należy posługiwać się danymi pomiarowymi, uzyskiwanymi tak, jak w rozdz. 2:

$$X_{1nj} = [x_{11j} \ x_{12j} \ \dots \ x_{1nj}], \quad Y_{nj} = [y_{1j} \ y_{2j} \ \dots \ y_{nj}]$$

- odpowiednio sekwencja wejściowa i wyjściowa na 1. stopniu w j-tym takcie identyfikacji na 2. stopniu;

$$X_{2m} = [x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2m}]$$

- sekwencja wejściowa dla identyfikacji na 2. stopniu.

Podobnie jak w identyfikacji pojedynczego elementu, algorytmy identyfikacji na obu stopniach i identyfikacji bezpośredniej otrzymamy posługując się empirycznymi rozkładami otrzymanymi na podstawie wyników pomiarów lub minimalizując empiryczne kryteria identyfikacji. W tym drugim przypadku zamiast (3.3) minimalizujemy

$$Q_{1nj}(a_1) = \sum_{i=1}^n q_1[y_{ij}, \Phi_1(x_{1ij}, a_1)]$$

względem a_1 i otrzymujemy algorytm identyfikacji na 1. stopniu

$$a_{1nj} = \Psi_{1n}(X_{1nj}, Y_{nj}). \quad (3.8)$$

W miejsce (3.5) minimalizujemy

$$Q_{2m}(a_2) = \sum_{j=1}^n q_2[a_{1nj}, \Phi_2(x_{2j}, a_2)]$$

względem a_2 i otrzymujemy algorytm identyfikacji na 2. stopniu

$$a_{2m} = \Psi_{2m}(X_{2m}, A_{1nm}), \quad (3.9)$$

gdzie

$$A_{1nm} = [a_{1n1} \ a_{1n2} \ \dots \ a_{1nm}].$$

Wreszcie w wyniku minimalizacji

$$Q_{nm}(a_2) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n q_1[y_{ij}, \Phi(x_{1ij}, x_{2j}, a_2)]$$

względem a_2 otrzymujemy algorytm identyfikacji bezpośredniej

$$\tilde{a}_{2m} = \tilde{\Psi}_{2m}(\bar{X}_{1nm}, X_{2m}, \bar{Y}_{nm}), \quad (3.10)$$

gdzie

$$\bar{X}_{1nm} = [x_{1n1} \ x_{1n2} \ \dots \ x_{1nm}], \quad \bar{Y}_{nm} = [y_{n1} \ y_{n2} \ \dots \ y_{nm}].$$

3.2. Przypadek liniowo-kwadratowy

Rozpatrzmy bliżej przypadek liniowo-kwadratowy, dla którego można uzyskać wyniki analityczne. Przyjmijmy dla obu stopni modele liniowe o postaci

$$\bar{y} = \Lambda_1 x_1, \quad (3.11)$$

$$\bar{a}_{1k} = \Lambda_{2k} x_2, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (3.12)$$

gdzie a_{1k}^T jest k -tym wierszem macierzy Λ_1 , Λ_1 jest $(l \times s_1)$ - macierzą parametrów na 1. stopniu, Λ_{2k} są $(s_1 \times s_2)$ - macierzami parametrów na 2. stopniu. W celu wprowadzenia parametrów wektorowych a_1 i a_2 jak w zapisie ogólnym (3.1) i (3.2) - zależności (3.11) i (3.12) można zapisać następująco:

$$\bar{y} = \Lambda_1(x_1)a_1, \quad \bar{a}_1 = \Lambda_2(x_2)a_2,$$

gdzie

$$a_1^T = [a_{11}^T \ a_{12}^T \ \dots \ a_{1l}^T] \quad (r_1 = l \cdot s_1),$$

$$a_2^T = [a_{21}^T \ a_{22}^T \ \dots \ a_{2l}^T], \quad a_{2k}^T = [a_{2k1}^T \ a_{2k2}^T \ \dots \ a_{2ks_1}^T]$$

$$(k = 1, 2, \dots, l),$$

a_{2kp}^T oznacza p -ty wiersz macierzy Λ_{2k} ($p = 1, 2, \dots, s_1$), a zatem $r_2 = l \cdot s_1 \cdot s_2$, $\Lambda_1(x_1)$, $\Lambda_2(x_2)$ są macierzami odpowiednio $(l \times r_1)$ i $(r_1 \times r_2)$:

$$\Lambda_1(x_1) = \begin{bmatrix} x_1^T \bar{0}^T & \dots & \bar{0}^T \\ \bar{0}^T x_1^T & \dots & \bar{0}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{0}^T \bar{0}^T & \dots & x_1^T \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2(x_2) = \begin{bmatrix} x_2^T \bar{0}^T & \dots & \bar{0}^T \\ \bar{0}^T x_2^T & \dots & \bar{0}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{0}^T \bar{0}^T & \dots & x_2^T \end{bmatrix},$$

$$\bar{0}^T = [00 \ \dots \ 0].$$

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami model bezpośredni (3.6) przyjmuje postać

$$\bar{y} = \Lambda_1(x_1) \Lambda_2(x_2)a_2.$$

Niech

$$q_1(y, \bar{y}) = (y - \bar{y})^T (y - \bar{y}), \quad q_2(a_1^*, \bar{a}_1) = (a_1^* - \bar{a}_1)^T (a_1^* - \bar{a}_1).$$

Wówczas kryteria (3.3), (3.5) i (3.7) przyjmują odpowiednio postać:

$$Q_1(a_1) = E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left\{ [\underline{y} - \Lambda_1(\underline{x}_1)a_1]^T [\underline{y} - \Lambda_1(\underline{x}_1)a_1] | x_2 \right\}, \quad (3.13)$$

$$Q_2(a_2) = E_{\underline{x}_2} \left\{ [a_1^* - \Lambda_2(\underline{x}_2)a_2]^T [a_1^* - \Lambda_2(\underline{x}_2)a_2] \right\}, \quad (3.14)$$

$$Q(a_2) = E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} \left\{ [\underline{y} - \Lambda_1(\underline{x}_1)\Lambda_2(\underline{x}_2)a_2]^T [\underline{y} - \Lambda_1(\underline{x}_1)\Lambda_2(\underline{x}_2)a_2] \right\}. \quad (3.15)$$

Przez przyrównanie do zera gradientów tych funkcji względem wektorów minimalizujących podobnie jak dla identyfikacji pojedynczego elementu [10], łatwo otrzymać następujące wyniki

$$a_1^* = \left\{ E_{\underline{x}_1} [\Lambda_1^T(\underline{x}_1) \Lambda_1(\underline{x}_1) | \underline{x}_2] \right\}^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{y}} [\Lambda_1^T(\underline{x}_1) \underline{y} | \underline{x}_2], \quad (3.16)$$

$$a_2^* = \left\{ E_{\underline{x}_2} [\Lambda_2^T(\underline{x}_2) \Lambda_2(\underline{x}_2)] \right\}^{-1} E_{\underline{x}_2} [\Lambda_2^T(\underline{x}_2) a_1^*], \quad (3.17)$$

$$\tilde{a}_2 = \left\{ E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2} [\Lambda_2^T(\underline{x}_2) \Lambda_1^T(\underline{x}_1) \Lambda_1(\underline{x}_1) \Lambda_2(\underline{x}_2)] \right\}^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} [\Lambda_2^T(\underline{x}_2) \Lambda_1^T(\underline{x}_1) \underline{y}]. \quad (3.18)$$

Ostateczny wynik dla zadania wyboru optymalnego modelu na 2. stopniu otrzymamy po wstawieniu (3.16) do (3.17). Zauważmy, że do wyznaczenia a_1^* i $\tilde{a}_2$ wystarczy jedynie znajomość odpowiednich momentów rozkładu $f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y})$, natomiast ostateczne wyznaczenie wartości a_2^* wymaga znajomości rozkładu brzegowego $f_2(\underline{x}_2)$ i może być trudne lub niemożliwe do uzyskania analitycznie nawet dla najprostszych rozkładów z powodu trudności z całkowaniem w drugim członie wyrażenia (3.17).

Jak wiadomo, zależności liniowe (3.11), (3.12) wygodnie jest zapisywać używając iloczynu Kroneckera macierzy [54]:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}^B & a_{12}^B & \dots & a_{1n}^B \\ a_{21}^B & a_{22}^B & \dots & a_{2n}^B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^B & a_{m2}^B & \dots & a_{mn}^B \end{bmatrix},$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ jest macierzą $(m \times n)$. Wyniki (3.16)-(3.18) można przepisać w innej formie po podstawieniu

$$\Lambda_1(\underline{x}_1) = I_1 \otimes \underline{x}_1^T, \quad \Lambda_2(\underline{x}_2) = I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2^T, \quad (3.19)$$

gdzie I_1 i I_{s_1} są odpowiednio macierzami jednostkowymi (1×1) oraz $(s_1 \times s_1)$. Z zapisu tego skorzystamy w p. 3.3 w dowodzie twierdzenia o równoważności.

Rozpatrzmy szczególny przypadek $s_1 = 1 = r_1 = 1$, $s_2 = r_2$, tzn. zależności (3.11) i (3.12) mają postać

$$\bar{y} = a_1 x_1, \quad \bar{a}_1 = a_2^T x_2. \quad (3.20)$$

Wówczas wyniki (3.16)-(3.18) są następujące:

$$a_1^* = \frac{E \frac{x_1 y}{x_1} | x_2}{E \frac{x_1^2}{x_1} | x_2}, \quad (3.21)$$

$$a_2^* = \left[E \frac{(x_2 x_2^T)}{x_2} \right]^{-1} E \frac{(x_2 a_1^*)}{x_2}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{a}_2 = \left[E \frac{(x_1^2 x_2 x_2^T)}{x_1, x_2} \right]^{-1} E \frac{(x_2 x_1 y)}{x_1, x_2, y}. \quad (3.23)$$

Aby ostatecznie wyznaczyć a_2^* , należy wyliczyć drugi człon (3.22), tj.

$$E \frac{(x_2 a_1^*)}{x_2} = \int_{x_2} H(x_2) f_2(x_2) dx_2, \quad (3.24)$$

gdzie

$$H(x_2) \triangleq x_2 \frac{E \frac{(x_1 y)}{x_1} | x_2}{E \frac{(x_1^2)}{x_1} | x_2}.$$

Trudności, o których była mowa, związane są z całkowaniem (3.24). Trudności takich nie ma natomiast w sytuacji empirycznej podczas wyznaczania algorytmu identyfikacji (3.9), bowiem obecnie dostępne są realizacje a_{1n} dla danego x_2 , czyli wyniki identyfikacji na 1. stopniu. Zgodnie z (3.16)–(3.18) algorytmy identyfikacji (3.8)–(3.10) mają następującą postać otrzymaną przez wstawienie momentów empirycznych:

$$a_{1nj} = \left[\sum_{i=1}^n \Lambda_1^T(x_{1ij}) \Lambda_1(x_{1ij}) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \Lambda_1^T(x_{1ij}) y_{ij}, \quad (3.25)$$

$$a_{2m} = \left[\sum_{j=1}^m \Lambda_2^T(x_{2j}) \Lambda_2(x_{2j}) \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \Lambda_2^T(x_{2j}) a_{1nj}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{2m} &= \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Lambda_2^T(x_{2j}) \Lambda_1^T(x_{1ij}) \Lambda_1(x_{1ij}) \Lambda_2(x_{2j}) \right]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Lambda_2^T(x_{2j}) \Lambda_1^T(x_{1ij}) y_{ij}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

W szczególnym przypadku (3.20) algorytmy identyfikacji są następujące

$$a_{1nj} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1ij} y_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2}, \quad (3.28)$$

$$a_{2m} = \left(\sum_{j=1}^m x_{2j} x_{2j}^T \right)^{-1} \sum_{j=1}^m x_{2j} a_{1nj}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{a}_{2m} = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 x_{2j} x_{2j}^T \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{2j} x_{1ij} y_{1ij}. \quad (3.30)$$

Przykład 3.1. Niech w (3.20) $s_2 = r_2 = 1$, tzn.

$$\bar{y} = a_1 x_1, \quad \bar{a}_1 = a_2 x_2.$$

Założmy rozkład normalny dla $(\underline{y}, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ z wektorem wartości oczekiwanych i macierzą kowariancji odpowiednio

$$m = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \mu_{10} & \mu_{20} \\ \mu_{10} & \sigma_1^2 & \mu_{12} \\ \mu_{20} & \mu_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

W celu wyznaczenia a_1^* (3.21) należy ustalić

$$E_{\underline{x}_1, \underline{y}} (\underline{x}_1 \underline{y} | x_2) = m'_0 m'_1 + \mu'_{10}$$

oraz

$$E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1^2 | x_2) = (m'_1)^2 + (\sigma'_1)^2,$$

gdzie $m'_0, m'_1, \sigma'_1, \mu'_{10}$ oznaczają odpowiednio momenty warunkowe, które można wyliczyć ze znanych zależności dla rozkładu normalnego [50]. Po przekształceniach otrzymamy

$$E_{\underline{x}_1, \underline{y}} (\underline{x}_1 \underline{y} | x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2,$$

gdzie

$$\alpha_0 = \mu_{10} - \frac{\mu_{20} \mu_{12}}{\sigma_2^2} + m_0 m_1 - m_2 \left(m_1 \frac{\mu_{20}}{\sigma_2^2} + m_0 \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} \right) + \frac{\mu_{20} \mu_{12}}{\sigma_2^4} m_2^2,$$

$$\alpha_1 = m_1 \frac{\mu_{20}}{\sigma_2^2} + m_0 \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - 2m_2 \frac{\mu_{20} \mu_{12}}{\sigma_2^4}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_{20} \mu_{12}}{\sigma_2^4}$$

oraz

$$E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1^2 | x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2,$$

gdzie

$$\beta_0 = \sigma_1^2 - \frac{\mu_{12}^2}{\sigma_2^2} + \left(m_1 - \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} m_2 \right)^2,$$

$$\beta_1 = 2 \left(m_1 - \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} m_2 \right) \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2}, \quad \beta_2 = \frac{\mu_{12}^2}{\sigma_2^4}.$$

Zgodnie z (3.21)

$$a_1^* = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2}{\beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2}.$$

Na podstawie (3.22)

$$a_2^* = \frac{1}{\sigma_2^2 + m_2^2} E \left[\frac{x_2}{\beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2} \right].$$

Wartości oczekiwanej względem x_2 nie można tu wyznaczyć analitycznie i trzeba stosować odpowiednią metodę całkowania numerycznego dla konkretnych wartości liczbowych momentów rozkładu normalnego.

W celu wyznaczenia $\tilde{a}_2$ (3.23) można skorzystać z poprzednich wyników:

$$\tilde{a}_2 = \frac{E \left[\frac{x_2}{x_2} E \left(\frac{x_1 y}{x_2} \middle| x_2 \right) \right]}{E \left[\frac{x_2^2}{x_2} E \left(\frac{x_1^2}{x_2} \middle| x_2 \right) \right]} = \frac{E \left[x_2 (\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2) \right]}{E \left[x_2 (\beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2) \right]}.$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$\tilde{a}_2 = \frac{m_0 m_1 m_2 + m_0 \mu_{12} + m_1 \mu_{20} + m_2 \mu_{10}}{(\sigma_1^2 + m_1^2)(\sigma_2^2 + m_2^2) + 4m_1 m_2 \mu_{12} + 2\mu_{12}^2}.$$

Zadanie upraszcza się znacznie, gdy $\mu_{12} = 0$. Wówczas $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ i a_2^* można wyznaczyć analitycznie:

$$a_2^* = \frac{\alpha_0 m_2 + \alpha_1 (\sigma_2^2 + m_2^2)}{(\sigma_2^2 + m_2^2) \beta_0} = \frac{m_0 m_1 m_2 + m_1 \mu_{20} + m_2 \mu_{10}}{(\sigma_1^2 + m_1^2)(\sigma_2^2 + m_2^2)} = \tilde{a}_2.$$

Przykład 3.2. Niech $l_1 = s_1 = s_2 = 1$, $r_1 = r_2 = 2$,

$$\bar{y} = a_1^{(1)} x_1 + a_1^{(2)},$$

$$\bar{a}_1^{(2)} = a_2^{(1)} x_2 + a_2^{(2)},$$

$$a_1^T = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \end{bmatrix}, \quad a_2^T = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że x_2 wpływa tylko na wartość drugiej składowej wektora a_1 . Zakładamy kryterium kwadratowe na obu stopniach oraz rozkład normalny

dla $(\underline{y}, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ jak w przykładzie poprzednim. Zadanie dla 1. stopnia jest znane [10] i jego wynik jest następujący:

$$a_1^{(1)*} = \frac{\frac{E(\underline{y} \underline{x}_1 | x_2) - E(\underline{y} | x_2) E(\underline{x}_1 | x_2)}{E(\underline{x}_1, \underline{y})}}{\frac{E(\underline{x}_1^2 | x_2) - [E(\underline{x}_1 | x_2)]^2}{E(\underline{x}_1)}},$$

$$a_1^{(2)*} = \frac{\frac{E(\underline{y} | x_2) E(\underline{x}_1^2 | x_2) - E(\underline{x}_1, \underline{y}) E(\underline{x}_1 | x_2)}{E(\underline{x}_1)}}{\frac{E(\underline{x}_1^2 | x_2) - [E(\underline{x}_1 | x_2)]^2}{E(\underline{x}_1)}},$$

a po wstawieniu odpowiednich momentów i przekształceniach otrzymujemy

$$a_1^{(1)*} = \frac{\mu_{10} \sigma_2^2 - \mu_{12} \mu_{20}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{12}^2}, \quad a_1^{(2)*} = \gamma_1 x_2 + \gamma_2 = G(x_2),$$

gdzie

$$\gamma_1 = \frac{\mu_{20} \sigma_1^2 - \mu_{10} \mu_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{12}^2},$$

$$\gamma_2 = m_0 - \frac{(\mu_{10} \sigma_2^2 - \mu_{12} \mu_{20}) m_1 + (\mu_{20} \sigma_1^2 - \mu_{12} \mu_{10}) m_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{12}^2}.$$

Porównując $G(x_2)$ z przyjętym modelem $\Phi(x_2)$ na 2. stopniu, łatwo zauważyć, że

$$a_2^{(1)*} = \gamma_1, \quad a_2^{(2)*} = \gamma_2.$$

Dla podejścia bezpośredniego

$$\bar{y} = a_2^{(0)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + a_2^{(2)},$$

gdzie $a_2^{(0)} = a_1^{(1)}$.

W wyniku minimalizacji względem $a_2^{(0)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}$ funkcji

$$Q(a_2) = E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} \left[\underline{y} - a_2^{(0)} \underline{x}_1 - a_2^{(1)} \underline{x}_2 - a_2^{(2)} \right]^2,$$

po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\tilde{a}_2^{(0)} = a_1^{(1)*}, \quad \tilde{a}_2^{(1)} = \gamma_1 = a_2^{(1)*}, \quad \tilde{a}_2^{(2)} = \gamma_2 = a_2^{(2)*}.$$

Przykład 3.3. Dane są takie, jak w przykładzie 3.2, przy założeniu $a_2^{(2)} = 0$, tzn.

$$\bar{y} = a_1^{(1)}x_1 + a_1^{(2)}, \quad \bar{a}_1^{(2)} = a_2^{(1)}x_2,$$

a przy podejściu bezpośrednim

$$\bar{y} = a_2^{(0)}x_1 + a_2^{(1)}x_2,$$

gdzie $a_2^{(0)} = a_1^{(1)}$.

Wartości $a_1^{(1)*}$ i $a_1^{(2)*}$ są oczywiście takie, jak w przykładzie poprzednim.

Dla 2. stopnia minimalizujemy względem $a_2^{(2)}$ funkcję

$$Q_2(a_2) = E_{\underline{x}_2} [a_1^{(2)} - a_2^{(1)}x_2]^2.$$

Po wstawieniu $a_1^{(2)}$ i przekształceniach otrzymamy

$$a_2^{(1)*} = \gamma_1 + \gamma_2 \frac{m_2}{m_2^2 + \sigma_2^2},$$

gdzie γ_1 i γ_2 są takie, jak w przykładzie 3.2,

$$\gamma_2 = m_0 - m_1\gamma_0 - m_2\gamma_1, \quad \gamma_0 = a_1^{(1)*}.$$

Przy podejściu bezpośrednim minimalizujemy względem $a_2^{(0)}$, $a_2^{(1)}$ funkcję

$$Q(a_2) = E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} [\underline{y} - a_2^{(0)}\underline{x}_1 - a_2^{(1)}\underline{x}_2]^2.$$

Po przekształceniach otrzymamy następujący wynik:

$$\tilde{a}_2^{(0)} = \gamma_0 + \gamma_2 \frac{m_1(\sigma_2^2 + m_2^2) - m_2(\mu_{12} + m_1m_2)}{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_{12} + m_1m_2)^2},$$

$$\tilde{a}_2^{(1)} = \gamma_1 + \gamma_2 \frac{m_2(\sigma_1^2 + m_1^2) - m_1(\mu_{12} + m_1m_2)}{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_{12} + m_1m_2)^2}.$$

3.3. Porównanie podejścia dwustopniowego i bezpośredniego

Sformułujemy obecnie i udowodnimy twierdzenie podające wystarczający warunek równoważności obu podejść. Sens tego twierdzenia polega na tym, że jeśli zależność (3.4) otrzymana w wyniku identyfikacji na 1. stopniu ma tę samą postać, co założony model (3.2) na 2. stopniu, to oba podejścia są równoważne.

Twierdzenie 3.1. Załóżmy, że rozwiązania zadań minimalizacji funkcji (3.3), (3.5) i (3.7), tj. odpowiednio $a_1^* = G(x_2)$, a_2^* , $\tilde{a}_2$ - są jednoznaczne. Jeśli istnieje taka wartość $a_2 \in \mathcal{A}_2$, że

$$\bigwedge_{x_2 \in \mathcal{X}_2} G(x_2) = \Phi_2(x_2, b), \quad (3.31)$$

$$\text{to } \tilde{a}_2 = a_2^* = b.$$

DOWÓD. Zauważmy, że jeśli a_2^* jest rozwiązaniem jednoznacznym, to $a_2^* = b$, bo tylko wtedy Q_2 przyjmuje minimalną wartość równą zeru. Wystarczy wykazać, że $\tilde{a}_2 = b$. Zgodnie z (3.31)

$$\begin{aligned} \min_{a_1 \in \mathcal{A}_1, \underline{y}} E \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, a_1)] \mid x_2 \} &= \\ &= E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, G(x_2))] \mid x_2 \} = \\ &= E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, \Phi_2(x_2, b))] \mid x_2 \} = \\ &= \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, \Phi_2(x_2, a_2))] \mid x_2 \}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że wynik minimalizacji względem a_2 w ostatnim wyrażeniu równa się b i nie zależy od x_2 . Identyczny jest zatem wynik minimalizacji wartości oczekiwanej tego wyrażenia względem $\underline{x}_2$, czyli

$$\begin{aligned} \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, \Phi_2(\underline{x}_2, a_2))] \} &= \\ &= \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} E_{\underline{x}_2} \left\{ E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, \Phi_2(\underline{x}_2, a_2))] \mid x_2 \} \right\} = \\ &= E_{\underline{x}_2} \left\{ \min_{a_2 \in \mathcal{A}_2} E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \{ q_1[\underline{y}, \Phi_1(\underline{x}_1, \Phi_2(\underline{x}_2, a_2))] \mid x_2 \} \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Porównując pierwszą minimalizację w (3.32) z (3.7) po wstawieniu (3.6) i uwzględniając jednoznaczność rozwiązania tego zadania $\tilde{a}_2$, otrzymujemy zatem $\tilde{a}_2 = b = a_2^*$

Q. E. D.

Zauważmy, że w przykładzie 3.2 spełniony był wystarczający warunek równoważności, tzn. $G(x_2)$ i $\Phi(x_2)$ miały tę samą postać liniową. Stąd podejście dwustopniowe i bezpośrednie dało te same wyniki.

W przypadku liniowo-kwadratowym łatwo pokazać, że równoważność występuje dla niezależnych wejść na obu stopniach.

Twierdzenie 3.2. Jeśli dla przypadku liniowo-kwadratowego zmienne losowe $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ są stochastycznie niezależne, to $a_2^* = \tilde{a}_2$.

DOWÓD. W dowodzie skorzystamy z zapisu (3.19) oraz ze znanych własności iloczynu Kroneckera [24]:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD, (A \otimes B)e = Ae \otimes B, \quad (3.33)$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \quad (3.34)$$

gdzie A, B, C, D są macierzami, e jest wektorem kolumnowym.

Po wstawieniu (3.16) do (3.17) i skorzystaniu z zapisu (3.19) oraz założenia o niezależności otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_2^* = & \left\{ E_{\underline{x}_2} \left[(I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2)(I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \times \right. \\ & \times E_{\underline{x}_2} \left\{ (I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2) \left(E_{\underline{x}_1} \left[(I_1 \otimes \underline{x}_1)(I_1 \otimes \underline{x}_1^T) \right] \right)^{-1} \times \right. \\ & \times E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left. \left. \left[(I_1 \otimes \underline{x}_1) \underline{y} | \underline{x}_2 \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wyrażenie (3.35) przekształcamy korzystając w odpowiednich miejscach z własności (3.33) i (3.34):

$$\begin{aligned} a_2^* = & \left\{ I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} E_{\underline{x}_2} \left\{ (I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2) \times \right. \\ & \times \left(I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1} \right) E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left. \left[(\underline{y} \otimes \underline{x}_1) | \underline{x}_2 \right] \right\} = \\ = & \left\{ I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} E_{\underline{x}_2} \left\{ \left(I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1} \otimes \underline{x}_2 \right) \times \right. \\ & \times E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left. \left[(\underline{y} \otimes \underline{x}_1) | \underline{x}_2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu możemy w odpowiednich miejscach dopisać macierze jednostkowe odpowiednich stopni, potrzebne do dalszych przekształceń, a następnie skorzystać z pierwszej własności (3.33), w której C i B są macierzami jednostkowymi:

$$\begin{aligned} a_2^* = & \left\{ I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} E_{\underline{x}_2} \left\{ \left[(I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1}) \times \right. \right. \\ & \times (I_1 \otimes I_{s_1}) \otimes I_{s_2} \underline{x}_2 \left. \left. \right] E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left[(\underline{y} \otimes \underline{x}_1) | \underline{x}_2 \right] \right\} = \\ = & \left\{ I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} \left(I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1} \otimes I_{s_2} \right) \times \\ & \times E_{\underline{x}_2} \left\{ (I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2) E_{\underline{x}_1, \underline{y}} \left[(\underline{y} \otimes \underline{x}_1) | \underline{x}_2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Korzystając z (3.33) wykonujemy dalsze przekształcenia:

$$a_2^* = \left\{ I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} (\underline{y} \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2).$$

Do wyrażenia (3.18) wstawiamy (3.19) i przekształcamy, korzystając w odpowiednich miejscach z własności (3.33) i (3.34):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= \left\{ E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2} \left[(I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2) (I_1 \otimes \underline{x}_1) (I_1 \otimes \underline{x}_1^T) (I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2^T) \right] \right\}^{-1} \times \\ &\times E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} \left[(I_1 \otimes I_{s_1} \otimes \underline{x}_2) (I_1 \otimes \underline{x}_1) \underline{y} \right] = \\ &= \left\{ E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2} \left[(I_1 \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) (I_1 \otimes \underline{x}_1^T \otimes \underline{x}_2^T) \right] \right\}^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} \left[(I_1 \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) \underline{y} \right] = \\ &= \left\{ E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2} \left[I_1 \otimes (\underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) (\underline{x}_1^T \otimes \underline{x}_2^T) \right] \right\}^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} (\underline{y} \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) = \\ &= \left[I_1 \otimes E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \otimes E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} (\underline{y} \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) = \\ &= \left\{ I_1 \otimes \left[E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1 \underline{x}_1^T) \right]^{-1} \otimes \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \right\} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} (\underline{y} \otimes \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2) = a_2^* \end{aligned}$$

Q. E. D.

Równoważność łatwo sprawdzić wprost dla przypadku (3.20). Wówczas po wstawieniu (3.2) do (3.22) dostajemy

$$\begin{aligned} a_2^* &= \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} \frac{E_{\underline{x}_2} \left[\underline{x}_2 E_{\underline{x}_1, \underline{y}} (\underline{x}_1 \underline{y} | \underline{x}_2) \right]}{E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1^2)} = \\ &= \frac{1}{E_{\underline{x}_1} (\underline{x}_1^2)} \left[E_{\underline{x}_2} (\underline{x}_2 \underline{x}_2^T) \right]^{-1} E_{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}} (\underline{x}_2 \underline{x}_1 \underline{y}) = \tilde{a}_2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku jednowymiarowym dla nieskorelowanych zmiennych $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ równoważność zauważyliśmy już w przykładzie 3.1 dla rozkładu normalnego.

Nie zawsze wyniki identyfikacji dwustopniowej i bezpośredniej są identyczne. Dokładniej mówiąc, wartość a_2^* otrzymana w wyniku dwustopniowej optymalizacji modelu może być gorsza niż wartość optymalna $\tilde{a}_2$, czyli wartość kryterium identyfikacji (3.7) dla $a_2 = a_2^*$ może być większa niż dla $a_2 = \tilde{a}_2$. To samo powiedzieć można w sytuacji empirycznej, bowiem wartości a_{2m} i $\tilde{a}_{2m}$ traktować należy jak przybliżenia odpowiednio a_2^* i $\tilde{a}_2$. Dla porównania podejścia dwustopniowego i bezpośredniego wprowadzić można wskaźnik

$$\delta = \frac{Q(a_2^*) - Q(\tilde{a}_2)}{Q(a_2^*)}. \quad (3.36)$$

Przykład 3.4

Powróćmy do przykładu 3.3 i zauważmy, że dla $\gamma_2 = 0$ zachodzi równoważność, tzn. $a_2^{(1)*} = \tilde{a}_2^{(1)}$. Jeśli natomiast $\gamma_2 \neq 0$, to na ogół $a_2^{(1)*} \neq \tilde{a}_2^{(1)}$. W rozpatrywanym przykładzie można wyznaczyć analitycznie wzory określające $Q(a_2^{(1)*})$ i $Q(\tilde{a}_2^{(1)})$ przez wstawienie wyznaczonych poprzednio wartości $a_2^{(1)*}$ i $\tilde{a}_2^{(1)}$. Po przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} Q(a_2^{(1)*}) &= \sigma_0^2 + m_0^2 - 2\gamma_0(\mu_{10} + m_0 m_1) - 2\left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{m_2}{m_2^2 + \sigma_2^2}\right) \times \\ &\times (\mu_{20} + m_0 m_2) + \gamma_0^2(\sigma_1^2 + m_1^2) + 2\gamma_0\left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{m_2}{m_2^2 + \sigma_2^2}\right) + \\ &+ (\sigma_2^2 + m_2^2)\left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{m_2}{m_2^2 + \sigma_2^2}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} Q(a_2^{(1)*}) - Q(\tilde{a}_2^{(1)}) &= \gamma_2 \left\{ 2\gamma_0 \left[m_1 - \frac{m_2}{m_2^2 + \sigma_2^2} (\mu_{12} + m_1 m_2) \right] + \right. \\ &+ \gamma_2 \left[\frac{m_1^2 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2 - 2\mu_{12} m_1 m_2}{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_{12} + m_1 m_2)^2} - \frac{m_2^2}{(m_2^2 + \sigma_2^2)^2} \right] + \\ &+ 2 \frac{m_2(\mu_{20} + m_0 m_2)}{\sigma_2^2 + m_2^2} - \frac{[m_1(\sigma_2^2 + m_2^2) - m_2(\mu_{12} + m_1 m_2)](\mu_{10} + m_0 m_1)}{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_{12} + m_1 m_2)^2} + \\ &\left. - 2 \frac{[m_2(\sigma_1^2 + m_1^2) - m_1(\mu_{12} + m_1 m_2)](\mu_{20} + m_0 m_2)}{(m_1^2 + \sigma_1^2)(m_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_{12} + m_1 m_2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Po wstawieniu do (3.36) możemy wyznaczyć wartość δ dla danych wartości liczbowych poszczególnych momentów.

3.4. Wyniki eksperymentów obliczeniowych

Skomplikowana postać zależności δ od rozpatrywanych parametrów (momentów) w przykładzie 3.4 nie pozwala zorientować się w charakterze wpływu tych parametrów na wartość wskaźnika δ . W tym celu można

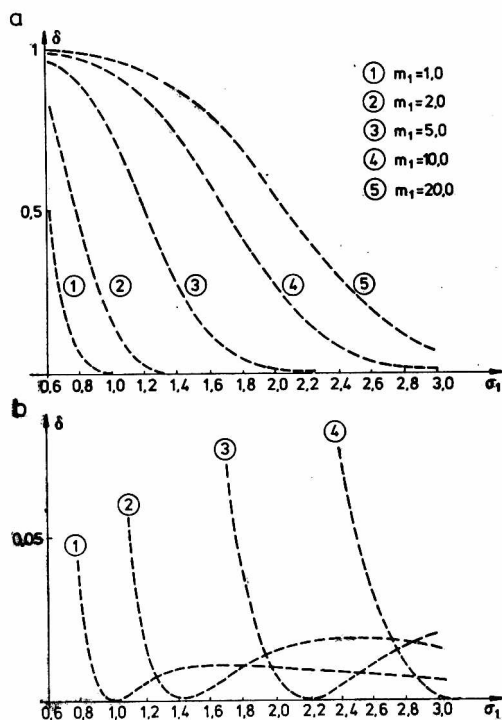
przeprowadzać "eksperymenty obliczeniowe", tzn. wyliczać wartości δ dla różnych wartości interesującego nas parametru i uzyskiwać wykresy ilustrujące zależność δ od wybranego parametru, pozwalające na wyciągnięcie pewnych wniosków o charakterze jakościowym. Obliczenia przeprowadzono za pomocą mikrokomputera IMP 85, dla którego opracowano programy według wzorów w przykładzie 3.4.

Do obliczeń przyjęto następujące wartości wstępne parametrów:

$$m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(oznaczenia momentów jak w przykładzie 3.1). Następnie zmieniano poszczególne parametry w zakresie: $m_0, m_1, m_2 \in (0, 100)$; $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in (0.5, 10)$, $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{12} \in (-0.5, 1)$. W poszczególnych przypadkach zmieniano jeden z parametrów w powyższym zakresie przy pozostałych parametrach stałych, równych wartościom wstępnym. Uzyskiwano kilka wykresów dla kilku stałych wartości jednego z pozostałych parametrów.

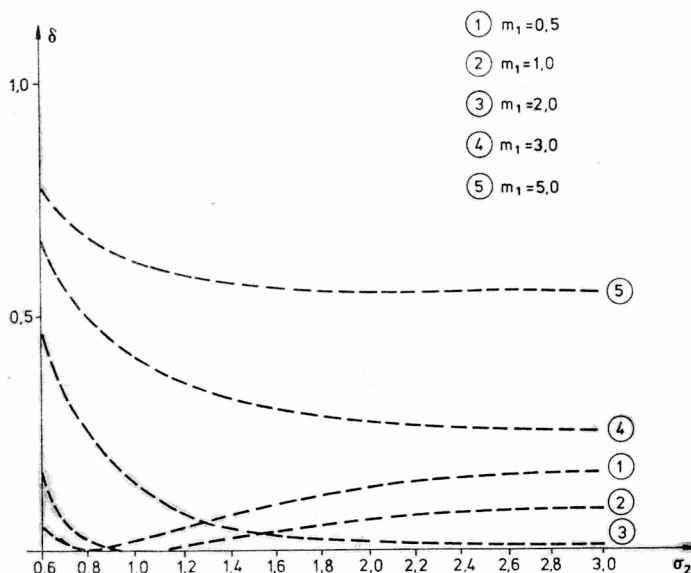
Rozpatrzono następujące przypadki:



Rys. 3.2. Zależność wskaźnika δ od σ_1
Fig. 3.2. Dependence of the index δ on σ_1

1. Badano zależność δ od σ_1 dla wartości $m_1 = 1, 2, 5, 10, 20$. Wynik ilustrowano na wykresie (rys. 3.2). Wykres na rys. 3.2b przedstawia powiększenie zależności δ od σ_1 dla małych wartości δ . Z przeprowadzonych eksperymentów dla rozpatrywanego przykładu można wyciągnąć następujące wnioski: Dla $m_1/\sigma_1^2 \gg 1$ różnica względna między podejściem dwustopniowym i bezpośrednim jest duża (rys. 3.2a), dla $m_1/\sigma_1^2 \approx 1$, $\delta \approx 0$ (rys. 3.2b), a dla $m_1/\sigma_1^2 \ll 1$, δ dąży do zera. Zauważmy, że dla $m_1/\sigma_1^2 = 1$ $\gamma_2 = 0$ i wówczas w rozpatrywanym przykładzie podejście bezpośrednie i dwustopniowe jest równoważne. Ponadto dla ustalonych parametrów rozkładu $m_2/\sigma_2^2 = 1$. Tak więc dla małych wartości $\sigma_1, m_1/\sigma_1^2 \gg \gg m_2/\sigma_2^2$. Oznacza to, że rozrzut $\underline{x}_1$ jest znacznie mniejszy niż rozrzut $\underline{x}_2$. Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie, po zastosowaniu podejścia dwustopniowego, nie uwzględniono na drugim stopniu zmienności parametru modelu występującego przy $\underline{x}_1$, błąd względny jest duży. Natomiast dla dużych wartości $\sigma_1, m_1/\sigma_1^2 \ll m_2/\sigma_2^2$ rozrzut $\underline{x}_2$ jest znacznie mniejszy niż rozrzut $\underline{x}_1$. Mały rozrzut $\underline{x}_2$ przy dużym rozrzucie $\underline{x}_1$ powoduje, że drugi stopień dla parametru modelu występującego przy $\underline{x}_1$ nie ma istotnego znaczenia i wówczas rozwiązanie otrzymane w wyniku zastosowania podejścia dwustopniowego jest bliskie rozwiązaniu uzyskanemu przy podejściu bezpośrednim.

2. Badano zależność δ od σ_2 , gdy $m_1 = 0.5, 1, 2, 3, 5$. Odpowiednią zależność pokazano na rys. 3.3.

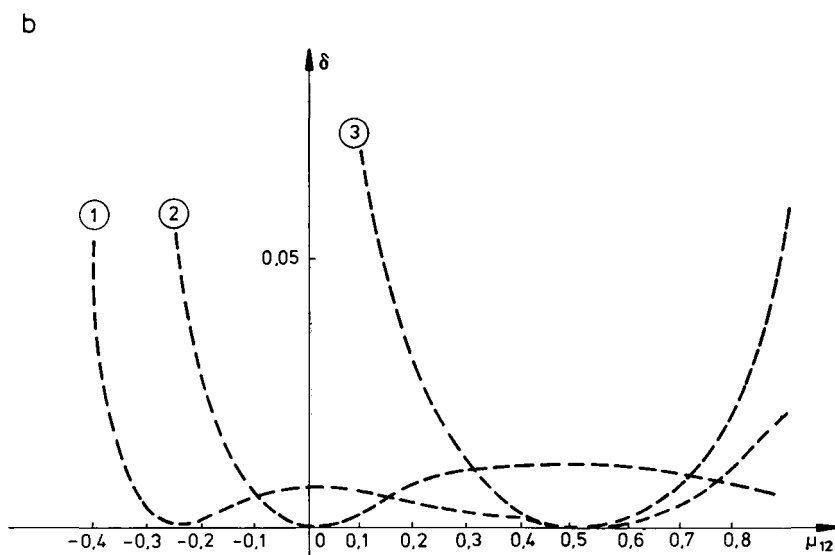
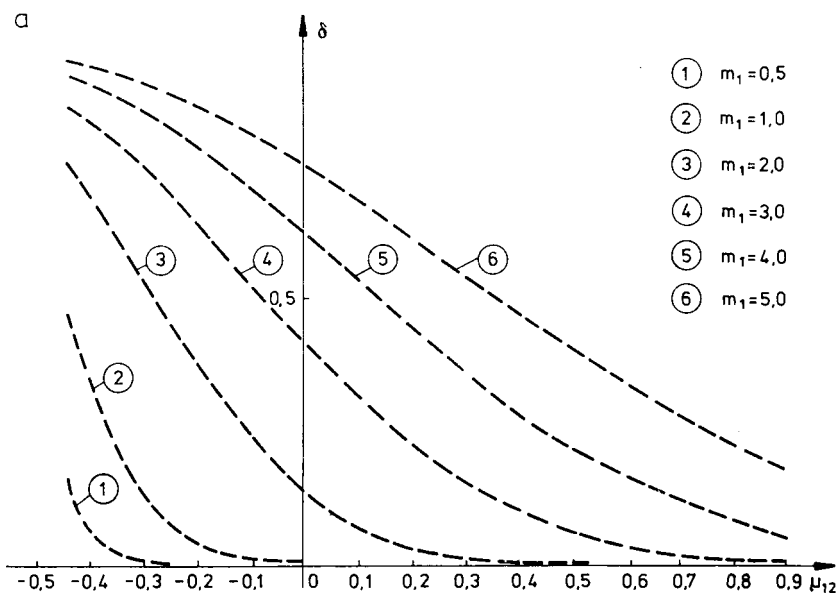


Rys. 3.3. Zależność wskaźnika δ od σ_2
 Fig. 3.3. Dependence of index δ on σ_2

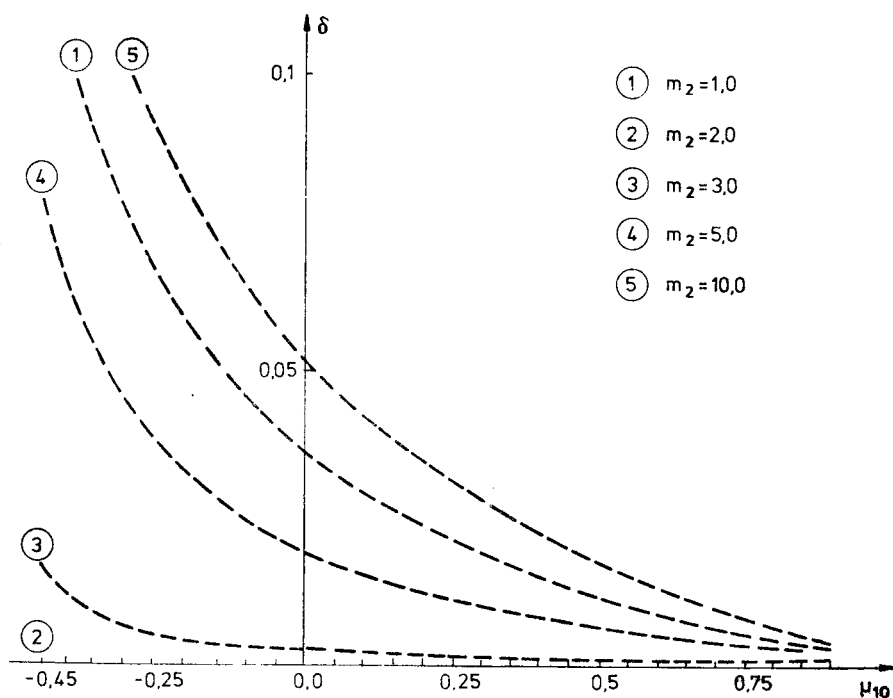
Z eksperymentów przeprowadzonych dla rozpatrywanego przykładu można wysunąć następujące wnioski: Ze wzrostem wartości σ_2 wartość błędu względnego δ ustala się na pewnym poziomie zależnym od wartości m_1 . I tak dla $m_1 < 2$ (krzywa 1, 2 na rys. 3.3) oraz wartości σ_2 takich, że $m_1/\sigma_1^2 \approx m_2/\sigma_2^2$, wskaźnik δ jest bliski zeru. W tym przypadku można zauważyć, że jeżeli rozrzut $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ jest porównywalny, to $\gamma_2 \approx 0$. Natomiast dla σ_2 rosnącego wartość wskaźnika ustala się. W rozpatrywanym przedziale dla m_1 rosnących ustalona wartość wskaźnika δ maleje. Dla $m_1 = 2$ można zauważyć, że γ_2 dąży do zera, gdy σ_2 dąży do nieskończoności. Wskaźnik δ dla dużych wartości σ_2 jest bliski zeru (krzywa 3 na rys. 3.3). Dla $m > 2$ ze wzrostem m_1 ustalony poziom wskaźnika δ rośnie. Spowodowane to jest tym, że ze wzrostem m_1 maleje współczynnik rozrzutu $\underline{x}_1$. Ustalanie się wskaźnika δ na pewnym poziomie zależnym od m_1 można uzasadnić tym, że dla ustalonego m_1 ze wzrostem σ_2 rozrzut $\underline{x}_2$ jest coraz większy w stosunku do rozrzutu $\underline{x}_1$, a gdy zastosowano podejście dwustopniowe, nie uwzględniono zmienności parametru modelu występującego przy $\underline{x}_1$. Wówczas podejście dwustopniowe wnosi pewien systematyczny błąd (zależny od m_1), który zaobserwowano badając wskaźnik δ .

3. Badano zależność δ od μ_{12} , gdy $m_1 = 0.5, 1, 2, 3, 4$. Uzyskaną zależność zilustrowano wykresem na rys. 3.4. Wykres na rys. 3.4b jest powiększeniem zależności δ od μ_{12} dla małych wartości δ . Z przeprowadzonych eksperymentów dla rozpatrywanego przykładu można wyciągnąć następujące wnioski: Dla wartości $m_1 \approx 1$ wskaźnik δ jest bliski zeru w całym przedziale zmienności μ_{12} (rys. 3.4b), a to dlatego, że w tym przypadku $m_1/\sigma_1^2 \approx m_2/\sigma_2^2$ i wówczas $\gamma_2 \approx 0$, co powoduje, że podejście bezpośrednie i dwustopniowe daje porównywalne wyniki. Natomiast dla większych m_1 ze wzrostem korelacji między $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ wskaźnik δ maleje. W tym przypadku stosując podejście dwustopniowe, mimo iż na drugim stopniu nie uwzględniamy zmienności parametru modelu występującego przy $\underline{x}_1$, nie popełniamy dużego błędu, gdyż $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_2$ są silnie skorelowane. Dlatego parametr $a_1^{(1)*}$ wyznaczony na pierwszym stopniu i $a_2^{(1)*}$ wyznaczony na stopniu drugim są bliskie odpowiednio parametrom $\tilde{a}_2^{(0)}$ i $\tilde{a}_2^{(1)}$ wyznaczonym przy podejściu bezpośrednim. Ponadto zauważmy, że wskaźnik δ rośnie ze wzrostem m_1 dla ustalonego μ_{12} . Jest to analogiczna sytuacja jak podczas badania zależności δ od σ_1 przy różnych m_1 (wówczas przyjęto $\mu_{12} = 0$). Ze wzrostem m_1 współczynnik rozrzutu $\underline{x}_1$ jest coraz mniejszy od współczynnika rozrzutu $\underline{x}_2$, a wówczas podejście dwustopniowe wnosi duży błąd.

4. Badano zależność δ od μ_{10} , gdy $m_2 = 1, 2, 3, 5, 10$. Wykres 3.5 ilustruje uzyskaną zależność. Z przeprowadzonych badań eksperymentalnych dla rozpatrywanego przykładu można wysunąć następujące wnioski:



Rys. 3.4. Zależność wskaźnika δ od μ_{12}
 Fig. 3.4. Dependence of the index δ on μ_{12}



Rys. 3.5. Zależność wskaźnika δ od μ_{10}
 Fig. 3.5. Dependence of the index δ on μ_{10}

Dla $m_2 = 2$ $\delta = 0$, gdyż dla ustalonych pozostałych parametrów $\gamma_2 = 0$, co daje równowagę obu podejść. Natomiast dla pozostałych m_2 ze wzrostem korelacji między y i x_1 wskaźnik δ maleje. Podobnie jak w poprzednim przypadku, silne skorelowanie y i x_1 powoduje, iż podejście dwustopniowe nie wnosi dużego błędu, mimo iż na drugim stopniu nie uwzględniono zmienności parametru modelu występującego przy x_1 . Silne skorelowanie y i x_1 powoduje, że wystarczająco dokładnie wyznaczono parametr $a_1^{(1)*}$ na pierwszym stopniu. Tak więc parametry uzyskane metodą bezpośrednią i dwustopniową są porównywalne dla silnie skorelowanych y i x_1 . Dla ustalonego μ_{10} wskaźnik δ maleje wraz ze wzrostem m_2 dla $m_2 = 2$ $\delta = 0$, a następnie δ rośnie ze wzrostem m_2 . Zauważmy, że podobny przebieg ma γ_2 wtedy, gdy zmienia się m_2 , a wartość γ_2 ma istotny wpływ na różnicę obu podejść.

3.5. Przypadek systemu dynamicznego

Uwagi ogólne o różnych możliwościach formułowania zadań dwustopniowego wyboru optymalnego modelu są analogiczne do przedstawionych na wstępie p. 2.4. Pełne rozpatrzenie różnych przypadków w tym zakresie

wymaga oddzielnego opracowania i pokonania nowych, istotnych trudności. Obecnie ograniczymy się tylko do przypadku liniowo-kwadratowego z założeniem, że sygnały wejściowe i wyjściowe na 1. stopniu są realizacjami procesów stochastycznych stacjonarnych. Założymy również, że drugi stopień jest statyczny, postać charakterystyki czasowej obiektu na 1. stopniu jest ta sama dla różnych x_2 , natomiast wartość x_2 wpływa na pewien parametr tej charakterystyki. Warto zauważyć, że jest to przypadek odpowiadający częstym realnym sytuacjom praktycznym, w których x_2 zmienia się na tyle wolno, że w jednym takcie identyfikacji na 2. stopniu możliwe jest przeprowadzenie praktycznie "pełnej" identyfikacji na 1. stopniu (lub na 1. stopniu mamy wręcz do czynienia ze zbiorem różnych realnych obiektów o różnych wartościach x_2 - por. interpretacje podejścia dwustopniowego w rozdz. 1). Jednocześnie własności dynamiczne obiektu na 1. stopniu są stosunkowo proste i wartość x_2 wpływa tylko na wartość pewnego parametru charakterystyki czasowej bez zmiany rzędu obiektu, np. dla obiektu pierwszego rzędu na 1. stopniu od wartości x_2 może zależeć np. wzmocnienie lub stała czasowa. Dodatkową interpretację takiej sytuacji można znaleźć w p. 1.4, gdzie x_2 oznacza wielkość zasobu lub rozmiar zadania podczas sterowania na drugim poziomie.

W celu uproszczenia zapisu ograniczymy się do przypadku jednowymiarowego na 1. stopniu ($s_1 = 1 = r_1 = 1$, $s_2 = r_2 > 1$). Rozważania można jednak uogólnić na przypadek wielowymiarowy, podobnie jak dla systemu statycznego. Zgodnie z założeniami modele na obu stopniach są następujące:

$$\bar{y}_{ij} = \sum_{l=1}^i k_{i-l}(a_{lj})x_{1lj} \quad (\text{por. (2.54)}), \quad (3.39)$$

$$\bar{a}_{1j} = a_2^T x_{2j}, \quad (3.40)$$

gdzie $k_i(a_{lj})$ jest charakterystyką czasową (dyskretną odpowiedzią impulsową) z wyróżnionym parametrem a_{lj} , którego zależność od x_2 jest przedmiotem identyfikacji na 2. stopniu. Zakładamy, że dla każdego j oraz dowolnych $i_1, i_2, \dots, i_p$ wartości

$$(x_{1i_1j}, y_{i_1j}; x_{1i_2j}, y_{i_2j}; \dots; x_{1i_pj}, y_{i_pj}; x_{2j})$$

są wartościami zmiennych losowych

$$(x_{1i_1j}, y_{i_1j}; x_{1i_2j}, y_{i_2j}; \dots; x_{1i_pj}, y_{i_pj}; x_{2j}),$$

tzn. istnieją odpowiednie łączne rozkłady prawdopodobieństwa; y_{ij} są wartościami wyjściowymi obiektu na 1. stopniu. Zakładamy ponadto, że

dla każdego j ($\underline{x}_{1ij}, \underline{y}_{ij}$) jest dyskretnym procesem stochastycznym stacjonarnym.

Kryterium jakości modelu na 1. stopniu ma postać

$$Q_1 = E (\underline{y}_{ij} - \underline{y}_{ij})^2$$

i zgodnie z założeniem o stacjonarności nie zależy od i . Jak wiadomo [10] - optymalna charakterystyka czasowa spełnia następujące równanie sumacyjne:

$$R_{yx_1}[s, x_2] = \sum_{l=1}^{\infty} k_1(a_1) R_{x_1x_1}[s-l, x_2], \quad (3.41)$$

gdzie R_{yx_1} i $R_{x_1x_1}$ oznaczają odpowiednie dyskretnie funkcje korelacji, tzn.

$$R_{x_1x_1}[s, x_2] = E (\underline{x}_{1i} \underline{x}_{1i+s} | x_2),$$

$$R_{yx_1}[s, x_2] = E (\underline{y}_{i+s} \underline{x}_{1i} | x_2),$$

gdzie $\underline{x}_{1i}, \underline{y}_i$ są zmiennymi $\underline{x}_{1ij}, \underline{y}_{ij}$ dla wartości $x_{2j} = x_2$.

Optymalna wartość a_2^* wyznaczona na 2. stopniu przy kryterium kwadratowym wyraża się znanym wzorem

$$a_2^* = \left[E \begin{pmatrix} \underline{x}_2 \underline{x}_2^T \end{pmatrix} \right]^{-1} E \begin{pmatrix} \underline{x}_2 a_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

gdzie a_1^* jest wartością a_1 dla optymalnej charakterystyki czasowej na 1. stopniu. Przy wyznaczeniu k_1 oraz a_2^* występują istotne trudności: konieczność rozwiązania równania sumacyjnego (3.41) oraz wyznaczenie drugiej wartości oczekiwanej w (3.42); moment ten nie jest bowiem dany wprost, lecz może być wyznaczony po rozwiązaniu zadania na 1. stopniu. Druga trudność jest podobna jak w przypadku statycznym, pierwszą pokonujemy natomiast uzyskując rozwiązanie przybliżone dla układu równań algebraicznych przy skończonej granicy sumowania w (3.41). Trudności są mniejsze w sytuacji empirycznej, gdy zamiast $R_{x_1x_1}$ i R_{yx_1} posługujemy się empirycznymi funkcjami korelacji dla skończonego czasu obserwacji. W wyniku rozwiązania odpowiedniego równania algebraicznego [10] otrzymujemy skończoną liczbę wartości $k_1(a_{1j})$ i ostatecznie wartość a_{1j} dla wartości x_{2j} na 2. stopniu. Wówczas na 2. stopniu posługujemy się algorytmem identyfikacji (3.29).

Zadanie upraszcza się znacznie, jeśli x_{1ij} dla każdego j jest tzw. dyskretnym białym szumem o funkcji autokorelacji

$$R_{x_1 x_1}[s] = \begin{cases} 1 & \text{dla } s = 0 \\ 0 & \text{dla } s \neq 0 \end{cases}.$$

Wówczas, jak wiadomo, optymalna charakterystyka czasowa jest następująca:

$$k_i = R_{y x_1}[i, x_2]$$

dla $i \geq 0$.

Przykład 3.5

Niech x_{1ij} będzie dyskretnym białym szumem, natomiast

$$R_{y x_1}[i, x_2] = c \left| \exp \left(- \frac{i}{x_2^2} \right) \right|, \quad c > 0,$$

$s_2 = r_2 = 1$, tzn. $a_1 = a_2 x_2$.

Optymalna charakterystyka czasowa na 1. stopniu jest zatem następująca:

$$k_i = c \exp \left(- \frac{i}{x_2^2} \right),$$

czyli jest to dyskretny człon inercyjny pierwszego rzędu o wzmacnieniu $c x_2^2$ i stałej czasowej x_2^2 przy założeniu okresu dyskretyzacji równego 1. Niech $a_1^* = x_2^2$, tzn. należy znaleźć optymalne liniowe przybliżenie zależności stałej czasowej na 1. stopniu od wartości x_2 na 2. stopniu. Minimalizując

$$Q_2(a_2) = E_{x_2} [(x_2^2 - a_2 x_2)^2]$$

względem a_2 otrzymujemy

$$a_2^* = \frac{E(x_2^3)}{E(x_2^2)}.$$

Przy nieznajomości odpowiednich momentów x_2 obserwujemy kolejne wartości x_{2j} i stosujemy algorytm identyfikacji na 2. stopniu

$$a_{2m} = \frac{\sum_{j=1}^m x_{2j}^3}{\sum_{j=1}^m x_{2j}^2}.$$

3.6. Uwagi o identyfikacji wielostopniowej

Zgodnie z przyjętym zakresem pracy ograniczymy się tylko do pewnych uwag dotyczących możliwości uogólnienia na zadanie wielostopniowego wyboru optymalnego modelu. Rozpatrzmy system statyczny o N stopniach z zaproponowanymi modelami poszczególnych stopni o postaci

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, a_1),$$

$$\bar{a}_1 = \Phi_2(x_2, a_2),$$

$$\bar{a}_2 = \Phi_3(x_3, a_3),$$

$$\vdots$$

$$\bar{a}_{N-1} = \Phi_N(x_N, a_N),$$

czyli na k -tym stopniu

$$\bar{a}_{k-1} = \Phi_k(x_k, a_k) \text{ dla } k = 1, 2, \dots, N; \bar{a}_0 = \bar{y}, x_k \in \mathcal{X}_k.$$

Zakładamy, że $x_1, x_2, \dots, x_N, y$ są wartościami zmiennych losowych $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N, \underline{y})$, dla których istnieje łączna gęstość prawdopodobieństwa $f(x_1, x_2, \dots, x_N, y)$.

Definicja 3.4. Model na k -tym stopniu ($k = 2, 3, \dots, N$) nazwiemy modelem optymalnym dla $a_k = a_k^*$ minimalizującego kryterium jakości identyfikacji

$$\begin{aligned} Q_k(a_k) &= E_{\underline{x}_k} \left[q_k(a_{k-1}^*, \bar{a}_{k-1}) | x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N \right] = \\ &= \int_{\mathcal{X}_k} q_k \left[G_{k-1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_N), \Phi_k(x_k, a_k) \right] f_k(x_k | x_{k+1}, \dots, x_N) dx_k, \end{aligned}$$

gdzie q_k jest funkcją taką jak w def. 3.1 i 3.2 ■

Dla $k = 1$ określenie optymalnego modelu podaje definicja 3.1. W wyniku minimalizacji Q_k otrzymujemy

$$a_k^* = G_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N).$$

Jest to najlepsza w sensie probabilistycznym aproksymacja funkcji G_{k-1} przez zadaną parametrycznie zależność Φ_k .

Definicja 3.5. Model bezpośredni

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, \Phi_2(x_2, \dots, \Phi_N(x_N, a_N)) \dots) \triangleq \Phi(x_1, x_2, \dots, x_N; a_N)$$

nazwiemy modelem optymalnym dla $a_N = \tilde{a}_N$ minimalizującego kryterium jakości identyfikacji

$$Q(a_N) = \int_{x_1, \dots, x_N, y} [q_1(y, \bar{y})] = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_N} \int_y q_1[y, \Phi(x_1, x_2, \dots, x_N; a_N)] \times \\ \times f(x_1, x_2, \dots, x_N, y) dx_1 dx_2 \dots dx_N dy \quad \blacksquare$$

Dla większej liczby stopni oczywiście rosną komplikacje analityczne i obliczeniowe w zadaniu wyznaczania optymalnego modelu wartości parametrów a_k dla pełnej informacji probabilistycznej oraz komplikacje z organizacją i wykonaniem eksperymentów (a zwłaszcza z organizacją zbiorów danych) w sytuacji empirycznej, podobnie jak to zaznaczyliśmy w p. 2.5. Sytuacja empiryczna jest tu bowiem taka, jak w zadaniu estymacji wielostopniowej.

Również dla przypadku wielostopniowego rozpatrywać można równoważność podejścia wielostopniowego i bezpośredniego podczas wyznaczania optymalnego modelu na ostatnim stopniu, tzn. $a_N^* = \tilde{a}_N$. Jeśli równoważność taka nie zachodzi, można wprowadzić wskaźnik δ oceniający różnicę jakości modeli, tak jak w p. 3.3 dla $N = 2$. Łatwo wykazać, że jeśli dla poszczególnych stopni a_k zależy tylko od x_{k+1} , tzn.

$$a_k^* = G_k(x_{k+1})$$

oraz $\Phi_{k+1}(x_{k+1}, a_{k+1})$ ma postać taką samą jak G_k w sensie sprecyzowanym w twierdzeniu 3.1 dla $k = 1$, to $a_N^* = \tilde{a}_N$. Dla liczby stopni wyższych niż 2 jest to jednak założenie bardzo mocne (chodzi o zależność tylko od x_{k+1}).

Dla jednowymiarowego przypadku liniowo-kwadratowego łatwo wykazać równoważność dla niezależnych zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_N$. Niech

$$\bar{y} = a_1 x_1,$$

$$\bar{a}_{k-1} = a_k x_k \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots, N.$$

Ponieważ równoważność zachodzi dla $N = 2$ (p. 3.3), zatem wystarczy wykazać, że z równoważności dla k stopni wynika równoważność dla $k + 1$ stopni ($k \geq 2$). Zauważmy, że

$$\bar{y} = a_k x_1 x_2 \dots x_k,$$

zatem

$$\tilde{z}_k = \frac{\int_{x_1, \dots, x_k, y} (x_1 x_2 \dots x_k y)}{\int_{x_1} (x_1^2) \int_{x_2} (x_2^2) \dots \int_{x_k} (x_k^2)} \dots$$

ponieważ $\bar{a}_k = a_{k+1} x_{k+1}$, zatem

$$a_{k+1}^* = \frac{E \frac{(a_{k-k+1}^* x_{k+1})}{x_{k+1}}}{E \frac{(x_{k+1}^2)}{x_{k+1}}}.$$

Po wstawieniu $a_k^* = \tilde{a}_k$ otrzymamy

$$a_{k+1}^* = \frac{E \frac{x_{k+1} [x_{k+1} E (x_1 x_2 \dots x_k y)]}{x_{k+1}}}{E \frac{(x_1^2)}{x_1} E \frac{(x_2^2)}{x_2} \dots E \frac{(x_{k+1}^2)}{x_{k+1}}} = \tilde{a}_{k+1},$$

czego należało dowieść.

4. PRZYKŁADY TECHNICZNYCH ZASTOSOWAŃ IDENTYFIKACJI DWUSTOPNIOWEJ

W rozdziale tym przedstawiono zadania identyfikacji dwustopniowej kolumny destylacyjnej oraz obcowzbudnego silnika prądu stałego. Przykłady te ilustrują rozważania ogólne opisane w poprzednich rozdziałach. Dla kolumny destylacyjnej z wypełnieniem badano wpływ parametrów przepływu pulsacyjnego na proces wymiany masy. W tym przypadku korzystano z metody identyfikacji dwustopniowej oraz uogólnienia na przypadek identyfikacji trójstopniowej. Przedstawiono wyniki eksperymentu, modele matematyczne badanego procesu, algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń. Kolejny przykład dotyczy badania charakterystyk obcowzbudnego silnika prądu stałego. Opisano zadanie modelowania i identyfikacji charakterystyk statycznych oraz własności dynamicznych tego silnika z wykorzystaniem podejścia dwustopniowego. Dla konkretnych silników przedstawiono wyniki badań symulacyjnych, modele, wyniki pomiarów, algorytmy i wyniki identyfikacji.

4.1. Identyfikacja dwustopniowa kolumny destylacyjnej z wypełnieniem oraz przepływem pulsacyjnym

4.1.1. Opis problemu

Jednym z parametrów charakteryzujących pracę kolumny destylacyjnej jest objętościowy współczynnik przenikania masy. Dla danej kolumny jest on stały. Zależy przede wszystkim od parametrów geometrycznych kolumny oraz natężenia przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę. Jednym ze sposobów intensyfikacji wymiany masy jest wywołanie okresowych drgań w mieszaninie przepływającej przez kolumnę [36] (rys. 4.1). Drgania te

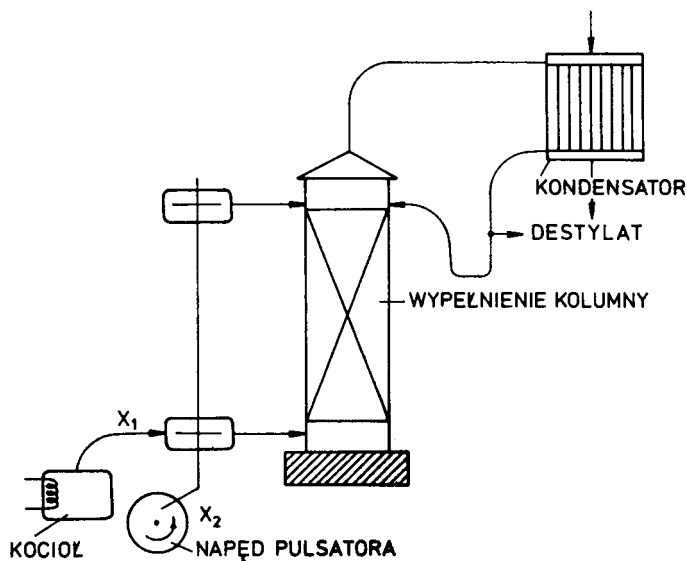
powodują wzrost burzliwości w obrębie obu faz, zakłócają stabilność warstw na styku faz, zmniejszają grubość tych warstw, a tym samym zmniejszają sumaryczny opór przenikania masy. Pojawia się konieczność badania wpływu parametrów pulsacji na objętościowy współczynnik przenikania masy. Dla konkretnych zastosowań wystarczy badać przyrost współczynnika wymiany masy spowodowany pulsacją. Wprowadźmy oznaczenia:

- x_1 - natężenie przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę ($\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$),
- x_2 - częstotliwość pulsacji (s^{-1}),
- v, v_0 - objętościowy współczynnik przenikania masy dla kolumny z pulsatorem i bez pulsatora ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{h}^{-1}$),
- y - przyrost objętościowego współczynnika przenikania masy spowodowany pulsacją, $y \triangleq v - v_0$.

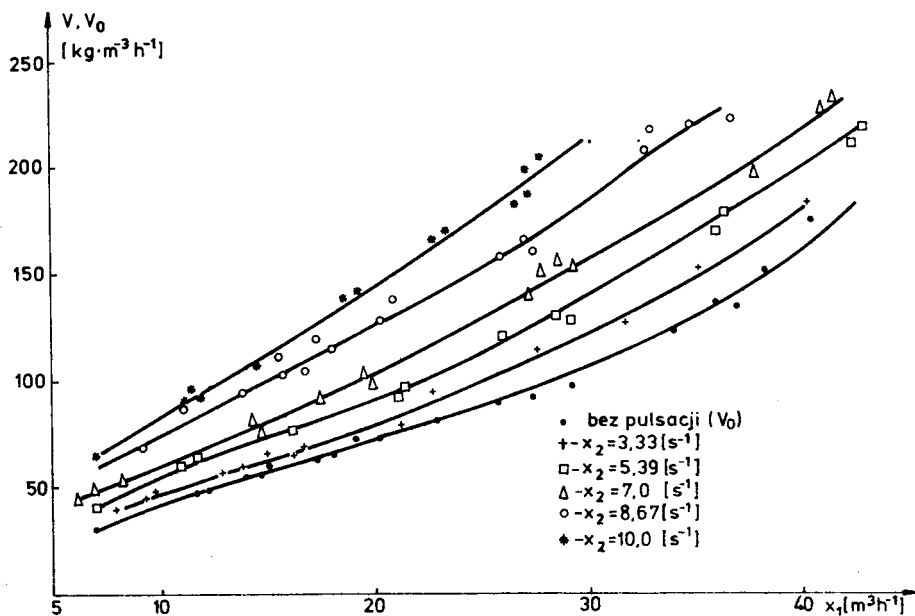
W tym przypadku zadanie identyfikacji polega na wyznaczeniu zależności między natężeniem przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę, częstotliwością pulsacji, a przyrostem objętościowego współczynnika masy, tj. należy ustalić zależność między x_1 , x_2 , oraz y , a konkretnie należy podać funkcję Φ w (3.6) oraz na podstawie danych pomiarowych wyznaczyć optymalne parametry tego modelu. W celu rozwiązania tego zadania można zastosować metodę identyfikacji dwustopniowej. Przyjmijmy natężenie przepływu destylowanej mieszaniny za wejście na 1. stopniu, a przyrost współczynnika przenikania masy za wyjście badanego obiektu. Wówczas zadanie identyfikacji na 1. stopniu polega na zbadaniu zależności między tymi wielkościami, a konkretnie na ustaleniu funkcji Φ_1 w modelu (3.1) i wyznaczeniu jego optymalnych parametrów. Odpowiednie zadanie identyfikacji na 2. stopniu polega na zbadaniu zależności między częstotliwością pulsacji a parametrami a_1 wyznaczonymi na 1. stopniu, czyli na ustaleniu funkcji Φ_2 w modelu (3.2) i jego optymalnych parametrów. Częstotliwość pulsacji jest tu wejściem na 2. stopniu. Po złożeniu funkcji Φ_1 i Φ_2 otrzymamy poszukiwaną zależność między natężeniem przepływu, częstotliwością pulsacji, a przyrostem współczynnika wymiany masy. Zależność tę możemy teraz badać metodą bezpośrednią. Zadanie identyfikacji na 1. i 2. stopniu możemy potraktować jako zadanie pomocnicze podczas ustalania postaci funkcji Φ , a optymalne parametry modelu wyznaczone na 2. stopniu jako parametry funkcji Φ wyznaczone metodą dwustopniową.

4.1.2. Opis danych pomiarowych

Badania eksperymentalne wykonano dla kolumny destylacyjnej o wysokości 1 m i średnicy 0,15 m z wypełnieniem pierścieniami typu Raschiga. Do badań użyto mieszaniny 80% n-heptanu i 20% toluenu. W pierwszym kro-



Rys. 4.1. Kolumna destylacyjna z pulsatorem
Fig. 4.1. Distillation column with pulsator



Rys. 4.2. Zależność objętościowego współczynnika przenikania masy v od natężenia przepływu x_1 dla różnych częstotliwości pulsacji x_2
Fig. 4.2. Mass exchange coefficient v versus flow rate x_1 for different vibration frequency x_2

ku dla kolumny bez pulsacji dla różnych wartości natężenia przepływu zmierzono stężenie mieszaniny n-heptan-toluen na wyjściu kolumny. Na tej podstawie wyznaczono objętościowy współczynnik wymiany masy dla różnych wartości natężenia przepływu. Następnie eksperyment powtórzono dla różnych częstotliwości pulsacji. Pomiarzy wykonano w Instytucie Inżynierii Chemicznej i Urządzeń Ciepłych Politechniki Wrocławskiej. Wyniki pomiarów przedstawiono w tab. 4.1 oraz na rys. 4.2.

Tabela 4.1

Amplituda pulsacji = 0,045 m m = 5, n = 20

j	Bez pulsacji (1)		$x_{21} = 3.33$ (2)		$x_{22} = 5.39$ (3)		$x_{23} = 7.00$ (4)		$x_{24} = 8.67$ (5)		$x_{25} = 10.00$ (6)	
	x_{110}	v_{10}	x_{111}	v_{11}	x_{112}	v_{12}	x_{113}	v_{13}	x_{114}	v_{14}	x_{115}	v_{15}
1	6.9	27.4	7.1	39.4	5.4	40.7	6.1	45.5	9.2	69.4	7.3	68.3
2	8.4	36.8	7.2	38.7	6.5	43.3	7.7	50.2	12.2	91.2	7.4	61.9
3	12.2	48.5	9.5	46.1	11.2	60.0	8.9	58.9	12.6	92.8	11.3	92.4
4	11.6	47.5	10.0	48.8	11.6	83.5	14.2	84.0	13.9	95.8	11.2	90.5
5	13.9	56.3	13.3	57.5	15.0	78.5	14.7	77.7	15.8	112.3	11.4	99.3
6	15.1	60.8	14.0	60.1	16.2	77.9	17.5	93.2	45.9	102.4	11.4	89.7
7	14.8	55.3	15.2	64.2	20.9	94.2	17.6	95.7	17.0	108.4	11.4	94.2
8	17.5	62.5	16.1	66.6	21.0	96.2	19.5	105.5	17.7	121.6	11.9	95.6
9	18.0	64.5	17.0	69.3	21.3	85.1	19.6	101.2	18.0	120.4	14.4	110.7
10	19.2	72.9	17.3	66.6	26.2	121.4	27.0	149.4	15.1	121.6	14.4	105.4
11	20.3	73.1	19.2	77.6	28.4	122.8	27.3	141.0	20.5	128.2	14.4	107.7
12	22.9	83.2	23.0	92.0	28.6	132.8	27.8	154.6	20.9	139.5	18.8	140.6
13	25.9	90.4	23.1	117.9	29.1	131.5	28.2	156.0	26.2	159.9	19.1	141.5
14	27.6	92.1	28.3	119.3	36.4	179.3	28.6	158.4	26.6	164.5	19.2	135.1
15	29.4	97.5	31.8	127.2	36.3	171.7	29.4	154.0	27.4	166.4	23.5	173.5
16	34.3	124.4	36.4	152.7	42.8	213.6	29.6	154.6	27.6	163.3	23.2	166.1
17	36.0	138.3	36.5	148.5	42.6	195.5	37.8	201.0	33.1	219.2	26.9	185.4
18	37.0	136.1	40.7	180.1	43.9	212.1	37.9	196.3	33.0	208.3	27.2	190.4
19	38.3	152.4	46.7	242.4	45.1	231.0	41.3	231.5	35.1	221.3	27.5	203.1
20	40.5	177.4	46.8	249.9	47.0	253.8	41.5	234.0	37.1	221.9	27.7	204.2

Wprowadźmy oznaczenia:

- v_{i0} - wartość objętościowego współczynnika przenikania masy dla zadanego natężenia przepływu x_{1i0} dla kolumny bez pulsacji, $i = 1, 2, \dots, n$,
 n - liczba punktów pomiarowych,
 v_{ij} - wartość objętościowego współczynnika przenikania masy dla zadanego natężenia przepływu x_{1ij} oraz zadanej częstotliwości pulsacji x_{2j} ,
 $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$,
 m - liczba zadanych częstotliwości pulsacji.

Zwróćmy uwagę, że wartości współczynnika przenikania masy spowodowanego pulsacją są wyznaczone niekoniecznie dla tych samych wielkości natężenia przepływu co wartości współczynnika przenikania masy bez pulsacji (tj. $x_{1i0} \neq x_{1ij}$ tab. 4.1). Spowodowane to jest względami technicznymi. W celu wyznaczenia przyrostu współczynnika przenikania masy dla zadanych wielkości natężenia przepływu należy rozwiązać pomocnicze zadanie identyfikacji, polegające na wyznaczeniu zależności między współczynnikiem przenikania masy dla kolumny bez pulsacji a natężeniem przepływu, tj. należy wyznaczyć optymalny wektor parametrów modelu

$$\bar{v}_0 = \Phi_0(x_1, a_0) = a_0^{(2)} x_1^{a_0^{(1)}}, \quad (4.1)$$

gdzie $a_0 = [a_0^{(1)} a_0^{(2)}]^T$ - wektor nieznanych parametrów, $\bar{v}_0$ - wyjście modelu.

Postać funkcji Φ_0 ustalamy na podstawie analizy danych pomiarowych (rys. 4.2). Przyjmujemy kryterium jakości identyfikacji

$$Q_0(a_0) = \sum_{i=1}^n \left[\ln v_{i0} - \ln \left(a_0^{(2)} x_{1i0}^{a_0^{(1)}} \right) \right]^2. \quad (4.2)$$

Powyższa logarytmiczna postać kryterium pozwala na analityczne wyznaczenie algorytmu identyfikacji. W wyniku minimalizacji (4.2) względem a_0 otrzymujemy

$$a_{0n} = \begin{bmatrix} a_{0n}^{(1)} \\ a_{0n}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0n}^{(1)'} \\ \exp a_{0n}^{(2)'} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

gdzie a_{0n} - optymalny wektor parametrów modelu (4.1),

$$a_{0n}' = \begin{bmatrix} a_{0n}^{(1)'} & a_{0n}^{(2)'} \end{bmatrix}^T, \quad a_{0n}' = M_{0n}^{-1} b_{0n}, \quad M_{0n} \triangleq \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_{1i0}) \varphi_0^T(x_{1i0}),$$

$$b_{0n} \triangleq \sum_{i=1}^n \varphi_0(x_{1i0}) \ln v_{i0}, \quad \varphi_0(x_{1i0}) \triangleq \begin{bmatrix} \ln x_{1i0} & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Dla danych pomiarowych przedstawionych w kolumnie (1) tab. 4.1 otrzymujemy $a_{On}^{(1)} = 0.90$, $a_{On}^{(2)} = 4.97$, a optymalny model (4.1) ma postać

$$\Phi_0(x_1, a_{On}) = 4.97 x_1^{0.9}.$$

Powyższą zależność użyjemy do wyznaczenia przyrostu współczynnika przenikania masy spowodowanego pulsacją o częstotliwości x_{2j} dla zadanego przepływu x_{1ij} , tj. wyliczamy

$$y_{ij} = v_{ij} - \Phi_0(x_{1ij}, a_{On}),$$

gdzie y_{ij} - wartość przyrostu tego współczynnika. Tak obliczone wartości y_{ij} wykorzystamy w dalszych rozważaniach.

4.1.3. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń

Na podstawie analizy zmian wartości przyrostu objętościowego współczynnika przenikania masy dla różnych wartości natężenia przepływu oraz ustalonej częstotliwości pulsacji proponujemy następującą postać funkcji Φ_1 w modelu na 1. stopniu

$$\Phi_1(x_1, a_1) = a_1^{(2)} x_1^{a_1^{(1)}}, \quad (4.4)$$

gdzie $a_1 = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)}]^T$ - wektor nieznanymi parametrów.

Zadanie identyfikacji na 1. stopniu sprowadza się do wyznaczenia optymalnych parametrów $a_1^{(1)}$ i $a_1^{(2)}$ dla ustalonej częstotliwości pulsacji (tj. $x_2 = x_{2j}$). Przyjmujemy następujące kryterium jakości identyfikacji na 1. stopniu

$$Q_{1j}(a_1) = \sum_{i=1}^n \left[\ln y_{ij} - \ln \left(a_1^{(2)} x_{1ij}^{a_1^{(1)}} \right) \right]^2. \quad (4.5)$$

Wówczas optymalny wektor parametrów modelu (4.4), minimalizujący kryterium (4.5), wyznaczamy ze wzoru

$$a_{1nj} = \begin{bmatrix} a_{1nj}^{(1)} \\ a_{1nj}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{1j}^{(1)}}{B_{1j}} \\ \exp \left(\frac{A_{1j}^{(2)}}{B_{1j}} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

gdzie a_{1nj} - optymalny wektor parametrów modelu (4.4),

$$A_{1j}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \ln y_{ij} \ln x_{1ij} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln y_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln x_{1ij} \right),$$

$$A_{1j}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{1ij} \sum_{i=1}^n \ln y_{ij} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln x_{1ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln y_{ij} \ln x_{1ij} \right),$$

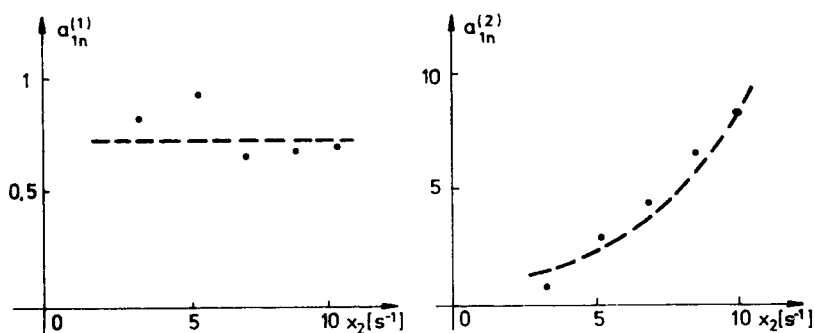
$$B_{1j} = \sum_{i=1}^n \ln^2 x_{1ij} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln x_{1ij} \right)^2.$$

Jest to algorytm identyfikacji na 1. stopniu.

Dla danych eksperymentalnych przedstawionych w tab. 4.1 wyznaczono optymalne parametry modelu (4.4) dla różnych częstotliwości pulsacji. Wyniki przedstawiono w tab. 4.2 oraz na rys. 4.3.

Tabela 4.2

j	1	2	3	4	5
x_{2j}	3.33	5.33	7.00	8.67	10.0
$a_{1nj}^{(1)}$	0.861	0.988	0.687	0.700	0.721
$a_{1nj}^{(2)}$	0.783	2.799	4.729	6.845	8.342



Rys. 4.3. Zależność optymalnych parametrów modelu na 1. stopniu a_1 od częstotliwości pulsacji x_2

Fig. 4.3. Dependence of the 1-st stage optimal model parameter a_1 on the vibration frequency x_2

Na podstawie analizy zmian parametrów optymalnego modelu (4.4) przy zmianie częstotliwości pulsacji zaproponowano następującą postać funkcji Φ_2

$$\Phi_2(x_2, a_2) = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(3)} x_2 a_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

gdzie $a_2 = [a_2^{(1)} \ a_2^{(2)} \ a_2^{(3)}]^T$ - wektor nieznanych parametrów. Jest to model na 2. stopniu, a zadanie identyfikacji na 2. stopniu polega na wyznaczeniu optymalnych parametrów tego modelu. Na 2. stopniu przyjmujemy następujące kryterium jakości identyfikacji:

$$\Phi_2(a_2) = \sum_{j=1}^m \left[(a_{1nj}^{(1)} - a_2^{(1)})^2 + (\ln a_{1nj}^{(2)} - \ln a_2^{(3)} - a_2^{(2)} \ln x_{2j})^2 \right]. \quad (4.8)$$

W wyniku minimalizacji kryterium (4.8) względem a_2 otrzymujemy

$$a_{2m} = \begin{bmatrix} a_{2m}^{(1)} \\ a_{2m}^{(2)} \\ a_{2m}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(1)} \\ \frac{A_2^{(1)}}{B_2} \\ \exp \left(\frac{A_2^{(2)}}{B_2} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

gdzie a_{2m} - optymalny wektor parametrów modelu (4.7),

$$A_2^{(1)} = \sum_{j=1}^m \ln a_{1nj}^{(2)} \ln x_{2j} - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m \ln a_{1nj}^{(2)} \right) \left(\sum_{j=1}^m \ln x_{2j} \right),$$

$$A_2^{(2)} = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m \ln^2 x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m \ln a_{1nj}^{(2)} \right) - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m \ln x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m \ln a_{1nj}^{(2)} \ln x_{2j} \right),$$

$$B_2 = \sum_{j=1}^m \ln^2 x_{2j} - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m \ln x_{2j} \right)^2.$$

Jest to algorytm identyfikacji na 2. stopniu.

Dla danych z (tab. 4.2)

$$a_{2m}^{(1)} = 0.73, \ a_{2m}^{(2)} = 2.23, \ a_{2m}^{(3)} = 0.06.$$

Zatem optymalny model (4.7) ma postać

$$\Phi_2(x_2, a_{2m}) = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 0.06 x_2^{2.23} \end{bmatrix}.$$

Po złożeniu modeli (4.4) i (4.7) otrzymamy optymalny model przyrostu objętościowego współczynnika przenikania masy

$$\Phi(x_1, x_2, a_{2m}) \triangleq \Phi_1(x_1, \Phi_2(x_2, a_{2m})) = 0.06 x_2^{2.23} x_1^{0.73}$$

wyznaczony metodą dwustopniową.

Optymalne parametry tego modelu możemy wyznaczyć metodą bezpośrednią, proponując funkcję Φ w postaci

$$\Phi(x_1, x_2, a_2) = a_2^{(3)} x_2^{a_2^{(2)}} x_1^{a_2^{(1)}}, \quad (4.10)$$

gdzie $a_2 = [a_2^{(1)} \ a_2^{(2)} \ a_2^{(3)}]^T$ - wektor parametrów modelu.

Początkowo trudno było na podstawie analizy danych eksperymentalnych ustalić taki model. Dopiero wyniki identyfikacji na pierwszym stopniu oraz złożenie modeli (4.4) i (4.7) pozwoliły na określenie klasy modeli opisujących przyrost objętościowego współczynnika przenikania masy spowodowany pulsacją. W wyniku minimalizacji bezpośredniego kryterium

$$Q(a_2) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left[\ln y_{ij} - \ln \left(a_2^{(3)} x_{2j}^{a_2^{(2)}} x_{1ij}^{a_2^{(1)}} \right) \right]^2 \quad (4.11)$$

względem a_2 otrzymujemy bezpośredni algorytm identyfikacji

$$\tilde{a}_{2m} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{2m}^{(1)} \\ \tilde{a}_{2m}^{(2)} \\ \tilde{a}_{2m}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_2^{(1)'} \\ \tilde{a}_2^{(2)'} \\ \exp \tilde{a}_2^{(3)'} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

gdzie $\tilde{a}_{2m}$ - optymalny wektor parametrów modelu wyznaczony metodą bezpośrednią,

$$\tilde{a}_2' = [\tilde{a}_2^{(1)'} \ \tilde{a}_2^{(2)'} \ \tilde{a}_2^{(3)'}]^T, \quad \tilde{a}_2' = M_{nm}^{-1} b_{nm},$$

$$M_{nm} \triangleq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \varphi(x_{1ij}, x_{2j}) \varphi^T(x_{1ij}, x_{2j}),$$

$$b_{nm} \cong \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \varphi(x_{1ij}, x_{2j}) \ln y_{ij},$$

$$\varphi(x_{1ij}, x_{2j}) \cong [\ln x_{1ij} \ln x_{2j} 1]^T.$$

Korzystając z algorytmu (4.12) dla danych pomiarowych (tab. 4.1) obliczamy $\tilde{a}_{2m}^{(1)} = 0.08$, $\tilde{a}_{2m}^{(2)} = 1.89$, $\tilde{a}_{2m}^{(3)} = 0.69$. Zatem optymalny model wyznaczony metodą bezpośrednią ma postać

$$\Phi(x_1, x_2, \tilde{a}_{2m}) = 0.08 x_2^{1.89} x_1^{0.69}.$$

Widać, że $a_{2m} \neq \tilde{a}_{2m}$. Dla porównania wyznaczono wartość wskaźnika δ określonego wzorem (3.36), w którym w miejsce a_2^* i $\tilde{a}_2$ wstawiono odpowiednio a_{2m} i $\tilde{a}_{2m}$. Wartość ta wynosi $\delta = 0.12$. Zauważmy, że w omawianym przykładzie różnica pomiędzy podejściem bezpośrednim i dwustopniowym jest duża. Spowodowana ona jest małą liczbą pomiarów na 2. stopniu (tj. małą liczbą różnych częstotliwości pulsacji) oraz zależnością między x_1 i x_2 (tj. dla różnych częstotliwości pulsacji ze względów technicznych zadawane były różne wartości przepływu mieszaniny przez kolumnę). Druga przyczyna nawet w prostym przypadku liniowym (przykład 3.1) powodowała różnice między tymi podejściami. Zastosowanie podejścia dwustopniowego pozwoliło jednak na wyznaczenie funkcji Φ_1 i Φ_2 (modeli (4.4) i (4.7)) na podstawie danych pomiarowych, a to z kolei ułatwiło ustalenie funkcji Φ w modelu bezpośrednim (4.10).

4.2. Uwzględnienie wpływu amplitudy pulsacji na objętościowy współczynnik przenikania masy - uogólnienie dla przypadku identyfikacji trójstopniowej

Innym parametrem pulsatora, który ma również wpływ na przyrost objętościowego współczynnika przenikania masy w kolumnie destylacyjnej omówionej w p. 4.1, jest amplituda pulsacji. Oznaczmy przez x_3 amplitudę pulsacji. W celu zbadania wpływu amplitudy pulsacji na przyrost objętościowego współczynnika przenikania masy można skorzystać z uogólnienia dla przypadku identyfikacji trójstopniowej. Wówczas na 3. stopniu należy zbadać zależność między wektorem parametrów a_2 modelu (4.7) a amplitudą pulsacji, tj. należy ustalić zależność

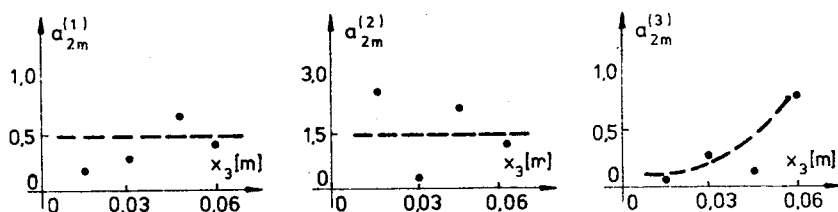
$$\bar{a}_2 = \Phi_3(x_3, a_3), \quad (4.13)$$

gdzie: $\bar{a}_2 = [\bar{a}_2^{(1)} \bar{a}_2^{(2)} \bar{a}_2^{(3)}]^T$ - wyjście modelu na 3. stopniu, a_3 - wektor parametrów modelu.

W celu ustalenia zależności (4.13) powtórzono badania eksperymentalne opisane w p. 4.1 oraz wyznaczono optymalne parametry modeli na 1. i 2. stopniu dla różnych wartości x_3 . Wyniki przedstawiono w tab. 4.3 i na rys. 4.4 (amplituda pulsacji jest podawana w metrach).

Tabela 4.3

k	x_{3k}	$a_{2mk}^{(1)}$	$a_{2mk}^{(2)}$	$a_{2mk}^{(3)}$
1	0.015	0.18	2.81	0.04
2	0.030	0.27	0.32	0.28
3	0.045	0.73	2.23	0.08
4	0.600	0.38	1.23	0.84



Rys. 4.4. Zależność optymalnych parametrów modelu na 2. stopniu a_2 od amplitudy pulsacji x_3 .

Fig. 4.4. Dependence of the 2-nd stage optimal model parameters a_2 on the vibration amplitude x_3 .

Wprowadźmy oznaczenia:

x_{3k} - k-ta wielkość amplitudy pulsacji,

a_{2mk} - optymalne wartości wektora parametrów modelu (4.7) dla k-tej wielkości amplitudy pulsacji,

$$a_{2mk} = [a_{2mk}^{(1)} \ a_{2mk}^{(2)} \ a_{2mk}^{(3)}]^T,$$

$k = 1, 2, \dots, p$

p - liczba zadanych wartości amplitudy pulsacji.

Na podstawie analizy wyników identyfikacji na 2. stopniu (rys. 4.4) można zaproponować model (4.15) w postaci

$$\Phi_3(x_3, a_3) = \begin{bmatrix} \bar{a}_2^{(1)} \\ \bar{a}_2^{(2)} \\ \bar{a}_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3^{(1)} \\ a_3^{(2)} \\ a_3^{(4)} x_3 a_3^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

gdzie $a_3 = [a_3^{(1)} a_3^{(2)} a_3^{(3)} a_3^{(4)}]^T$ - wektor parametrów modelu na 3. stopniu.

Optymalny wektor parametrów modelu (4.14) wyznaczamy przez minimalizację kryterium

$$Q_3(a_3) = \sum_{k=1}^p [(a_{2mk}^{(1)} - a_3^{(1)})^2 + (a_{2mk}^{(2)} - a_3^{(2)})^2 + \\ + (\ln a_{2mk}^{(3)} - \ln a_3^{(4)} - a_3^{(3)} \ln x_{3k})^2]$$

względem a_3 . W wyniku otrzymujemy algorytm identyfikacji na 3. stopniu

$$a_{3p} = \begin{bmatrix} a_{3p}^{(1)} \\ a_{3p}^{(2)} \\ a_{3p}^{(3)} \\ a_{3p}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a_{2mk}^{(1)} \\ \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a_{2mk}^{(2)} \\ \frac{A_{3p}^{(1)}}{B_{3p}} \\ \exp \left(\frac{A_{3p}^{(2)}}{B_{3p}} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

gdzie a_{3p} - optymalny wektor parametrów modelu (4.14),

$$A_{3p}^{(1)} = \sum_{k=1}^p \ln a_{2mk}^{(3)} \ln x_{3k} - \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^p \ln a_{2mk}^{(3)} \right) \left(\sum_{k=1}^p \ln x_{3k} \right),$$

$$A_{3p}^{(2)} = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^p \ln^2 x_{3k} \right) \left(\sum_{j=1}^m \ln a_{2mk}^{(3)} \right) - \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^p \ln x_{3k} \right) \left(\sum_{k=1}^p \ln a_{2mk}^{(3)} \ln x_{3k} \right),$$

$$B_{3p} = \sum_{k=1}^p \ln^2 x_{3k} - \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^p \ln x_{3k} \right)^2.$$

Dla danych z tab. 4.3 $a_{3p}^{(3)} = 0.39$, $a_{3p}^{(2)} = 1.67$, $a_{3p}^{(3)} = 1.67$, $a_{3p}^{(4)} = 49.56$. Optymalny model (4.14) ma postać

$$q_3(x_3 a_{3p}) = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 1.67 \\ 49.56 x_3^{1.67} \end{bmatrix},$$

a przyrost objętościowego współczynnika przenikania masy uwzględniający wpływ amplitudy pulsacji

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, a_{3p}) = \Phi_1(x_1, \Phi_2(x_2, \Phi_3(x_3, a_{3p}))) = 49.56 x_1^{0.39} x_2^{1.67} x_3^{1.67}.$$

4.3. Zastosowanie identyfikacji dwustopniowej do wyznaczania wpływu parametrów wypełnienia kolumny na objętościowy współczynnik przenikania masy

4.3.1. Opis problemu

Rozważmy kolumnę destylacyjną z wypełnieniem o przepływie pulsacyjnym (opisaną w p. 4.1). Jednym z parametrów wypełnienia, od którego zależy objętościowy współczynnik przenikania masy, jest średni opór przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę bez pulsacji. Opór ten jest stały dla danego wypełnienia kolumny. Pojawia się konieczność zbadania wpływu parametrów pulsacji na poprawę współczynnika przenikania masy dla kolumny z różnym wypełnieniem, a konkretnie należy ustalić, jak zmienia się przyrost tego współczynnika spowodowany pulsacją w zależności od średniego oporu przepływu charakteryzującego dane wypełnienie.

Wprowadźmy oznaczenia:

$x_1^{(1)}$ - natężenie przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę ($m^3 \cdot h^{-1}$),

$x_1^{(2)}$ - częstotliwość pulsacji (s^{-1}),

$x_1^{(3)}$ - amplituda pulsacji (m),

$x_1 = [x_1^{(1)} \ x_1^{(2)} \ x_1^{(3)}]^T$,

x_2 - średni opór przepływu destylowanej mieszaniny przez kolumnę bez pulsacji ($mm \ H_2O \cdot m^{-3} \cdot h$),

v, v_0 - objętościowy współczynnik przenikania masy przez kolumnę z pulsacją i bez pulsacji ($kg \cdot m^{-3} \cdot h^{-1}$),

y - przyrost współczynnika przenikania masy spowodowany pulsacją,
 $y \triangleq v - v_0$.

Przy zastosowaniu podejścia dwustopniowego należy rozwiązać następujące zadania: Na 1. stopniu dla kolumny z zadanyim wypełnieniem należy wyznaczyć zależność między natężeniem przepływu, częstotliwością i amplitudą pulsacji, a przyrostem współczynnika przenikania masy (tj. należy ustalić funkcję Φ_1 w modelu (3.1) dla obiektu, którego wejściami na 1. stopniu jest natężenie przepływu, częstotliwość i amplituda pulsacji, a wyjściem przyrost współczynnika przenikania masy). Na 2. stopniu należy zbadać zależność między średnim oporem przepływu a parametrami modelu na 1. stopniu (tj. należy ustalić funkcję Φ_2

w modelu (3.2) dla obiektu, którego wejściem na 2. stopniu jest średni opór przepływu, a wyjściem parametry modelu 1. stopnia).

Zwróćmy uwagę, że zadanie identyfikacji na 1. stopniu dotyczy pojedynczej kolumny z ustalonym wypełnieniem. W celu rozwiązania zadania na 2. stopniu należy powtórzyć zadanie identyfikacji na 1. stopniu dla różnych wypełnień (tj. zmiana wielkości wejściowej na 2. stopniu wymaga wymiany wypełnienia kolumny lub badania takiej samej kolumny z innym wypełnieniem o innym oporze przepływu). Jest to przykład przeszerzennej dekompozycji zadania identyfikacji. Na 1. stopniu badana jest pojedyncza kolumna z ustalonym wypełnieniem, a na 2. stopniu zbiór kolumn z różnymi wypełnieniami.

Badania eksperymentalne, mające na celu ustalenie zależności przyrostu współczynnika przenikania masy od wypełnienia kolumny, przeprowadzono w Instytucie Inżynierii Chemicznej Politechniki Wrocławskiej. Pomiarów wykonano dla kolumny opisanej w p. 4.1. Dla danego wypełnienia wyznaczono eksperymentalnie średni opór przepływu dla kolumny bez pulsacji. Następnie dla różnych wartości natężenia przepływu, częstotliwości i amplitudy pulsacji zmierzono stężenie mieszaniny na wyjściu kolumny. Na tej podstawie wyznaczono współczynnik przenikania masy, a korzystając z pomocniczego zadania identyfikacji - opisanego w p. 4.1.2 - obliczono przyrost tego współczynnika spowodowany pulsacją. Eksperyment powtórzono dla tej samej kolumny, wypełniając ją kolejno pierścieniami typu Raschiga, FALL, Białeckiego, I-13-II. Fragment danych pomiarowych dla pierścieni typu Raschiga zawiera tab. 4.1.

4.3.2. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w p. 4.1 i 4.2 dla ustalonego wypełnienia ($x_2 = x_{2j}$) proponujemy następującą postać modelu na 1. stopniu:

$$\Phi_1(x_1, a_1) = a_1^{(4)}(x_1^{(1)})^{a_1^{(1)}}(x_1^{(2)})^{a_1^{(2)}}(x_1^{(3)})^{a_1^{(3)}}, \quad (4.16)$$

gdzie $a_1 = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)} \ a_1^{(3)} \ a_1^{(4)}]^T$ - wektor nieznanymi parametrów modelu.

Przyjmijmy kryterium jakości identyfikacji na 1. stopniu

$$Q_{1j}(a_1) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln y_{ij} - \ln \left[a_1^{(4)} (x_{1ij}^{(1)})^{a_1^{(1)}} (x_{1ij}^{(2)})^{a_1^{(2)}} (x_{1ij}^{(3)})^{a_1^{(3)}} \right] \right\}^2, \quad (4.17)$$

gdzie $x_{1ij}^{(1)}$, $x_{1ij}^{(2)}$, $x_{1ij}^{(3)}$ - odpowiednio i-ta wielkość natężenia przepływu, częstotliwość i amplituda pulsacji dla j-tego wypełnienia kolumny, y_{ij} przyrost współczynnika wymiany masy odpowiadający tym wielkościom,

$i = 1, 2, \dots, n$, n - liczba punktów pomiarowych na 1. stopniu. W wyniku minimalizacji (4.17) względem a_1 otrzymujemy algorytm identyfikacji na 1. stopniu postaci

$$a_{1nj} = \begin{bmatrix} a_{1nj}^{(1)} \\ a_{1nj}^{(2)} \\ a_{1nj}^{(3)} \\ a_{1nj}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j}^{(1)'} \\ a_{1j}^{(2)'} \\ a_{1j}^{(3)'} \\ \exp a_{1j}^{(4)'} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

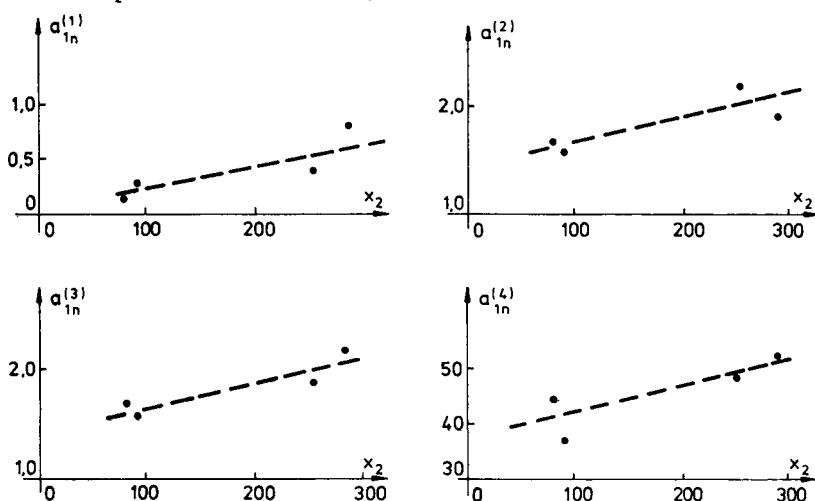
gdzie a_{1nj} - optymalny wektor parametrów modelu (4.16) dla j -tego wypełnienia,

$$a'_{1j} = [a_{1j}^{(1)'} \ a_{1j}^{(2)'} \ a_{1j}^{(3)'} \ a_{1j}^{(4)'}]^T, \quad a'_{1j} = M_{nj}^{-1} b_{nj},$$

$$M_{nj} \triangleq \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_{1ij}) \varphi_1^T(x_{1ij}), \quad b_{nj} = \sum_{i=1}^n \ln y_{ij} \varphi_1(x_{1ij}),$$

$$\varphi_1(x_{1ij}) \triangleq [\ln x_{1ij}^{(1)} \ \ln x_{1ij}^{(2)} \ \ln x_{1ij}^{(3)} \ 1]^T.$$

Dla danych uzyskanych w wyniku eksperymentu obliczono optymalne parametry modelu (4.16) dla kolejnych wypełnień. Wyniki obliczeń zebrano w tab. 4.4 i przedstawiono na rys. 4.5.



Rys. 4.5. Zależność optymalnych parametrów modelu na 1. stopniu a_1 od średniego oporu przepływu x_3

Fig. 4.5. Dependence of the 1-st stage optimal model parameters a_1 on the mean flow resistance x_3

Tabela 4.4

j	Nazwa pierścieni	x_{2j}	$a_{1nj}^{(1)}$	$a_{1nj}^{(2)}$	$a_{1nj}^{(3)}$	$a_{1nj}^{(4)}$
1	PALL	81.20	0.155	1.325	1.688	46.02
2	Raschiga	91.77	0.256	1.232	1.599	36.75
3	I-13-II	255.91	0.410	1.382	1.903	49.39
4	Białeckiego	288.89	0.784	1.269	2.203	50.45

Na podstawie analizy wyników przedstawionych w tab. 4.4 i na rys. 4.5 proponujemy następujący model na 2. stopniu

$$\Phi_2(x_2, a_2) = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(1)} \\ \bar{a}_1^{(2)} \\ \bar{a}_1^{(3)} \\ \bar{a}_1^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21}^{(1)} x_2 + a_{21}^{(2)} \\ a_{22} \\ a_{23}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(2)} \\ a_{24}^{(1)} x_2 + a_{24}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

gdzie $a_2 = [a_{21}^{(1)} \ a_{21}^{(2)} \ a_{22} \ a_{23}^{(1)} \ a_{23}^{(2)} \ a_{24}^{(1)} \ a_{24}^{(2)}]^T$ - wektor nieznanych parametrów modelu. Na 2. stopniu przyjęto kryterium jakości identyfikacji o postaci

$$Q_2(a_2) = \sum_{j=1}^m [a_{1nj} - \Phi_2(x_{2j}, a_2)]^T [a_{1nj} - \Phi_2(x_{2j}, a_2)]. \quad (4.20)$$

Minimalizując je względem wektora a_2 otrzymujemy algorytm identyfikacji na 2. stopniu. Tak więc składowe optymalnego wektora modelu (4.19) wyznaczamy za pomocą algorytmu

$$a_{2km}^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(k)} x_{2j} - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(k)} \right) \left(\sum_{j=1}^m x_{2j} \right)}{\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m x_{2j} \right)^2}, \quad k = 1, 3, 4 \quad (4.21)$$

$$a_{2km}^{(2)} = \frac{\frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(k)} \right) \left(\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 \right) - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(k)} x_{2j} \right)}{\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m x_{2j} \right)^2}.$$

$$k = 1, 3, 4, \quad (4.22)$$

$$a_{22m} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(2)}}{m}, \quad (4.23)$$

gdzie $a_{2m} = [a_{21m}^{(1)} a_{21m}^{(2)} a_{22} a_{23m}^{(1)} a_{23m}^{(2)} a_{24m}^{(1)} a_{24m}^{(2)}]^T$ - optymalny wektor modelu (4.19). Dla danych z tab. 4.4 otrzymujemy $a_{21m}^{(1)} = 0.002$, $a_{21m}^{(2)} = 0.01$, $a_{22m} = 1.28$, $a_{23m}^{(1)} = 0.0023$, $a_{23m}^{(2)} = 1.43$, $a_{24m}^{(1)} = 0.04$, $a_{24m}^{(2)} = 37.73$. Optymalny model (4.19) ma postać

$$\Phi_2(x_2, a_{2m}) = \begin{bmatrix} 0.002x_2 + 0.01 \\ 1.28 \\ 0.0023x_2 + 1.43 \\ 0.04x_2 + 37.73 \end{bmatrix}.$$

Po złożeniu modeli (4.16) i (4.19) otrzymujemy

$$\Phi(x_1, x_2, a_{2m}) = (0.04x_2 + 37.73)(x_1^{(1)})0.002x_2 + 0.01 \times \\ \times (x_1^{(2)})1.28(x_1^{(3)})0.0023x_2 + 1.43.$$

Jest to wyznaczony metodą dwustopniową optymalny model przyrostu współczynnika przenikania masy, spowodowany pulsacją dla kolumn z różnym wypełnieniem o oporze przepływu x_2 .

4.4. Zastosowanie podejścia dwustopniowego do modelowania i identyfikacji charakterystyk statycznych obcowzbudnego silnika prądu stałego

4.4.1. Opis problemu

Przedmiotem rozważań w tym punkcie jest zastosowanie podejścia dwustopniowego do modelowania i identyfikacji obcowzbudnego silnika prądu stałego. W badaniach zakładać będziemy, że sterowanie odbywa się za pomocą zmiany napięcia twornika. Ten sposób sterowania ma wiele zalet w porównaniu ze sterowaniem przez zmianę napięcia wzbudzenia (m.in. lepsza reakcja na zaburzenia, mniejsza elektromechaniczna stała czasowa). Aby wykorzystać ten silnik w konkretnych układach, konieczna jest znajomość jego charakterystyki statycznej opisującej zależność między prędkością obrotową silnika a napięciem twornika i obciążeniem. Przy założeniu, że strumień wzbudzenia jest stały, można przyjąć, iż model ten jest liniowy. Wprowadźmy oznaczenia:

y - prędkość obrotowa silnika (obr min^{-1}).

x_1 - napięcie twornika (V),

x_2 - moment obciążenia (N·m).

Charakterystykę statyczną tego silnika możemy zapisać w postaci

$$\bar{y} = \Phi(x_1, x_2, a_2) = a_2^{(0)} x_1 + a_2^{(1)} x_2, \quad (4.24)$$

gdzie $\bar{y}$ - wyjście modelu, $a_2 = [a_2^{(0)} \ a_2^{(1)}]^T$ - wektor parametrów modelu.

Wektor parametrów a_2 można w przybliżeniu wyznaczyć na podstawie danych katalogowych

$$a_{2k}^{(0)} = \frac{n_{zn}}{U_{tzn} - R_t I_{zn}}, \quad (4.25)$$

$$a_{2k}^{(1)} = \frac{n_{zn} - a_{2k}^{(0)} U_{tzn}}{M_{zn}}, \quad (4.26)$$

gdzie

$$R_t = \frac{0.5}{I_{zn}^2} \left(\frac{P_{zn}}{\eta_s} - P_{zn} \right) \cdot 10^3,$$

$a_{2k}^{(0)}$, $a_{2k}^{(1)}$ - odpowiednie składowe wektora a_2 wyznaczone na podstawie danych katalogowych silnika,

n_{zn} - znamionowa prędkość obrotowa,
 U_{tzn} - znamionowe napięcie twornika,
 I_{zn} - prąd znamionowy twornika,
 P_{zn} - moc znamionowa silnika,
 M_{zn} - obciążenie znamionowe silnika,
 η_s - sprawność silnika.

Dla konkretnych realizacji silników parametry te mogą mieć pewien rozrzut i wyznaczenie ich na podstawie danych katalogowych może być niewystarczająco dokładne. W celu wyznaczenia dokładniejszych wartości $a_2^{(0)}$, $a_2^{(1)}$ należy zmierzyć prędkość obrotową silnika dla różnych napięć twornika i różnych obciążeń, a następnie skorzystać z odpowiednich metod identyfikacji. W tym przypadku można skorzystać z metody identyfikacji dwustopniowej. I tak, na 1. stopniu dla ustalonego obciążenia ($x_2 = \text{const}$) należy zbadać rodzinę charakterystyk sterowania, tj.

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, a_1) = a_1^{(1)} x_1 + a_1^{(2)}, \quad (4.27)$$

gdzie $\bar{y}$ - wyjście modelu na 1. stopniu, $a_1 = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)}]^T$ - wektor parametrów modelu na 1. stopniu. Na 2. stopniu należy zbadać zależność wektora parametrów a_1 od obciążenia silnika x_2 , tj. należy ustalić model

$$\bar{a}_1 = \Phi_2(x_2, a_2) = \begin{bmatrix} a_2^{(0)} \\ a_2^{(1)} x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

gdzie $\bar{a}_1$ - wyjście modelu na 2. stopniu, $\bar{a}_1 \triangleq [\bar{a}_1^{(1)} \bar{a}_1^{(2)}]^T$, $a_2 = [a_2^{(0)} a_2^{(1)}]^T$ - wektor parametrów modelu na 2. stopniu. Po złożeniu modelu (4.27) i (4.28) otrzymamy model (4.29) w postaci:

$$\bar{y} = \Phi_1(x_1, \Phi_2(x_2, a_2)) \triangleq \Phi(x_1, x_2, a_2) = a_2^{(0)} x_1 + a_2^{(1)} x_2.$$

Powstaje pytanie czy tak otrzymany model będzie równoważny modelowi otrzymanemu metodą bezpośrednią (z jednoczesnymi zmianami x_1, x_2)? Jeżeli nie, to co ma wpływ na różnicę między tymi podejściami? Odpowiedź na te pytania mają dać badania modelowe silnika przedstawione w następnym punkcie.

4.4.2. Modelowanie dwustopniowe i symulacja obcowzbudnego silnika prądu stałego

Obecnie zakładamy, że (y, x_1, x_2) są realizacjami zmiennych losowych $(\underline{y}, \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ o znanym łącznym rozkładzie $f(y, x_1, x_2)$. Na podstawie literatury [43] można przyjąć, że jest to rozkład normalny o wartości oczekiwanej $m = [m_0 \ m_1 \ m_2]^T$ i macierzy kowariancji

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \mu_{10} & \mu_{20} \\ \mu_{10} & \sigma_1^2 & \mu_{12} \\ \mu_{20} & \mu_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa $f(y, x_1, x_2)$ ustalamy na podstawie danych katalogowych w taki sposób, aby optymalne parametry modelu (4.24) wyznaczone dla przyjętego rozkładu były równe parametrom modelu wyznaczonym zgodnie z danymi katalogowymi. Przyjęto:

$$m_1 = \alpha_1 U_{tzn},$$

$$m_2 = \alpha_2 M_{zn},$$

$$m_0 = m_1 a_{2k}^{(0)} + m_2 a_{2k}^{(1)},$$

$$\sigma_1 = \frac{m_1 \beta_1}{1.96},$$

$$\sigma_2 = \frac{m_1 \beta_2}{1.96},$$

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 (a_{2k}^{(0)})^2 + \sigma_2^2 (a_{2k}^{(1)})^2,$$

$$\mu_{10} = a_{2k}^{(1)} m_1 m_2 + a_{2k}^{(0)} (m_1^2 + \sigma_1^2) - m_0 m_1,$$

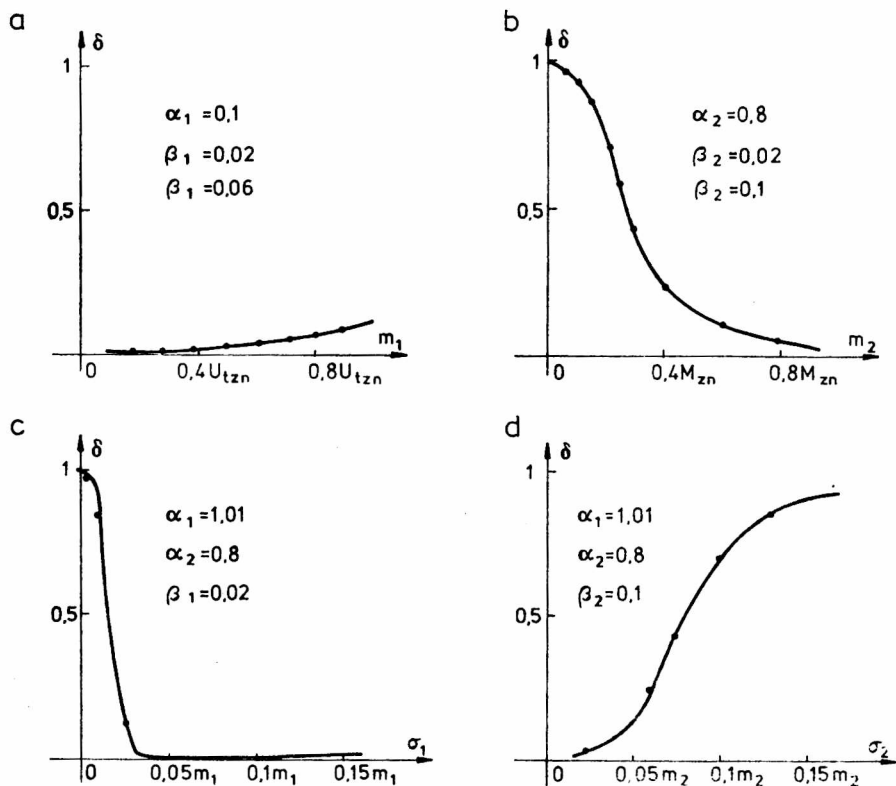
$$\mu_{20} = a_{2k}^{(0)} m_1 m_2 + a_{2k}^{(1)} (m_2^2 + \sigma_2^2) - m_0 m_2,$$

gdzie α_1, α_2 - współczynniki określające dopuszczalny zakres zmian odpowiednio U_{tzn}, M_{zn} ; β_1, β_2 - współczynniki określające odchylenie od wartości średniej z prawdopodobieństwem 0.95.

Ponieważ napięcie twornika nie zależy od momentu obciążenia, przyjęto $\mu_{12} = 0$. Wyznaczony w ten sposób rozkład prawdopodobieństwa wykorzystamy do modelowania i badań symulacyjnych silnika. W dalszym ciągu skorzystano z wyników symulacji i pomiarów umieszczonych w pracy magisterskiej S. Pękali, wykonanej w Instytucie Sterowania i Techniki Systemów Politechniki Wrocławskiej. Pomiarzy zostały przeprowadzone w Laboratorium napędu Instytutu Elektromaszynowego.

Na podstawie rozważań z przykładu 3.3 (p. 3.2) wyznaczamy optymalne parametry a_2^* metodą dwustopniową oraz $\tilde{a}_2$ metodą bezpośrednią. Dla silnika o parametrach $P_{zn} = 2$ kW, $U_{zn} = 220$ V, $n_{zn} = 1000$ obr·min⁻¹, $\eta_s = 0.85$ wyznaczono optymalne wektory parametrów $a_2^*, \tilde{a}_2$, wartości kryteriów $Q(a_2^*), Q(\tilde{a}_2)$ oraz wartość wskaźnika δ (3.36) dla różnych wartości $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Wyniki badań zilustrowano na rys. 4.6 i 4.7.

Z przeprowadzonych badań wynika, że jeżeli silnik jest modelowany dla obciążenia przyjmującego wartości bliskie obciążeniu znamionowemu, to optymalne parametry wyznaczone metodą bezpośrednią i dwustopniową są porównywalne (rys. 4.6b). Ze wzrostem napięcia twornika różnica między podejściem bezpośrednim i dwustopniowym rośnie. Różnica ta jest jednak stosunkowo mała (rys. 4.6a), a parametry modelu wyznaczone metodą bezpośrednią i dwustopniową w zakresie stosowanych napięć są porównywalne. Natomiast jeżeli rozrzut napięcia twornika rośnie (α_1 rośnie) wartość wskaźnika δ bardzo szybko maleje, a ze wzrostem rozrzutu obciążenia (σ_2 rośnie) wskaźnik δ rośnie (rys. 4.6c,d). Z rysunku 4.7 można zauważyć, że przy ustalonym rozrzucie napięcia twornika wraz ze wzrostem wartości tego napięcia podejście dwustopniowe jest bliskie podejściu bezpośredniemu, natomiast ze wzrostem momentu obciążenia przy ustalonym rozrzucie tego momentu podejście bezpośrednie i dwustopniowe daje istotnie różne wyniki. Spostrzeżenia z tych badań pokrywają się ze spostrzeżeniami z badań przeprowadzonych w szerszym zakresie dla przykładu 3.3, przedstawionych w p. 3.4. Z badań symulacyjnych przeprowadzonych dla silnika wynika, że optymalne parametry modelu silnika wyznaczone metodą bezpośrednią, są porównywalne z parametrami uzyskanymi metodą dwustopniową, jeżeli obciążenie silnika jest bliskie obciążeniu

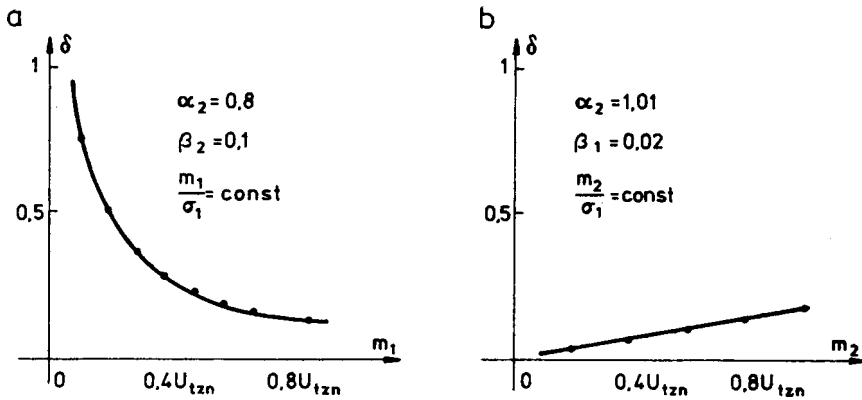


Rys. 4.6. Zależność wskaźnika δ od parametrów (a) m_1 , (b) m_2 , (c) σ_1 , (d) σ_2
 Fig. 4.6. Dependence of the index δ on the parameters (a) m_1 , (b) m_2 , (c) σ_1 , (d) σ_2

znamionowemu i ma mały rozrzut, a napięcie twornika zmienia się w dopuszczalnym zakresie i ma duży rozrzut. Jak widać ze wzoru (4.25), sprawność silnika ma również wpływ na parametry rozkładu, a przez to też na równowagę obu podejść. Z przeprowadzonych badań (rys. 4.8) wynika, że dla silników o dużej sprawności η_s podejście dwustopniowe i bezpośrednie daje porównywalne wyniki.

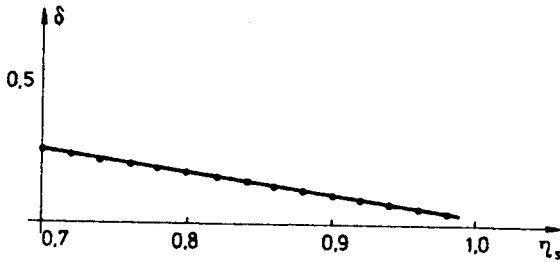
Podczas identyfikacji obiektów wielowejściowych nie zawsze jest oczywiste, jeżeli nie wynika to z przesłanek praktycznych wymienionych w p. 1.3, które wejście na 1. stopniu należy zmieniać, a które wejście ma być ustalone (tj. które wielkości przyjąć za x_1 , a które za x_2 , gdy stosujemy podejście dwustopniowe). W celu zbadania wpływu kolejności wyboru zmiennych x_1 i x_2 wyznaczono optymalne parametry, przyjmując na 1. stopniu model

$$\bar{y}' = a_1^{(1)'} + a_1^{(2)'} x_2$$



Rys. 4.7. Zależność wskaźnika δ od parametrów (a) m_1 przy ustalonym m_2/σ_2 , (b) m_2 przy ustalonym m_1/σ_1

Fig. 4.7. Dependence of the index δ on the parameters (a) m_1 at constant m_2/σ_2 , (b) m_2 at constant m_1/σ_1



Rys. 4.8. Zależność wskaźnika δ od sprawności silnika η_s
Fig. 4.8. Dependence of the index δ on the motor efficiency η_s

i odpowiednio na 2. stopniu

$$\bar{a}_1' = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(1)'} \\ \bar{a}_1^{(2)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(0)'} x_1 \\ a_2^{(1)'} \end{bmatrix},$$

gdzie $a_1' = [a_1^{(1)'} a_1^{(2)'}]^T$, $a_2' = [a_2^{(0)'} a_2^{(1)'}]^T$ - wektory parametrów modelu odpowiednio na 1. i 2. stopniu. Analogicznie jak poprzednio wyznaczamy optymalne parametry $a_1^{*'}$ i $a_2^{*'}$

$$a_1^{*'} = \begin{bmatrix} a_1^{(1)*'} \\ a_1^{(2)*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 x_1 + \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix},$$

$$a_2^{*'} = \begin{bmatrix} a_2^{(0)*'} \\ a_2^{(1)*'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 + \gamma_2 \frac{m_1}{m_1^2 + \sigma_1^2} \\ \gamma_1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ określono jak w przykładzie 3.3. Dla silnika o parametrach jak poprzednio wyznaczono $a_2^*, a_2^{\tilde{*}}, \tilde{a}_2, Q(a_2^*), Q(a_2^{\tilde{*}}), Q(\tilde{a}_2)$ oraz wartość wskaźnika δ, δ' (dla δ' we wzorze (3.36) w miejsce a_2^* wstawiono $\tilde{a}_2$). Wyniki zamieszczono w tab. 4.5.

Tabela 4.5

Wyniki symulacji	Dane		
	(1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.8$ $\beta_1 = \beta_2 = 0.05$	(2) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.8$ $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$	(3) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.9$ $\beta_1 = 0.15, \beta_2 = 0.02$
$\tilde{a}_2$	$[4.914 \ -4.246]^T$	$[4.914 \ -4.246]^T$	$[4.914 \ -4.246]^T$
a_2^*	$[4.877 \ -3.822]^T$	$[4.892 \ -3.822]^T$	$[4.914 \ -4.238]^T$
$a_2^{*'}$	$[4.951 \ -4.670]^T$	$[4.936 \ -4.670]^T$	$[4.917 \ -4.670]^T$
$Q(\tilde{a}_2)$	6.74875	26.07804	1.53143
$Q(a_2^*)$	6.80398	26.20032	1.53162
$Q(a_2^{*'})$	6.80402	26.20102	1.84773
δ	0.008117	0.00466	0.00011
δ'	0.008121	0.00469	0.17118

Analizując wyniki w kolumnie (1) i (2) tab. 4.5 zauważamy, że jeżeli obiekt badany jest dla wartości x_1 i x_2 bliskich odpowiednio U_{zn} i M_{zn} ($\alpha_1, \alpha_2 \approx 1$) i rozrzut x_1 i x_2 jest porównywalny ($m_1/\sigma_1 \approx m_2/\sigma_2$, czyli $\beta_1 \approx \beta_2$), to kolejność wyboru zmiennej wejściowej na 1. stopniu nie ma istotnego znaczenia dla równoważności podejść ($\delta \approx \delta'$). Natomiast jeżeli rozrzut x_1 i x_2 jest istotnie różny ($\beta_1 \neq \beta_2$), to kolejność wyboru zmiennej wejściowej na 1. stopniu ma istotne znaczenie. Zmienną x_1 należy tak dobrać, aby jej rozrzut był większy od rozrzutu x_2 . W kolumnie (3) tab. 4.5 mamy $\beta_1 \gg \beta_2$ i wówczas przyjąwszy na 1. stopniu za x_1 napięcie twornika, a na 2. stopniu x_2 moment obciążenia, otrzymujemy δ bardzo małe, natomiast przyjąwszy x_1 i x_2 odwrotnie otrzymujemy δ' znacznie większe od poprzedniego. Widać, że ze względu na równoważność obu podejść, przy założonych β_1 i β_2 , korzystniej jest na 1.

stopniu badać zależność prędkości obrotowej silnika od napięcia twornika, a na 2. stopniu uwzględnić moment obciążenia.

W praktycznych sytuacjach nie znamy parametrów rozkładu prawdopodobieństwa. Odpowiednie parametry należy wyznaczyć na podstawie pomiarów. Wprowadźmy oznaczenia:

- y_{ij} - prędkość obrotowa silnika dla zadanego napięcia twornika x_{1ij} przy ustalonym obciążeniu x_{2j} ,
 x_{1ij} - napięcie twornika przy ustalonym x_{2j} ,
 x_{2j} - j-ty moment obciążenia silnika,
 n - liczba pomiarów na 1. stopniu,
 m - liczba pomiarów na 2. stopniu.

Zauważmy, że do wyznaczenia a_1^* , a_2^* i $\tilde{a}_2$ nie jest konieczna znajomość $f(y, x_1, x_2)$, a wystarczą odpowiednie momenty. Zastępując momenty teoretyczne występujące we wzorach określających a_1^* , a_2^* i $\tilde{a}_2$ (w przykładzie 3.3) momentami empirycznymi otrzymamy algorytmy identyfikacji na 1. i 2. stopniu oraz algorytm bezpośredni. I tak, dla ustalonego $x_2 = x_{2j}$ na 1. stopniu mamy

$$a_{1nj} = \begin{bmatrix} a_{1nj}^{(1)} \\ a_{1nj}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n \sum_{i=1}^n y_{ij} x_{1ij} - \left(\sum_{i=1}^n y_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_{1ij} \right)}{n \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_{1ij} \right)^2} \\ \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n y_{ij} x_{1ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{1ij} \right)}{n \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_{1ij} \right)^2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

gdzie a_{1nj} - oszacowanie wektora a_1^* dla ustalonego $x_2 = x_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Na 2. stopniu otrzymujemy

$$a_{2m} = \begin{bmatrix} a_{2m}^{(0)} \\ a_{2m}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(1)} \\ \frac{\sum_{j=1}^m a_{1nj}^{(2)} x_{2j}}{\sum_{j=1}^m x_{2j}^2} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

gdzie a_{2m} - oszacowanie wektora a_2^* .

Po zastosowaniu podejścia bezpośredniego mamy

$$\tilde{a}_{2m} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{2m}^{(0)} \\ \tilde{a}_{2m}^{(1)} \end{bmatrix} = \quad (4.31)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ij} x_{1ij} \right) \left(\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij} x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ij} x_{2j} \right)}{n \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij} x_{2j} \right)^2} \\ \frac{\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ij} x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij} x_{2j} \right) \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ij} x_{1ij} \right)}{n \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_{2j}^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{1ij} x_{2j} \right)^2} \end{bmatrix},$$

Gdzie $\tilde{a}_{2m}$ - oszacowanie wektora $\tilde{a}_2$. Analogiczne algorytmy otrzymamy dla a'_{1nj} , a'_{2m} i $\tilde{a}'_{2m}$ po wstawieniu odpowiednich momentów empirycznych w wzorów określających a'_1 , a'_2 i $\tilde{a}'_2$, wyznaczonych na podstawie pomiarów, y'_{ij} - obroty silnika przy ustalonym obciążeniu x'_{2ij} i ustalonym napięciu twornika x'_{1ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Przedstawione algorytmy testowano za pomocą badań symulacyjnych, a następnie zastosowano do wyznaczenia optymalnych parametrów konkretnego silnika wykorzystując dane pomiarowe. Do badań symulacyjnych przyjęto silnik prądu stałego o danych znamionowych $P_{zn} = 3.6$ kW, $U_{tzn} = 220$ V, $I_{zn} = 19.9$ A, $n_{zn} = 1400$ obr min^{-1} , $\eta_s = 0.82$. Parametry charakterystyk statycznych wyznaczone na podstawie danych katalogowych wynoszą $a_{2k} = [6.995 \ -5.665]^T$. Parametry a_2^* , $a_2^{*'} i \tilde{a}_2$ wyznaczone przy pełnej informacji probabilistycznej i założeniu, że $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.8$, $\beta_1 = 0.01$, $\beta_2 = 0.05$, przyjmują wartości $a_2^* = [5.732 \ -8.488]^T$, $a_2^{*'} = [7.046 \ -6.231]^T$, $\tilde{a}_2 = [6.995 \ -5.665]^T = a_{2k}$, odpowiednie wartości kryteriów $Q(a_2^*) = 74.934$, $Q(a_2^{*'}) = 20.748$, $Q(\tilde{a}_2) = 20.664$, a $\delta = 0.717$, $\delta' = 0.004$.

W badaniach symulacyjnych generowano wartości x_{2j} , x_{1ij} , y_{ij} (x'_{1ij} , x'_{2ij} , y'_{ij}) według rozkładu prawdopodobieństwa z parametrami wyznaczonymi na podstawie danych katalogowych i przyjętych $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Założono $n = m = 10$. Na podstawie opisanych uprzednio algorytmów wyznaczono a_{2m} , a'_{2m} , $\tilde{a}_{2m}$ i $\tilde{a}'_{2m}$. Dla danych uzyskanych w wyniku symulacji otrzymano: $a_{2m} = [5.781 \ -7.678]^T$, $a'_{2m} = [7.030 \ -6.042]^T$, $\tilde{a}_{2m} \approx \tilde{a}'_{2m} = [6.880 \ -5.484]^T$. Odpowiednie wartości kryteriów wynoszą: $Q(a_{2m}) = 82.242$, $Q(a'_{2m}) = 22.420$, $Q(\tilde{a}_{2m}) = 21.586$, a wartości wskaźnika $\delta = 0.765$ i $\delta' = 0.005$. Porównując

odpowiednie wektory (a_2^* z a_{2m} , $a_2^{*'} z a_{2m}'$, $\tilde{a}_2 z \tilde{a}_{2m}$) zauważamy, że korzystając z proponowanych algorytmów otrzymujemy dobre przybliżenie parametrów a_2 metodą bezpośrednią i dwustopniową. Porównując wskaźniki δ i δ' wyznaczone przy pełnej informacji probabilistycznej oraz na podstawie danych symulacyjnych zauważamy, że ze względu na równoważność podejścia dwustopniowego i bezpośredniego korzystniej jest na pierwszym stopniu zbadać zależność między prędkością obrotową silnika i momentem obciążenia, a na drugim stopniu uwzględnić zależność od napięcia twornika.

4.4.3. Identyfikacja dwustopniowa charakterystyk statycznych obcowzbudnego silnika prądu stałego

Przedstawione poprzednio i przetestowane w badaniach symulacyjnych algorytmy identyfikacji wykorzystamy do identyfikacji charakterystyk statycznych silnika prądu stałego typu PRBZc 160 sz o danych znamionowych $P_{zn} = 37 \text{ kW}$, $U_{tzn} = 220 \text{ V}$, $I_{zn} = 199 \text{ A}$, $n_{zn} = 1560 \text{ obr. min}^{-1}$. Pomiary wykonano w następujący sposób:

1. Dla ustalonego momentu obciążenia x_{2j} zmieniano napięcie twornika x_{11j} , x_{12j} , ..., x_{1nj} i rejestrowano prędkość obrotową silnika y_{1j} , y_{2j} , ..., y_{nj} , a następnie czynność tę powtórzono dla różnych momentów obciążenia x_{2j} , $j = 1, 2, \dots, m$. Wyniki pomiarów podano w tab. 4.6a.

2. Dla ustalonego napięcia twornika x_{1j}' zmieniano moment obciążenia x_{21j}' , x_{22j}' , ..., x_{2mj}' i rejestrowano prędkość obrotową silnika y_{1j}' , y_{2j}' , ..., y_{nj}' , a następnie czynność tę powtórzono dla różnych wartości napięcia twornika x_{1j}' , $j = 1, 2, \dots, m$. Wyniki pomiarów zamieszczono w tab. 4.6b.

Stosując odpowiednie algorytmy identyfikacji na 1. stopniu wyznaczono a_{1nj} i a_{1nj}' , a wyniki umieszczono w tab. 4.7a,b. Następnie, korzystając z algorytmów identyfikacji na 2. stopniu, wyznaczono $a_{2m} = [6.695 \ -4.519]^T$, $a_{2m}' = [6.490 \ -2.473]^T$ oraz $\tilde{a}_{2m} = [6.509 \ -2.333]^T$ i $\tilde{a}_{2m}' = [6.510 \ -2.675]^T$ metodą bezpośrednią. Dla porównania za pomocą znanego algorytmu [10] wyznaczono optymalny wektor parametrów a_2 dla danych, w których jednocześnie zmieniono x_1 i x_2 i wówczas otrzymano $[6.523 \ -2.509]^T$. Widać, że wektory a_{2m} , $\tilde{a}_{2m}$ oraz wektor otrzymany przy jednoczesnych zmianach x_1 i x_2 są porównywalne. Odpowiednie wartości kryterium wynoszą $Q(a_{2m}) = 363.441$, $Q(a_{2m}') = 119.481$, $Q(\tilde{a}_{2m}) = 103.482$, $Q(\tilde{a}_{2m}') = 102.328$, a wartości wskaźnika $\delta = 0.715$ i $\delta' = 0.134$. Widać, że gdy na 1. stopniu zmieniano moment obciążenia, a na 2. stopniu napięcie twornika po zastosowaniu podejścia dwustopniowego, uzyskano wynik porównywalny z podejściem bezpośrednim. Spowodowane to jest tym, że

rozrzut napięcia twornika jest mniejszy od rozrzutu obciążenia silnika. Spostrzeżenie to pokrywa się z wnioskami z badań modelowych i symulacyjnych.

Tabela 4.6a

Tabela 4.6b

j	x_{2j}	i	x_{1ij}	y_{ij}	x'_{1j}	x'_{2ij}	y'_{ij}
1	0.0	1	78	500	80	0.0	512
		2	92	596		1.8	507
		3	108	697		5.25	494
		4	121	782		8.0	483
		5	142	920		11.75	473
		6	160	1039		15.25	461
		7	180	1172		17.75	454
		8	200	1306		23.5	479
2	2.5	1	80	509	100	0.0	649
		2	100	640		2.75	636
		3	120	764		4.25	631
		4	141	912		7.25	618
		5	160	1030		8.63	615
		6	180	1162		12.88	601
		7	206	1337		15.0	596
		8	220	1433		18.0	588
3	5.0	1	80	498	120	0.0	775
		2	90	566		3.5	767
		3	100	634		4.13	761
		4	121	766		5.38	758
		5	140	901		9.63	741
		6	160	1023		13.63	737
		7	200	1236		16.0	726
		8	220	1427		22.0	719
4	7.5	1	76	446	140	0.0	914
		2	99	618		3.0	900
		3	118	746		5.88	891
		4	136	862		7.75	882
		5	162	1036		10.13	876
		6	183	1173		12.5	871
		7	199	1280		17.5	862
		8	220	1422		21.5	856

Tabela 4.6a c.d.

Tabela 4.6b c.d.

j	x_{2j}	i	x_{1ij}	y_{1j}	x'_{1j}	x'_{2ij}	y'_{1j}
5	10	1	77	464	160	0.0	1042
		2	99	609		2.55	1033
		3	120	747		6.0	1021
		4	142	900		8.88	1011
		5	160	1020		11.5	1007
		6	180	1160		15.0	1000
		7	198	1273		17.5	993
		8	220	1416		21.0	988
6	12.5	1	74	437	180	0.0	1174
		2	90	547		3.2	1164
		3	122	763		6.2	1154
		4	139	876		8.0	1150
		5	164	1041		10.3	1144
		6	178	1142		12.38	1140
		7	202	1296		17.0	1132
		8	223	1430		21.75	1129
7	17.5	1	92	548	200	0.0	1306
		2	96	576		2.45	1257
		3	121	746		4.8	1290
		4	126	778		7.63	1286
		5	140	877		10.3	1280
		6	159	1000		13.75	1274
		7	180	1145		15.5	1270
		8	220	1410		22.25	1260
8	20	1	80	450	220	3.5	1434
		2	102	605		4.75	1428
		3	121	739		8.5	1418
		4	136	839		9.5	1416
		5	160	999		10.5	1415
		6	188	1192		12.5	1413
		7	205	1306		17.0	1407
		8	222	1420		21.55	1403

Tabela 4.7a

j	x_{2j}	$a_{1nj}^{(1)}$	$a_{1nj}^{(2)}$
1	0.0	6.586	13.489
2	2.5	6.605	22.762
3	5.0	6.609	30.451
4	7.5	6.708	52.496
5	10.0	6.690	51.996
6	12.5	6.688	56.092
7	17.5	6.739	70.628
8	20.0	6.827	91.589

Tabela 4.7b

j	x_{1j}	$a_{1nj}^{(1)}$	$a_{1nj}^{(2)}$
1	80	511.04	3.221
2	100	693.89	3.077
3	120	772.06	2.680
4	140	906.90	2.614
5	160	1037.74	2.521
6	180	1169.07	2.100
7	200	1302.09	2.005
8	220	1434.49	1.617

4.5. Identyfikacja dwustopniowa własności dynamicznych obcowzbudnego silnika prądu stałego

4.5.1. Opis problemu

Podczas projektowania napędu elektrycznego niezbędna jest znajomość własności dynamicznych silnika. Można zaproponować model badanego silnika określający zależność między obrotami silnika i napięciem twornika w postaci równania różniczkowego drugiego rzędu. Parametry tego równania w istotny sposób zależą od dodatkowej rezystancji twornika. Znajomość tej zależności jest ważna podczas projektowania układów napędowych, gdy zmiana prędkości obrotowej dokonywana jest przez zmianę rezystancji obwodu twornika, lub tam gdzie rozruch silnika, z powodu braku sterowanego źródła zasilania, odbywa się przez stopniową zmianę rezystancji obwodu twornika. Wprowadźmy oznaczenia: $y(t)$ - prędkość obrotowa silnika w funkcji czasu ($\text{obr} \cdot \text{min}^{-1}$), $x_1(t)$ - napięcie twornika w funkcji czasu (V), x_2 - opór dodatkowy obwodu twornika (Ω).

Dla nie obciążonego obcowzbudnego silnika prądu stałego zależność między obrotami silnika i napięciem twornika ma postać

$$a_1^{(1)} a_1^{(2)} \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dt^2} + a_1^{(2)} \frac{d \bar{y}(t)}{dt} + \bar{y}(t) = a_1^{(3)} x_1(t), \quad (4.32)$$

gdzie $a_1 = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)} \ a_1^{(3)}]^T$ - wektor parametrów modelu, $\bar{y}(t)$ - wyjście modelu.

Równanie (4.32) jest modelem badanego obiektu na 1. stopniu. Składowe wektora a_1 mają następującą interpretację: $a_1^{(1)}$ - stała elektromagnetyczna, $a_1^{(2)}$ - stała elektromechaniczna, $a_1^{(3)}$ - współczynnik

wzmocnienia silnika. Stała elektromechaniczna i elektromagnetyczna zależą od rezystancji twornika. Są to znane związki. Natomiast współczynnik wzmocnienia silnika nie zależy od rezystancji twornika. Tak więc zależność między wektorem parametrów równania (4.32) a x_2 , tj. model na 2. stopniu ma postać

$$\bar{a}_1 \triangleq \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(1)} \\ \bar{a}_1^{(2)} \\ \bar{a}_1^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_2^{(1)}}{a_2^{(2)} + x_2} \\ a_2^{(3)} + a_2^{(4)}x_2 \\ a_2^{(5)} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

gdzie $\bar{a}_1$ - wyjście modelu, $a_2 = [a_2^{(1)} \ a_2^{(2)} \ a_2^{(3)} \ a_2^{(4)} \ a_2^{(5)}]^T$ - wektor parametrów modelu. Poszczególne składowe tego wektora mają następującą interpretację: $a_2^{(1)}$ - indukcyjność twornika, $a_2^{(2)}$ - opór twornika, $a_2^{(3)}$, $a_2^{(4)}$ - stałe współczynniki, $a_2^{(5)}$ - wzmocnienie silnika. Wartości składowych wektora a_2 można w przybliżeniu określić na podstawie danych dokumentacyjnych silnika (karty uzwojeń, wymiary geometryczne) lub na podstawie badań eksperymentalnych. Ponieważ na ogół nie dysponujemy pełną dokumentacją, zmuszeni jesteśmy wyznaczać te parametry na podstawie danych pomiarowych (na podstawie oscylogramu wymuszeń i odpowiedzi).

Stosując metodę identyfikacji dwustopniowej, na 1. stopniu, dla ustalonej wartości rezystancji dodatkowej twornika ($x_2 = \text{const}$), należy wyznaczyć parametry modelu (4.32) na podstawie danych pomiarowych. Powtarzamy procedurę identyfikacji na 1. stopniu dla różnych wartości x_2 i otrzymamy dane dla drugiego stopnia, na którym należy wyznaczyć parametry modelu (4.33).

Badania eksperymentalne przeprowadzono dla silnika typu PRBZc 132 S2 o danych znamionowych: $P_{zn} = 1.5 \text{ kW}$, $U_{tzn} = 220 \text{ V}$, $I_{zn} = 8.7 \text{ A}$, $n_{zn} = 1490 \text{ obr} \cdot \text{min}^{-1}$. I w tym przypadku korzystamy z wyników pomiarów przeprowadzonych przez S. Pękałę w ramach cytowanej już jego pracy magisterskiej.

Dla badanego silnika zarejestrowano prędkość obrotową przy skokowym wymuszeniu $x_1(t) = U_1 \cdot 1(t)$ i ustalonych warunkach początkowych $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$. Eksperyment powtórzono dla różnych wartości rezystancji dodatkowej twornika. Przykładowe wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 4.9. Wprowadzmy oznaczenia:

$y_{ij} = y_j(t_i)$ - pomiar prędkości obrotowej silnika przy wymuszeniu $x_{1j}(t) = U_{1j} \cdot 1(t)$ dla ustalonych warunków początkowych y_{0j} w i -tej chwili pomiarowej przy ustalonym $x_2 = x_{2j}$,

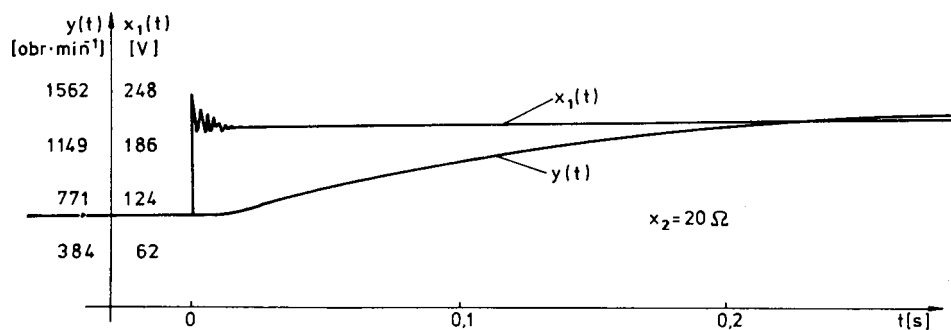
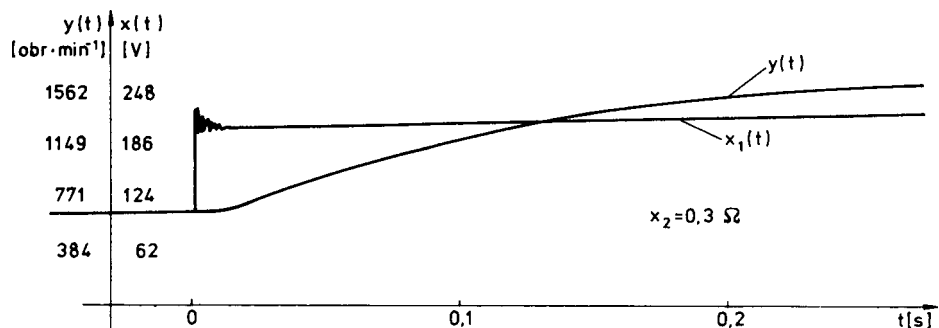
x_{2j} - j-ta wartość rezystancji dodatkowej twornika,

$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m,$

n - liczba punktów pomiarowych prękości obrotowej silnika,

m - liczba różnych wartości rezystancji dodatkowej twornika.

Z oznaczeń tych skorzystamy w opisie algorytmów identyfikacji.



Rys. 4.9. Pomiar obrotów silnika przy skokowej zmianie napięcia i ustalonej rezystancji dodatkowej twornika

Fig. 4.9. Measurement of the motor revolutions for step changes of voltage and constant additional armature resistance

4.5.2. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń

Na 1. stopniu dla ustalonego $x_2 = x_{2j}$ przyjmujemy następujące kryterium jakości identyfikacji:

$$Q_{1j}(a_1) = \sum_{i=1}^n (y_{1j} - \bar{y}_{1j})^2, \quad (4.34)$$

gdzie $\bar{y}_{1j} \triangleq \bar{y}_j(t_1)$ - rozwiązanie równania różniczkowego (4.32) dla $x_{1j}(t) = U_{1j} \mathbf{1}(t)$, zadanych warunków początkowych y_{0j} w chwili $t = t_1$. Rozwiązanie to zależy od wektora parametrów a_1 , tj.

$$\bar{y}_j(t) = \begin{cases} \Phi_1^{(1)}(t, a_1) & \text{dla } 4a_1^{(1)} < a_1^{(2)} \\ \Phi_1^{(2)}(t, a_1) & \text{dla } 4a_1^{(1)} = a_1^{(2)} \\ \Phi_1^{(3)}(t, a_1) & \text{dla } 4a_1^{(1)} > a_1^{(2)} \end{cases}, \quad (4.35)$$

gdzie

$$\Phi_1^{(1)}(t, a_1) = a_1^{(3)} U_{1j} + \frac{y_{0j} - a_1^{(3)} U_{1j}}{\alpha} \left[(1 + \alpha) e^{-\frac{(1-\alpha)}{2a_1^{(1)}} t} - (1 - \alpha) e^{-\frac{1+\alpha}{2a_1^{(1)}} t} \right],$$

$$\Phi_1^{(2)}(t, a_1) = \frac{4a_1^{(1)} a_1^{(3)} U_{1j}}{a_1^{(2)}} + e^{-\frac{t}{2a_1^{(1)}}} \left[y_{0j} - \frac{4a_1^{(1)} a_1^{(3)} U_{1j}}{a_1^{(1)}} + \left(\frac{y_{0j}}{2a_1^{(1)}} - \frac{2a_1^{(3)} U_{1j}}{a_1^{(2)}} \right) t \right],$$

$$\Phi_1^{(3)}(t, a_1) = a_1^{(3)} U_{1j} + \frac{e^{-\frac{1}{2a_1^{(1)}} t}}{\beta} (y_{0j} - a_1^{(3)} U_{1j}) \times \left[\sin\left(\frac{1}{2a_1^{(1)}} \beta t\right) + \cos\left(\frac{1}{2} \beta t\right) \right],$$

$$\alpha = \sqrt{1 - 4 \frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}}}, \quad \beta = \sqrt{4 \frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}} - 1}.$$

Zadanie identyfikacji na 1. stopniu sprowadza się do wyznaczenia optymalnych parametrów modelu omówionego w rozdz. 3. Optymalny wektor parametrów modelu (4.32) wyznaczamy przez minimalizację kryterium (4.34) względem parametrów a_1 , tj. dla ustalonego x_2 należy wyznaczyć $a_{1\text{opt}}$ takie, że

$$Q_{1j}(a_{1jn}) = \min_{a_1} Q_{1j}(a_1), \quad (4.36)$$

gdzie a_{1nj} - optymalny wektor parametrów modelu (4.32).

Ze względu na złożoność funkcji $\bar{y}_j(t)$ (4.35) nie jest możliwe analityczne podanie algorytmu identyfikacji na 1. stopniu. Skorzystamy z numerycznej metody optymalizacji opartej na kierunkach sprzężonych (metoda Fletchera-Powella-Davidowa [37]). W celu ustalenia punktu startowego (a_{1j}^0) do tej metody należy rozwiązać następujące zadanie pomocnicze:

$$a_{1j}^0 \rightarrow \min_{a_1} \sum_{i=1}^n \left[a_1^{(1)} a_1^{(2)} \ddot{y}_j(t_i) + a_1^{(2)} \dot{y}_j(t_i) + y_j(t_i) - a_1^{(3)} x_{1j}(t_i) \right]^2, \quad (4.37)$$

$$\text{gdzie } \ddot{y}_j(t_i) = \frac{\dot{y}_j(t_{i+1}) - \dot{y}_j(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad \dot{y}_j(t_i) = \frac{y_j(t_{i+1}) - y_j(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Na podstawie danych pomiarowych wyznaczono parametry modelu (4.32). Wyniki identyfikacji uzyskane na 1. stopniu zebrano w tab. 4.8. Na 2. stopniu w wyniku minimalizacji kryterium

$$Q_2(a_2) = \sum_{j=1}^m (a_{1jn} - \bar{a}_{1j})^T (a_{1jn} - \bar{a}_{1j}), \quad (4.38)$$

gdzie $\bar{a}_{1j} = \Phi_2(x_{2j}, a_2)$, otrzymujemy optymalny wektor parametrów modelu (4.33) $a_{2m} \cong [a_{2m}^{(1)}, a_{2m}^{(2)}, a_{2m}^{(3)}, a_{2m}^{(4)}, a_{2m}^{(5)}]^T$. Dla danych z tab. 4.8 otrzymujemy

$$a_{2m} = [0.111 \ 2.67 \ 0.076 \ 0.073 \ 6.885]^T.$$

Tak więc optymalny model (4.33) ma postać

$$\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(1)} \\ \bar{a}_1^{(2)} \\ \bar{a}_1^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.111}{2.67 + x_2} \\ 0.076 + 0.073 x_2 \\ 6.885 \end{bmatrix}.$$

Opisane w tym punkcie zadanie jest przykładem identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych. W p. 3.4 problem identyfikacji tych obiektów omówiono z konieczności bardzo skrótowo i rozważania ogólne nie obejmują tego przypadku. Przedstawiony przykład można potraktować jako rozszerzenie rozważań prowadzonych w p. 3.4.

Tabela 4.8

j	x_{2j}	$a_{1nj}^{(1)}$	$a_{1nj}^{(2)}$	$a_{1nj}^{(3)}$
1	0.5	0.03912	0.08609	6.9298
2	0.6	0.03371	0.09757	6.9392
3	1.0	0.03017	0.10693	6.9267
4	1.5	0.02679	0.12160	6.8826
5	2.0	0.02303	0.13900	6.9273
6	2.4	0.02160	0.14638	6.8412
7	3.3	0.01849	0.17569	6.8963
8	3.5	0.01773	0.18262	6.8610
9	4.5	0.01543	0.20901	6.7722
10	6.3	0.01256	0.27322	6.8786

5. PRZYKŁADY BIOMEDYCZNYCH ZASTOSOWAŃ IDENTYFIKACJI DWUSTOPNIOWEJ

W rozdziale tym przedstawiono zastosowania identyfikacji dwustopniowej do wyznaczenia modeli matematycznych obiektów biomedycznych. Na wstępie omówiono ogólne problemy identyfikacji tego typu obiektów. Następnie opisano zadania identyfikacji dwustopniowej funkcji mechanicznych układu oddechowego oraz funkcji hemodynamicznych układu krążenia. Podobnie jak w rozdz. 4, opisane tu przykłady ilustrują rozważania ogólne z rozdziałów poprzednich. W przytoczonych przypadkach zadanie identyfikacji na 1. stopniu dotyczy badania własności dynamicznych obiektów. W części ogólnej problem ten z konieczności potraktowano bardzo skrótowo. Przedstawiane obecnie zadania identyfikacji można potraktować jako uzupełnienie rozważań z rozdz. 3 dotyczących identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych.

5.1. Ogólna problematyka identyfikacji obiektów biomedycznych

W ostatnich latach można zauważyć coraz częstsze wykorzystanie modeli matematycznych w badaniach biologicznych i medycznych. Prezentowane w literaturze [np. 33,3] zadania identyfikacji obiektów biomedycznych dotyczą wybranych podsystemów organizmu (układów, organów, narządów) i procesów w nich zachodzących (np. identyfikacji układu krążenia, układu oddechowego, układu nerwowego, układu ruchu (mięśniowo-kostnego), narządów słuchu i wzroku, procesów regulacji przemiany materii). Opracowane modele stosowane są przede wszystkim do analizy, sterowania

i diagnozowania obiektów oraz procesów biomedycznych. Wcześniejsze prace autora [57,58,60,64,65] dotyczą identyfikacji układu krążenia, natomiast pewne propozycje wykorzystania modeli obiektów biomedycznych do diagnostyki medycznej są zawarte w pracach [71,73].

Zauważmy, że zadanie identyfikacji dotyczy zwykle wybranego podsystemu organizmu, a mimo to obiekty biomedyczne są na ogół złożonymi obiektami identyfikacji. Do tej uwagi należy dołączyć pewne cechy obiektów biomedycznych, które odróżniają je od obiektów technicznych i powodują, że pojawiają się nowe specyficzne problemy podczas ich identyfikacji.

1. Identyfikowane procesy zachodzą w złożonym organizmie, a tym samym są powiązane z innymi procesami w nim zachodzącymi. Nie jest możliwe ani celowe izolowanie badanego procesu. W sformułowaniu zadania należy przewidzieć możliwość uwzględnienia oddziaływania innych podsystemów na identyfikowany obiekt biomedyczny.

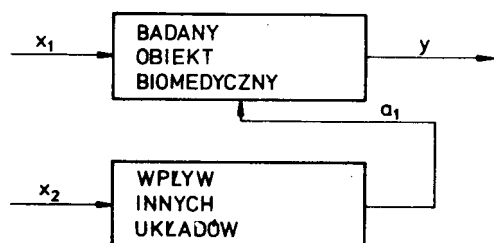
2. Obiekty biomedyczne są układami otwartymi, tj. podlegają działaniu otoczenia. Często jest to oddziaływanie celowe. Ustalenie modelu uwzględniającego takie oddziaływanie jest przydatne do optymalnego sterowania tymi obiektami (np. w zastosowaniach klinicznych do optymalnego dawkowania leków w procesie terapii, do optymalnego sterowania procesami biochemicznymi). Zwróćmy uwagę, że procesy biomedyczne są na ogół znacznie szybsze niż oddziaływanie czynników zewnętrznych.

3. Podczas identyfikacji obiektów biomedycznych bardzo często ograniczone są możliwości pomiarowe. Niektóre pomiary można uzyskać przez wykonanie pewnych zabiegów (często chirurgicznych) na badanym obiekcie (np. pomiar ciśnienia dokonywany jest przez cewnikowanie serca i zabieg ten wykonywany jest tylko w klinicznie uzasadnionych przypadkach). Niektóre wielkości nie mogą być bezpośrednio zmierzone. Należy je wyznaczyć na podstawie pomiarów i przetworzenia innych wielkości (np. nie jest dostępny bezpośredni pomiar oporu przepływu powietrza przez układ oddechowy, a jedynie pośrednio przez pomiar ciśnienia i strumienia przepływu w układzie oddechowym i odpowiednim przetworzeniu tych wielkości). W wielu przypadkach konieczne jest opracowanie odpowiednich układów pomiarowych.

4. Te same procesy biomedyczne zachodzące w tego samego typu obiektach mogą się różnić między sobą. Zależy to od warunków, w jakich badany obiekt wzrastał i funkcjonuje. Ponadto obiekty biomedyczne cechują procesy wzrostu, rozwoju i starzenia się. Prowadzi to do konieczności badania wybranych populacji obiektów.

Pewną propozycją rozwiązania wymienionych problemów powstających podczas tworzenia modeli obiektów biomedycznych jest zastosowanie identyfikacji dwustopniowej.

Ad. 1. Stosując podejście dwustopniowe, wpływ innych układów na badany obiekt biomedyczny można uwzględnić w następujący sposób (rys. 5.1): Na pierwszym stopniu należy ustalić zależność między wyróżnionymi wielkościami wejściowymi x_1 i wyjściowymi y badanego obiektu



Rys. 5.1. Dwustopniowy model obiektu biomedycznego, uwzględniający wpływ innych układów

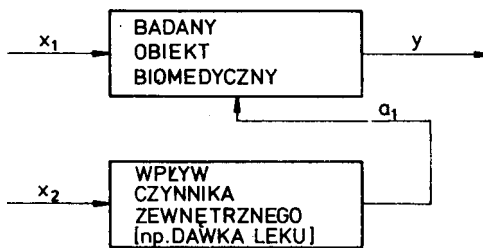
Fig. 5.1. Two-stage biomedical plant model, the influence of other systems being taken into account

badanego procesu uwzględniający oddziaływanie innego układu. Na przykład w zadaniu identyfikacji funkcji hemodynamicznych układu krążenia należy ustalić zależność między aktywnością mięśnia sercowego, strumieniami i ciśnieniami krwi w określonych punktach układu. Należy wyznaczyć parametry modelu komory serca oraz systemu naczyń krwionośnych. Jest to zadanie identyfikacji na 1. stopniu. Wiadomo, że pobudzenie parasympatycznego układu nerwowego powoduje wydzielanie acetylcholiny, a ta z kolei obniżenie częstości i siły skurczu mięśnia sercowego oraz rozszerzenie naczyń. Aby uwzględnić wpływ parasympatycznego układu nerwowego na układ krążenia, należy zbadać zależność między parametrami modelu komory serca oraz naczyń krwionośnych a uwolnioną podczas pobudzenia dawką acetylcholiny. Dawka ta jest wielkością wejściową na 2. stopniu, a wyznaczanie zależności pomiędzy parametrami modelu układu krążenia i dawką acetylcholiny jest zadaniem identyfikacji na 2. stopniu.

Ad. 2. Podobnie jak poprzednio, można uwzględnić oddziaływanie czynników zewnętrznych na obiekty biomedyczne (rys. 5.2) przyjmąwszy za wejście x_2 na 2. stopniu wielkości, charakteryzujące otoczenie. W razie celowego oddziaływania na obiekt może to być dawka leku. Na przykład dla komory serca należy ustalić zależność między aktywnością mięśnia sercowego x_1 a ciśnieniem w komorze y . Zadanie identyfikacji na 1. stopniu polega na wyznaczeniu parametrów tej zależności. Wiadomo,

biomedycznego, a konkretnie należy wyznaczyć parametry a_1 tej zależności przy założeniu, że wielkości x_2 charakteryzujące inny układ są ustalone. Powtarzając zadanie identyfikacji na 1. stopniu dla różnych x_2 otrzymamy odpowiednie wartości parametrów a_1 . Konsekwentnie na 2. stopniu należy zbadać zależność między parametrami badanego obiektu i wielkościami charakteryzującymi inny układ. Po złożeniu modeli uzyskanych na 1.

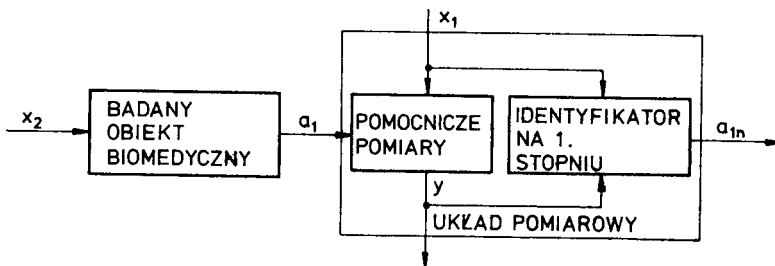
i 2. stopniu otrzymamy model ba-



Rys. 5.2. Dwustopniowy model obiektu biomedycznego, uwzględniający wpływ czynnika zewnętrznego
Fig. 5.2. Two-stage biomedical plant model with in which the influence of the enviromental factor is taken into account

że podanie adrenaliny powoduje m. in. przyspieszenie akcji serca. Aby uwzględnić wpływ adrenaliny na pracę komory, należy zbadać zależność pomiędzy parametrami modelu komory serca a dawką tego środka farmakologicznego. Ustalenie tej zależności jest zadaniem identyfikacji na 2. stopniu. Złożenie opisów wyznaczonych na 1. i 2. stopniu daje model komory uwzględniający wpływ adrenaliny na pracę mięśnia sercowego. Model ten może być wykorzystany do opracowania algorytmu optymalnego dawkowania adrenaliny.

Ad. 3. Ograniczone możliwości pomiarowe powodują, że nie wszystkie wielkości mogą być mierzone. Rozważmy przypadek, w którym zasadniczym celem jest ustalenie zależności pomiędzy wyróżnionymi wielkościami a_1 i x_2 (rys. 5.3). Wyjście a_1 badanego obiektu biologicznego nie może być bezpośrednio mierzone, natomiast może być wyznaczone na podstawie pomiarów innych wielkości x_1 oraz y . W tym przypadku zadanie identyfikacji na 1. stopniu pełni funkcję pomocniczą jako pewien układ pomiarowy, w którym mierzy się x_1 oraz y , a wylicza a_1 . Na przykład należy ustalić zależność między oporem przepływu powietrza przez płuca a stężeniem metacholiny we wdychanym powietrzu. Opór przepływu nie może być

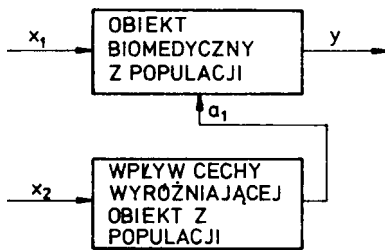


Rys. 5.3. Obiekt biomedyczny z pomocniczym układem pomiarowym
Fig. 5.3. Biomedical plant with the additional measuring system

zmierzony bezpośrednio. Należy dokonać pomiaru ciśnienia oraz przepływu powietrza przez układ oddechowy i na tej podstawie (za pomocą algorytmu identyfikacji na 1. stopniu) należy wyznaczyć opór przepływu.

Dopiero na 2. stopniu rozwiązujemy właściwe zadanie identyfikacji, polegające na ustaleniu modelu badanego obiektu na podstawie pomiaru stężenia metacholiny we wdychanym powietrzu i obliczonego na 1. stopniu oporu przepływu. W podobny sposób można zastąpić pomiary wielkości, dla których istnieją odpowiednie mierniki, ale korzystanie z nich wymaga ingerencji w badany obiekt. Wówczas należy opracować odpowiedni układ pomiarowy, który pozwoli na wyznaczenie żądanej wielkości na podstawie łatwiej dostępnych pomiarów.

Ad. 4. Na podstawie badań obiektów biomedycznych w obrębie pewnej populacji możemy zauważyć, że często wartości parametrów ich modeli istotnie różnią się. Spowodowane jest to tym, że poszczególne obiekty mogą różnić się pewnymi charakterystycznymi dla nich cechami (np.: wiek, okres aktywności zawodowej, stopień zanieczyszczenia środowiska, w którym żyją). Zadanie identyfikacji dwustopniowej umożliwia stworzenie modelu matematycznego populacji obiektów (rys. 5.4). I tak, na 1. stopniu



Rys. 5.4. Dwustopniowy model populacji obiektów biomedycznych

Fig. 5.4. Two-stage model of the biomedical plant population

należy ustalić model matematyczny poszczególnych obiektów biologicznych, a na 2. stopniu zbadać zależność parametrów tych modeli od cech wyróżniających osobniki w danej populacji. Cechy te są wielkościami wejściowymi na 2. stopniu. Złożenie opisów wyznaczonych na 1. i 2. stopniu daje model matematyczny badanej populacji. Na przykład należy zbadać funkcje mechaniczne układu oddechowego pracowników pewnego zakładu przemysłowego. Wyznaczenie parametrów modelu układu oddechowego dla każdego pracownika jest tu zadaniem identyfikacji na 1. stopniu. Może okazać się, że wyznaczone parametry istotnie różnią się dla poszczególnych pracowników, a wielkością charakterystyczną dla każdego pracownika jest staż pracy w rozpatrywanym zakładzie. Wówczas zadanie identyfikacji na 2. stopniu polega na zbadaniu zależności parametrów opracowanego modelu od stażu pracy. Po złożeniu opisów wyznaczonych na 1. i 2. stopniu uzyskamy model funkcji mechanicznych układu oddechowego populacji pracowników tego zakładu, uwzględniający ich staż pracy. W wyniku podobnych badań w innych zakładach o podobnym profilu może okazać się, że uzyskano istotnie różne parametry tych modeli. Cechą charakterystyczną dla poszczególnych zakładów jest wielkość emisji szkodliwych związków. W tym przypadku możemy skorzystać z identyfikacji trójstopniowej. Wówczas zadanie na 3. stopniu polega na zbadaniu zależności

pomiędzy parametrami modelu populacji pracowników zakładów o określonym profilu a wielkością emitowanych zanieczyszczeń przez te zakłady. Uzyskany w ten sposób model może być przydatny w badaniach chorób zawodowych.

5.2. Identyfikacja dwustopniowa funkcji mechanicznych układu oddechowego

5.2.1. Opis problemu

Dla prawidłowego przebiegu procesów biomedycznych w organizmie wymagana jest ciągła dostawa tlenu (O_2) do każdej komórki oraz odprowadzenie dwutlenku węgla (CO_2). W wysoko zorganizowanych organizmach proces wymiany O_2 i CO_2 zapewnia odpowiednia praca układu oddechowego. Prawidłowy przebieg procesu oddychania zależy od wielu czynników, m.in. zawartości O_2 i CO_2 we wdychanym powietrzu, stężenia CO_2 w tkankach, przebiegu procesu przemiany. W pracy [3] podano przykłady wielu modeli układu oddechowego, które opisują różne jego funkcje. Szczególnie ważne dla prawidłowego przebiegu procesu oddychania są funkcje mechaniczne tego układu, które powodują transport powietrza do płuc i odwrotnie. Można je opisać przez podanie zależności między przepływem powietrza przez płuca $v(t)$ a ciśnieniem $u(t)$. W pracach [49,34] przedstawiono taki model w postaci charakterystyki częstotliwościowej

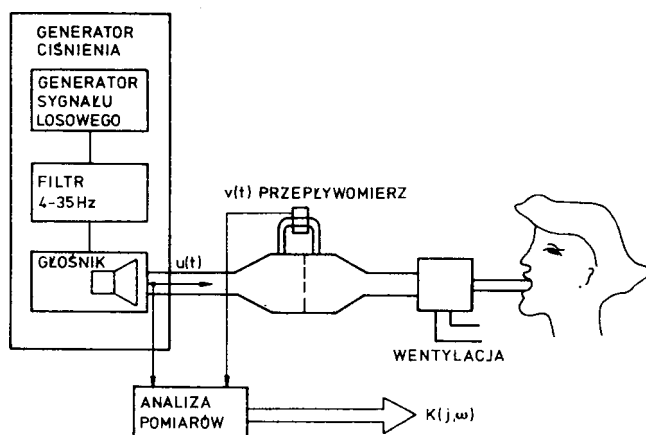
$$\bar{K}(j\omega) = \frac{\bar{U}(j\omega)}{V(j\omega)}, \quad (5.1)$$

gdzie $V(j\omega)$, $\bar{U}(j\omega)$ transformaty Fouriera sygnałów $v(t)$, $u(t)$ - odpowiednio wejście i wyjście tego modelu.

Wiele czynników ma wpływ na funkcje mechaniczne układu oddechowego (zanieczyszczenie powietrza, zawartość nikotyny we wdychanym powietrzu itp.). W praktyce interesujące jest zbadanie działania środków farmakologicznych na układ oddechowy. W tym celu można wykorzystać podejście dwustopniowe, tj. na 1. stopniu wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową tego układu, a na 2. zależność między jej parametrami i dawką środka farmakologicznego. W pracy [35] przedstawiono wyniki badań wpływu metacholiny na układ oddechowy. Przedstawione tam wyniki wykorzystamy w zadaniu identyfikacji na 2. stopniu oraz do symulacji. Propozycję badań w tym zakresie przedstawia praca autora [74], realizowana we współpracy z Wright State University w Dayton (USA).

Funkcje mechaniczne układu oddechowego można zbadać za pomocą metody wymuszonych zaburzeń losowych, opisaną m.in. w pracach [49,34]. W tym celu należy wykonać następujący eksperyment (rys. 5.5). W czasie normalnej pracy układu oddechowego podawane jest do ust powietrze

o ciśnieniu $u(t)$. Sygnał ten jest wytwarzany przez generator ciśnienia (złożony z generatora sygnału losowego, filtra dolnoprzepustowego oraz głośnika). Jednocześnie mierzy się przepływ $v(t)$ powietrza przez płuca



Rys. 5.5. Schemat pomiaru charakterystyki częstotliwościowej układu oddechowego

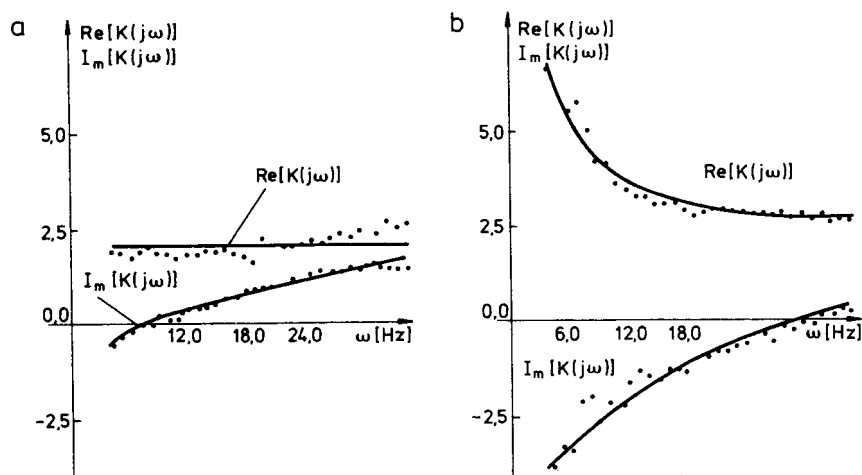
Fig. 5.5. Schematic representation of the frequency characteristic measurement of respiratory system

wymuszonego ciśnieniem $u(t)$. Na podstawie analizy Fouriera wyznaczona jest empiryczna charakterystyka częstotliwościowa $K(j\omega)$ tego układu (a konkretnie wartości $\text{Im}[K(j\omega)]$ i $\text{Re}[K(j\omega)]$ dla częstotliwości ω z przedziału 4–35 Hz). Wartości te wykorzystywane są do wyznaczania modelu funkcji mechanicznych układu oddechowego, a konkretnie jego parametrów. Przykładowe, eksperymentalnie wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe tego układu przedstawiono na rys. 5.6.

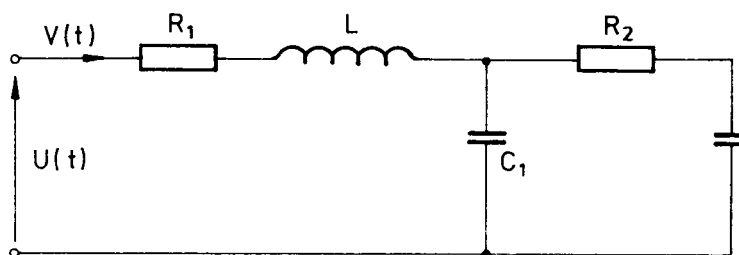
Badania przedstawione w pracach [49,34] wykazały, że dla zastosowań klinicznych wygodnie jest przedstawić omawiany obiekt biomedyczny za pomocą układu liniowego (rys. 5.7). Charakterystyka częstotliwościowa (5.1) proponowanego modelu ma postać

$$\bar{K}(j\omega) = R_1 + j\omega L + \frac{j\omega C_2 R_2 + 1}{j\omega(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 R_2} \quad (5.2)$$

Parametry R_1 , R_2 ($\text{cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}$) mają interpretację oporu przepływu powietrza przez centralną i peryferyjną część układu, natomiast C_1 , C_2 ($\text{cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}^2$) i L ($\text{litr} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{H}_2\text{O}$) opisują elastyczność części centralnej i peryferyjnej układu. Przyjawszy odpowiednie wartości parametrów R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , L można zamodelować wiele stanów patologicznych układu oddechowego. Parametry te, wyznaczone dla konkretnego pacjenta, mogą służyć do celów diagnostycznych, dając oraz jakoś



Rys. 5.6. Eksperymentalne charakterystyki częstotliwościowe (a) dla normalnego układu oddechowego, (b) dla układu oddechowego pacjenta z przewlekłą chorobą płuc
 Fig. 5.6. Experimental frequency characteristics (a) for normal respiratory system, (b) for respiratory system of patient suffering from chronic pulmonary



Rys. 5.7. Model funkcji mechanicznych układu oddechowego
 Fig. 5.7. Model of mechanical functions of respiratory system

choroby. Zwróćmy uwagę, że nie można ich bezpośrednio zmierzyć. Można je wyznaczyć na podstawie empirycznej charakterystyki częstotliwościowej, korzystając z odpowiednich metod identyfikacji. Problem wyznaczania tych parametrów jest zadaniem identyfikacji na 1. stopniu. Natomiast zadanie identyfikacji na 2. stopniu polega na wyznaczeniu zależności pomiędzy dawką środka farmakologicznego i parametrami R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , L .

5.2.2. Dwustopniowe zadanie identyfikacji

Jak już wspomniano, zadanie identyfikacji na 1. stopniu polega na ustaleniu parametrów charakterystyki (5.2). Można je wyznaczyć przez minimalizację kryterium

$$Q_1 = \sum_{i=1}^n |K(j\omega_i) - \bar{K}(j\omega_i)|^2, \quad (5.3)$$

gdzie ω_i - i-ta wartość częstotliwości ω ($i = 1, 2, \dots, n$), n - liczba różnych wartości ω .

W tym przypadku zadanie sprowadza się do wyboru optymalnych parametrów modelu omówionego w rozdz. 3. W dalszej części rozważań oznaczamy częstotliwość ω przez x_1 ($\omega \equiv x_1$). Charakterystykę (5.2) możemy przedstawić w postaci

$$\bar{K}(j, x_1) = \Phi_1^{(1)}(x_1, a_1) + j \Phi_1^{(2)}(x_1, a_1), \quad (5.4)$$

gdzie

$$\Phi_1^{(1)}(x_1, a_1) = \operatorname{Re}[\bar{K}(j, x_1)] = R_1 + \frac{(C_1 + C_2)C_2R_2 - C_1C_2R_2}{(C_1 + C_2)^2 + x_1^2(C_1C_2R_2)^2}, \quad (5.5)$$

$$\Phi_1^{(2)}(x_1, a_1) = \operatorname{Im}[\bar{K}(j, x_1)] = x_1 \left[L - \frac{C_1 + C_2 + C_1C_2R_2^2}{x_1^2(C_1 + C_2)^2 + x_1^4(C_1C_2R_2)^2} \right], \quad (5.6)$$

$a_1^T = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)} \ a_1^{(3)} \ a_1^{(4)} \ a_1^{(5)}] \triangleq [R_1 \ R_2 \ C_1 \ C_2 \ L]$ - wektor parametrów modelu na 1. stopniu. Wprowadźmy oznaczenie

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}^{(1)} \\ \bar{y}^{(2)} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)}(x_1, a_1) \\ \Phi_1^{(2)}(x_1, a_1) \end{bmatrix} \triangleq \Phi_1(x_1, a_1), \quad (5.7)$$

gdzie $\bar{y}$ - wyjście modelu na 1. stopniu, Φ_1 - model na 1. stopniu. Wówczas kryterium jakości identyfikacji (5.3) przyjmie postać:

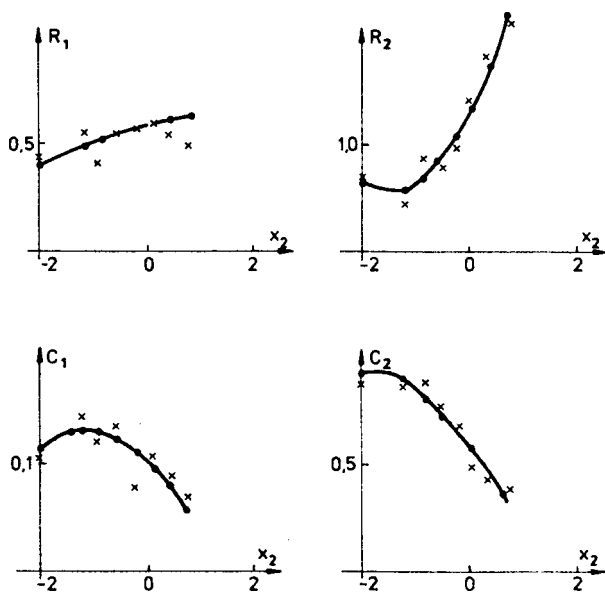
$$Q_1(a_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - \Phi_1(x_{1i}, a_1)]^T [y_i - \Phi_1(x_{1i}, a_1)], \quad (5.8)$$

gdzie $y_i = [y_i^{(1)} \ y_i^{(2)}]^T$, $y_i^{(1)} \triangleq \operatorname{Re}[K(jx_{1i})]$, $y_i^{(2)} \triangleq \operatorname{Im}[K(jx_{1i})]$ (odpowiednio część rzeczywista i urojona empirycznej charakterystyki częstotliwościowej dla częstotliwości x_{1i}). Problem identyfikacji na 1. stopniu sprowadza się do wyznaczenia wektora parametrów a_1 minimalizującego kryterium (5.8), tj. na 1. stopniu należy wyznaczyć wektor $a_{1n}^T = [a_{1n}^{(1)} \ a_{1n}^{(2)} \ a_{1n}^{(3)} \ a_{1n}^{(4)} \ a_{1n}^{(5)}] = [R_{1n} \ R_{2n} \ C_{1n} \ C_{2n} \ L_n]$, który jest

rozwiązaniem zadania optymalizacji

$$a_{1n} \rightarrow Q_1(a_{1n}) = \min_{a_1} Q_1(a_1). \quad (5.9)$$

W pracy [34] badano charakterystyki częstotliwościowe omawianego obiektu. Opracowano tam zadanie identyfikacji na 1. stopniu. Stosowano algorytm metody najmniejszych kwadratów. [Ze względu na nieliniowość funkcji Φ_1 w celu wyznaczenia parametrów modelu (5.2) korzystano z metod numerycznych optymalizacji.] Dla konkretnych pomiarów wyznaczono empiryczne charakterystyki częstotliwościowe, a następnie optymalne wartości parametrów modelu. Przykładowo, dla danych pochodzących z układu oddechowego pacjenta z przewlekłą chorobą płuc (rys. 5.6b): $R_{1n} = 2.09 \text{ cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}$, $R_{2n} = 4.29 \text{ cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}$, $C_{1n} = 0.0059 \text{ cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}^2$, $C_{2n} = 0.0304 \text{ cm H}_2\text{O} \cdot \text{litr}^{-1} \cdot \text{s}^2$, $L = 0.0057 \text{ litr} \cdot \text{cm H}_2\text{O}$. Jak wspomniano, wiele czynników wpływa na funkcje mechaniczne układu oddechowego. Na przykład oporność i elastyczność tego układu zmienia się pod wpływem środków farmakologicznych. Praca [35] przedstawia wyniki badań wpływu metacholiny na układ oddechowy. W toku badań dla ośmiu różnych dawek metacholiny wyznaczono optymalne parametry modelu (5.2). Wyniki zawarto w tab. 5.1 i zilustrowano na wykresach (rys. 5.8).



Rys. 5.8. Zależność parametrów R_1, R_2, C_1, C_2 od dawki metacholiny x_2 , wyznaczona na podstawie danych eksperymentalnych
Fig. 5.8. Dependence of the parameters R_1, R_2, C_1, C_2 on the metacholine dose x_2 determined from the experimental data

Dawka metacholiny w tabeli i na wykresach oznaczona jest przez x_2 i podawana jako logarytm dziesiętny stężenia metacholiny we wdychanym powietrzu ($\log_{10}(\text{mg} \cdot \text{ml}^{-1})$). Parametr L nie zależy od dawki metacholiny.

Opisane dane literaturowe wykorzystamy do ilustracji procedury identyfikacji dwustopniowej, a konkretnie do przedstawienia zadania na 2. stopniu.

Tabela 5.1

x_2	R_{1n}	R_{2n}	C_{1n}	C_{2n}
-2.0	0.414	0.676	0.097	0.903
-1.15	0.552	0.441	0.147	0.863
-0.85	0.414	0.897	0.124	0.881
-0.55	0.552	0.800	0.138	0.758
-0.2	0.566	0.966	0.072	0.687
0.05	0.689	1.379	0.105	0.481
0.4	0.634	1.862	0.086	0.438
0.75	0.621	2.207	0.067	0.381

W rozpatrywanym przypadku zadanie identyfikacji na 2. stopniu polega na ustaleniu zależności pomiędzy parametrami charakterystyki (5.2) a dawką leku. Wejściem x_2 jest tu dawka metacholiny. Na podstawie analizy danych przedstawionych w tab. 5.1 i

rys. 5.8 można przyjąć model na 2. stopniu w postaci wielomianów, tj.

$$\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(1)} \\ \bar{a}_1^{(2)} \\ \bar{a}_1^{(3)} \\ \bar{a}_1^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21}^{(1)} + a_{21}^{(2)} x_2 + a_{21}^{(3)} x_2^2 \\ a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} x_2 + a_{22}^{(3)} x_2^2 \\ a_{23}^{(1)} + a_{23}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(3)} x_2^2 \\ a_{24}^{(1)} + a_{24}^{(2)} x_2 + a_{24}^{(3)} x_2^2 \end{bmatrix} \triangleq \Phi_2(x_2, a_2), \quad (5.10)$$

gdzie $\bar{a}_1$ - wyjście modelu, a_2 - wektor parametrów modelu, $a_2^T \triangleq [a_{21}^{(1)} a_{21}^{(2)} a_{21}^{(3)} a_{21}^{(4)}]$, $a_{2k}^T \triangleq [a_{2k}^{(1)} a_{2k}^{(2)} a_{2k}^{(3)}]$, $k = 1, 2, 3, 4$. W modelu (5.10) nie uwzględniono parametru L , gdyż nie zależy on od x_2 . Zadanie identyfikacji na 2. stopniu sprowadza się do wyznaczenia optymalnego wektora parametrów a_2 na podstawie wyznaczonych na 1. stopniu parametrów R_1 , R_2 , C_1 , C_2 dla odpowiednich wartości x_2 . Zauważmy, że przy oznaczeniach $A_2^T \triangleq [a_{21}^{(1)} a_{21}^{(2)} a_{21}^{(3)} a_{21}^{(4)}]$, $\Phi_2(x_2) \triangleq [1 \ x_2 \ x_2^2]$ model (5.10) przyjmie postać (3.12), gdzie w miejsce x_2 należy wstawić $\Phi_2(x_2)$ oraz $l = 1$, $s_1 = 4$, $s_2 = 3$. Dla kwadratowego kryterium jakości identyfikacji problem wyznaczania optymalnych parametrów modelu (5.10) sprowadza się do zadania identyfikacji omówionego w p. 3.2. Optymalny model może być wykorzystany w praktyce do dawkowania metacholiny. Na jego podsta-

wie można wyznaczyć wartości parametrów R_1, R_2, C_1, C_2 dla większej liczby dawek metacholiny. Funkcja (5.10) z optymalnymi parametrami wyznaczonymi na podstawie danych zawartych w literaturze będzie tutaj wykorzystana do ilustracji procedury identyfikacji dwustopniowej oraz do przeprowadzenia badań symulacyjnych. Do wyznaczenia optymalnego wektora parametrów modelu (5.10) wystarczy znajomość algorytmu Ψ_{2m} (3.9), natomiast do badań symulacyjnych - a u nas takie będą - potrzebny jest również Ψ_{1n} (3.8).

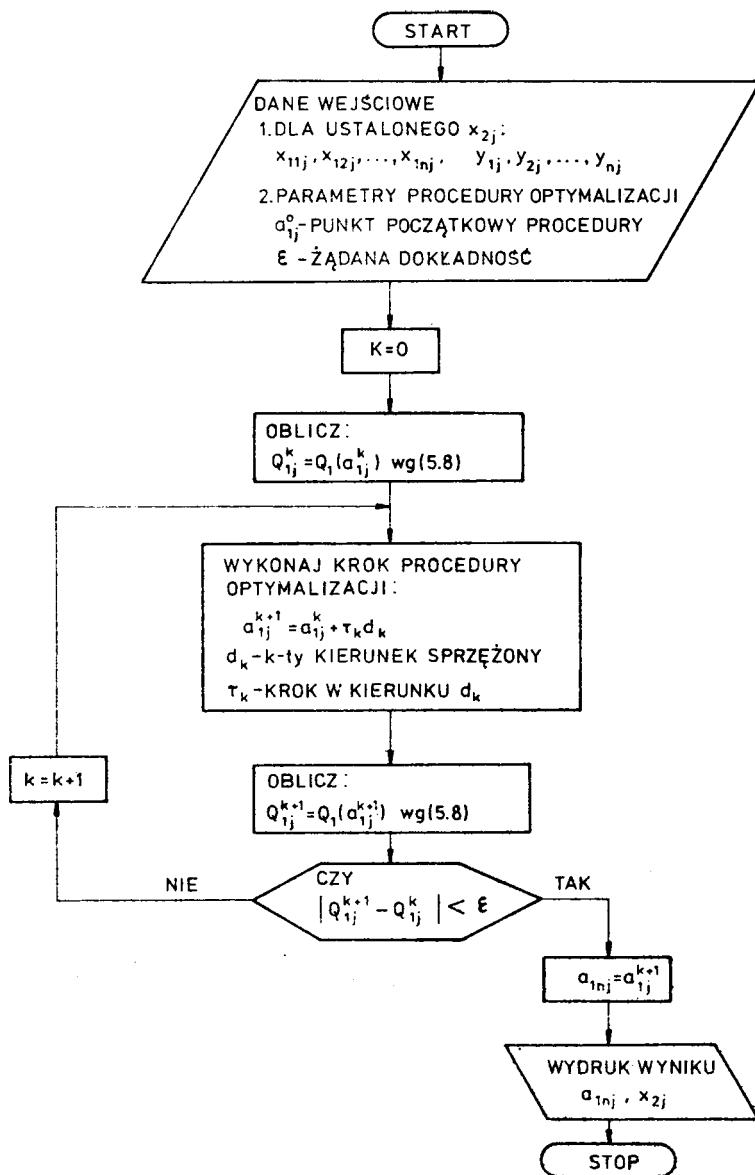
5.2.3. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń

Na 1. stopniu dla ustalonej j -tej dawki metacholiny x_{2j} należy wyznaczyć optymalne parametry charakterystyki (5.2), co sprowadza się do rozwiązania zadania optymalizacji (5.9), w którym w miejsce y_{ij} i x_{1i} należy wstawić odpowiednio y_{ij} oraz x_{1ij} , gdzie $y_{ij} = [y_{ij}^{(1)} \ y_{ij}^{(2)}]^T$, $y_{ij}^{(1)} = \text{Re}[K(jx_{1ij})]$, $y_{ij}^{(2)} = \text{Im}[K(jx_{1ij})]$ (odpowiednio część rzeczywista i urojona empirycznej charakterystyki częstotliwościowej dla częstotliwości x_{1ij} i ustalonej dawki metacholiny x_{2j}). W wyniku otrzymamy $a_{1nj}^T = [a_{1nj}^{(1)} \ a_{1nj}^{(2)} \ a_{1nj}^{(3)} \ a_{1nj}^{(4)} \ a_{1nj}^{(5)}] = [R_{1nj} \ R_{2nj} \ C_{1nj} \ C_{2nj} \ L_{nj}]$. Ze względu na nieliniową postać modelu (5.7) nie jest możliwe analityczne wyznaczenie algorytmu identyfikacji na 1. stopniu. W celu rozwiązania zadania (5.9) (tj. wyznaczenia a_{1nj}) należy stosować metody numeryczne optymalizacji. Do rozwiązania tego zadania wykorzystano metodę gradientu sprzężonego. Algorytm identyfikacji na 1. stopniu przedstawia schemat blokowy na rys. 5.9. Opracowano odpowiedni program na mikrokomputer IMP-85 w języku BASIC, realizujący ten algorytm. Nie wiadomo, jakiej procedury optymalizacyjnej użyto w pracy [35], stąd wyniki na 1. stopniu (tab. 5.1) mogą się nieco różnić od parametrów uzyskanych w badaniach symulacyjnych.

Jak już wspomniano, zadanie identyfikacji na 2. stopniu sprowadza się do przypadku liniowo-kwadratowego omówionego w p. 3.2. Odpowiedni algorytm identyfikacji Ψ_{2m} ma postać (3.26), gdzie w miejsce a_{1nj} należy wstawić $a_{1nj} = [R_{1nj} \ R_{2nj} \ C_{1nj} \ C_{2nj}]$, a w miejsce x_{2j} , $\varphi_2(x_{2j})$, $j = 1, 2, \dots, m$, m - liczba dawek leku, tj.

$$a_{2m} = \left(I_4 \otimes \left\{ \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} & x_{2j}^2 \\ x_{2j} & x_{2j}^2 & x_{2j}^3 \\ x_{2j}^2 & x_{2j}^3 & x_{2j}^4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \right) \sum_{j=1}^m \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_{2j} \\ x_{2j}^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} R_{1nj} \\ R_{2nj} \\ C_{1nj} \\ C_{2nj} \end{bmatrix} \right\}$$

Za pomocą tego algorytmu wyznaczmy optymalny wektor $a_{2m}^T = [a_{21m}^T \ a_{22m}^T \ a_{23m}^T \ a_{24m}^T]$ parametrów modelu (5.10). Dla danych z tab. 5.1 ($m = 8$)



Rys. 5.9. Schemat blokowy algorytmu identyfikacji na 1. stopniu
Fig. 5.9. Block diagram of the 1-st stage identification algorithm

otrzymujemy

$$a_{21m}^T = [0.597 \ 0.081 \ -0.639 \cdot 10^{-3}],$$

$$a_{22m}^T = [1.293 \ 1.023 \ 0.353],$$

$$a_{23m}^T = [0.104 \ -0.043 \ -0.021],$$

$$a_{24m}^T = [0.603 \ -0.313 \ -0.077].$$

Powyższe parametry modelu (5.10) wykorzystano w zapowiadanych badaniach symulacyjnych. Dla ustalonej wartości $x_2 = x_{2j}$ wyznaczono wektor parametrów $\bar{a}_{1j}^T = [\bar{R}_{1j} \ \bar{R}_{2j} \ \bar{C}_{1j} \ \bar{C}_{2j}]$ na podstawie wzoru (5.10), przyjąwszy $a_2 = a_{2m}$ obliczone dla danych z tab. 5.1. Następnie dla częstotliwości x_1 - przyjąwszy kolejno wartości $x_{11j}, x_{12j}, \dots, x_{1nj}$ - wyznaczono część rzeczywistą i urojoną charakterystyki częstotliwościowej $\bar{y}_{1j}, \bar{y}_{2j}, \dots, \bar{y}_{nj}$ z zależności (5.7) ((5.5), (5.6)), gdy $a_1^T = [a_{1j}^T \ 0.07]$ (tj. parametr $a_1^{(5)} \triangleq L$ przyjęto stały w czasie symulacji i równy $a_1^{(5)} = 0.07$). Częstotliwość x_1 przyjmowano z przedziału $[4, 35 \text{ Hz}]$, a ich liczba $n = 36$. Do wyznaczonych wartości $\bar{y}_{1j}$ dodawano zakłócenia $z_{ij} = [z_{ij}^{(1)} \ z_{ij}^{(2)}]^T$, będące realizacjami dwuwymiarowej zmiennej losowej $\underline{z} \triangleq [z^{(1)} \ z^{(2)}]$ o rozkładzie normalnym z parametrami: $E(\underline{z}) = [0 \ 0]^T$, $\text{Var}(\underline{z}^{(1)}) = 0.1$, $\text{Var}(\underline{z}^{(2)}) = 0.1$, $\text{Cov}(\underline{z}^{(1)} \ \underline{z}^{(2)}) = 0$, tj. wyznaczono $y_{ij} = \bar{y}_{ij} + z_{ij}$. Omówioną procedurę symulacji powtórzono dla x_2 przyjmujących wartości x_{2j} , $j = 1, 2, \dots, 8$ jak w tab. 5.1. Tak otrzymane dane symulacyjne wykorzystano do badania algorytmów identyfikacji na 1. i 2. stopniu. Opracowano odpowiedni program do badań symulacyjnych na mikrokomputer IMP 85 w języku BASIC, którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 5.10. I tak, dla ustalonego $x_2 = x_{2j}$ za pomocą algorytmu identyfikacji na 1. stopniu wyznaczono a'_{1nj} - optymalny wektor parametrów modelu (5.2). Powtarzamy identyfikację na 1. stopniu dla $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{28}$ i wyznaczamy kolejno $a'_{1n1}, a'_{1n2}, \dots, a'_{1n8}$. Wyniki zamieszczono w tab. 5.2 oraz zilustrowano je na rys. 5.11. Następnie za pomocą algorytmu identyfikacji na 2. stopniu obliczamy a'_{2m} - optymalny wektor parametrów modelu (5.10). W wyniku otrzymano

$$a_{2m}^T = [a_{21m}^T \ a_{22m}^T \ a_{23m}^T \ a_{24m}^T]$$

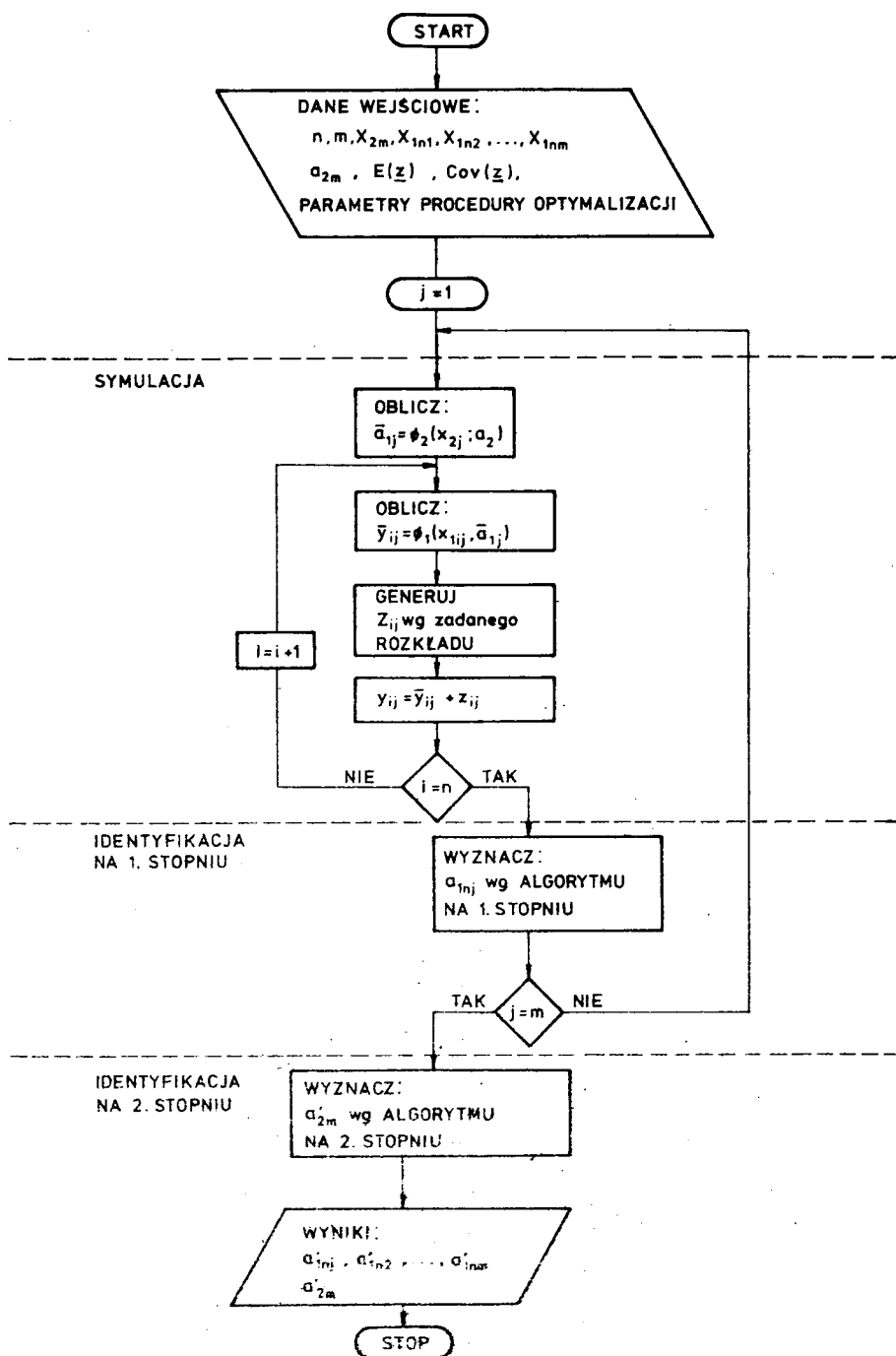
$$a_{21m}^T = [0.645 \ 0.106 \ -0.193 \cdot 10^{-2}]^T,$$

$$a_{22m}^T = [1.317 \ 1.018 \ 0.363]^T,$$

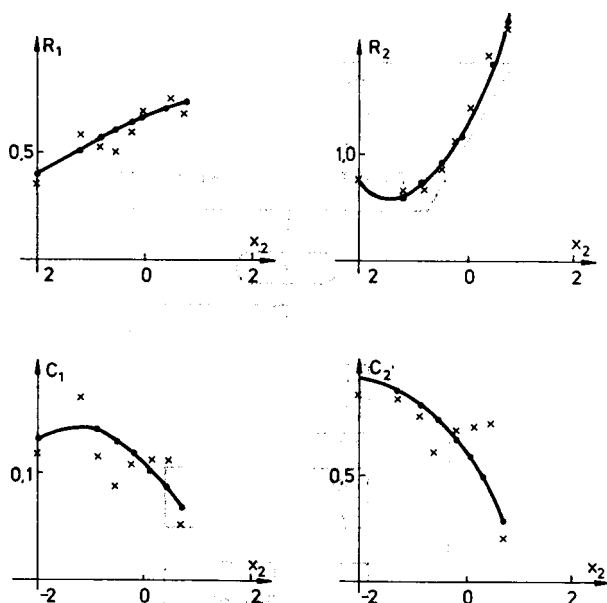
$$a_{23m}^T = [0.108 \ -0.044 \ -0.016]^T,$$

$$a_{24m}^T = [0.597 \ -0.335 \ -0.086]^T.$$

W celu porównania wyników symulacji z wynikami uzyskanymi z pomiarów wyznaczono parametry modelu $\bar{R}_{1j}, \bar{R}_{2j}, \bar{C}_{1j}, \bar{C}_{2j}$ dla różnych wartości



Rys. 5.10. Schemat blokowy programu do badań symulacyjnych
Fig. 5.10. Block diagram of the simulation program



Rys. 5.11. Zależność parametrów R_1, R_2, C_1, C_2 od dawki metacholiny x_2 , wyznaczona na podstawie danych symulacyjnych
 Fig. 5.11. Dependence of the parameters R_1, R_2, C_1, C_2 on the metacholine dose x_2 determined from the simulation data

x_{2j} , przyjmąwszy wektor a_2 równy wektorowi a_{2m} wyznaczonemu na podstawie danych pomiarowych z tab. 5.1. Wyniki zamieszczono w tab. 5.3 i zilustrowano na rys. 5.8 (linia ciągła). Podobnie, przyjmąwszy wektor a_2 równy wektorowi a'_{2m} wyznaczonemu na podstawie danych uzyskanych w wyniku symulacji (z tab. 5.2), wyznaczono parametry $\bar{R}_{1j}, \bar{R}_{2j}, \bar{C}_{1j}, \bar{C}_{2j}$ dla odpowiednich wartości x_{2j} . Wyniki zamieszczono w tab. 5.4 i zilustrowano na rys. 5.11 (linia ciągła). Po porównaniu zależności R_1, R_2, C_1, C_2 od x_2 uzyskanej w wyniku pomiarów (tab. 5.1, rys. 5.8) z odpowiednimi zależnościami uzyskanymi w wyniku symulacji (tab. 5.2, rys. 5.11), zauważamy, że parametry wyznaczone na 1. stopniu są porównywalne. Różnica nie przekracza kilku procent wartości parametru. Różnica ta jest spowodowana tym, że w badaniach symulacyjnych korzystano z przybliżonej zależności a_1 od x_2 wyznaczonej na podstawie pomiarów, a nie z danych z rzeczywistego obiektu. Ponadto na 1. stopniu korzystano z numerycznego algorytmu optymalizacji wyznaczającego rozwiązanie z określoną dokładnością. Nie wiadomo, jakiego algorytmu użyto w pracy [35], a w związku z tym algorytmy identyfikacji na 1. stopniu prawdopodobnie są różne. Dlatego parametry modelu uzyskane na 2. stopniu z danych pomiarowych (a_{2m}) i z danych symulacyjnych (a'_{2m}) mogą różnić się między sobą. W wyniku porównania wartości R_1, R_2, C_1, C_2 wyznaczonych na

podstawie a_{2m} (tab. 5.3, rys. 5.8 - linia ciągła) z odpowiednimi wartościami wyznaczonymi na podstawie a'_{2m} (tab. 5.4 i rys. 5.11 - linia ciągła) zauważmy, że różnice te nie przekraczają kilku procent wartości parametrów.

W badaniach symulacyjnych w celu porównania wyznaczono wartości tych parametrów tylko w tych samych punktach x_2 , w których dokonywano pomiarów. W symulacji możliwe jest zwiększanie liczby punktów pomiarowych na 2. stopniu, a przez to dokładniejsze wyznaczenie parametrów modelu na 2. stopniu. W badaniach symulacyjnych zwiększenie liczby pomiarów na 2. stopniu powoduje, że parametry a'_{2m} lepiej przybliżają parametry a_{2m} użyte w symulacji.

Tabela 5.2

j	x_{2j}	R'_{1nj}	R'_{2nj}	C'_{1nj}	C'_{2nj}
1	-2.00	0.400	0.743	0.1217	0.883
2	-1.15	0.587	0.645	0.1844	1.076
3	-0.85	0.530	0.677	0.1170	0.778
4	-0.55	0.520	0.818	0.0874	0.589
5	-0.20	0.591	1.125	0.1105	0.563
6	0.05	0.670	1.417	0.1135	0.624
7	0.40	0.766	1.859	0.1174	0.644
8	0.75	0.678	2.219	0.0502	0.201

Tabela 5.3

j	x_{2j}	$\bar{R}_{1j}$	$\bar{R}_{2j}$	$\bar{C}_{1j}$	$\bar{C}_{2j}$
1	-2.00	0.409	0.661	0.1057	0.923
2	-1.15	0.495	0.584	0.1259	0.862
3	-0.85	0.523	0.679	0.1256	0.814
4	-0.55	0.550	0.838	0.1215	0.753
5	-0.20	0.581	1.103	0.1120	0.663
6	0.05	0.601	1.345	0.1020	0.587
7	0.40	0.629	1.791	0.0835	0.465
8	0.75	0.655	2.259	0.0597	0.325

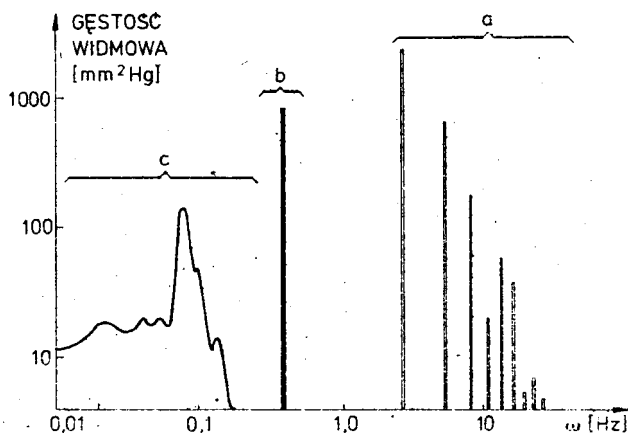
Tabela 5.4

j	x_{2j}	$\bar{R}'_{1j}$	$\bar{R}'_{2j}$	$\bar{C}'_{1j}$	$\bar{C}'_{2j}$
1	-2.00	0.412	0.730	0.1320	0.923
2	-1.15	0.516	0.626	0.1374	0.869
3	-0.85	0.551	0.714	0.1374	0.820
4	-0.55	0.585	0.867	0.1274	0.755
5	-0.20	0.624	1.128	0.1162	0.661
6	-0.05	0.650	1.369	0.1058	0.580
7	0.40	0.687	1.782	0.0878	0.449
8	0.75	0.721	2.285	0.0660	0.297

5.3. Identyfikacja dwustopniowa układu krążenia

5.3.1. Ogólne problemy identyfikacji układu krążenia

Układ krążenia (UK) spełnia bardzo ważną rolę w organizmie, a jego złożoność stwarza konieczność stosowania metod systemowych do analizy tego układu. Powstaje problem tworzenia modeli matematycznych opisujących różne funkcje tego układu. O ważności tej problematyki świadczy fakt, że UK jest najczęstszym (oprócz układu nerwowego) obiektem modelowania i identyfikacji. Charakter i złożoność procesów zachodzących w tym układzie można zauważyć w wyniku analizy widmowej gęstości mocy ciśnienia krwi w wybranym punkcie. W pracy [55] pokazano, że widmowa gęstość mocy ciśnienia krwi w aorcie może być podzielona na trzy zasadnicze komponenty (rys. 5.12): a) powyżej częstotliwości 2 Hz, b) około 0.4 Hz, c) poniżej 0.2 Hz. Występowanie komponenty a związane jest z pracą serca jako pompy wymuszającej przepływ krwi przez system naczyń krwionośnych. Komponenta b obrazuje oddziaływanie układu oddechowego na UK. Natomiast komponenta c charakteryzuje wolne zmiany spowodowane procesem regulacji ciśnienia krwi w organizmie (m. in. wpływ autonomicznego układu nerwowego) oraz skutki działania czynników zewnętrznych na UK (np. stres, wpływ środków farmakologicznych, dotlenienie organizmu).



Rys. 5.12. Widmowa gęstość mocy ciśnienia krwi w aorcie
Fig. 5.12. Power density spectrum of blood pressure in aorta

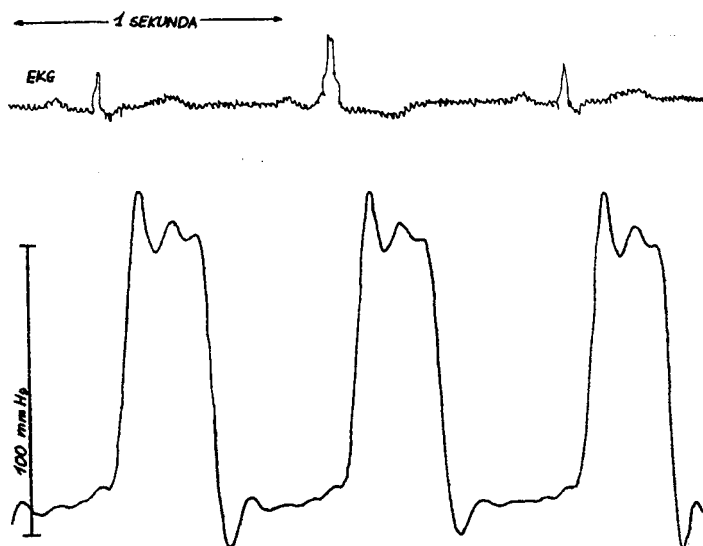
Prezentowane w literaturze [3, 33] modele dotyczą wybranych fragmentów UK i różnych jego funkcji. Na przykład w pracy [4] przedstawiono model procesów regulacji, a w pracy [30] - model mięśnia sercowego.

Wcześniejsze prace autora [57,58,60,65,64] dotyczą problemu identyfikacji funkcji hemodynamicznych układu krążenia. W celu ustalenia powiązań pomiędzy procesami zachodzącymi w UK oraz zbadania oddziaływania innych układów (np. oddechowego) można skorzystać z metody identyfikacji dwustopniowej. Próba uwzględnienia wszystkich procesów powoduje powstawanie modeli bardzo rozbudowanych, a przez to mało przydatnych do dalszych zastosowań. Korzystniejsze jest tworzenie modeli problemowo zorientowanych, opisujących tylko te funkcje UK, które są istotne w dalszych badaniach. Na przykład w zastosowaniach może być interesujące zbadanie wpływu środków farmakologicznych na funkcje hemodynamiczne UK. Można tu zastosować metodę identyfikacji dwustopniowej. Na 1. stopniu należy ustalić zależność między aktywnością mięśnia sercowego, ciśnieniami oraz przepływami krwi w wybranych punktach UK. Odpowiednio na 2. stopniu należy zbadać zależność parametrów modelu uzyskanego na 1. stopniu od dawki leku. Zauważmy, że parametry modelu na 1. stopniu mogą być wykorzystane do diagnostyki UK, natomiast zależność wyznaczona na 2. stopniu do optymalnego dawkowania leków w procesie terapii. W dalszej części tego punktu przedstawiono propozycję zadań identyfikacji dwustopniowej mięśnia sercowego, podsystemu krążenia płucnego oraz aorty. Przedstawiono zadania identyfikacji. Opisano odpowiednie algorytmy oraz wyniki obliczeń na 1. stopniu. Zaproponowano organizację eksperymentu dwustopniowego. Nie dysponowano pomiarami umożliwiającymi wyznaczenie optymalnych parametrów modelu na 2. stopniu. Prezentowane rozważania mają charakter programu badań w tym zakresie. Przedstawiają metodę postępowania, występujące problemy oraz sposób ich rozwiązania. W celu ustalenia uwagi zaproponowano podejście dwustopniowe do badania wpływu wybranych środków farmakologicznych na fragmenty UK. Metoda postępowania jest analogiczna, jeśli przyjmiemy inny czynnik zewnętrzny jako wejście na 2. stopniu. W prezentowanych przykładach występują zadania wyznaczania optymalnych modeli w postaci równań różniczkowych i transmitancji. W punkcie 3.4 z konieczności przedstawiono skrótowo zagadnienie identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych i zasygnalizowano tylko niektóre zadania. Rozważania przedstawione w tym punkcie można potraktować również jako pewne uzupełnienie rozważań uprzednio prezentowanych.

5.3.2. Dwustopniowe zadanie identyfikacji komory serca

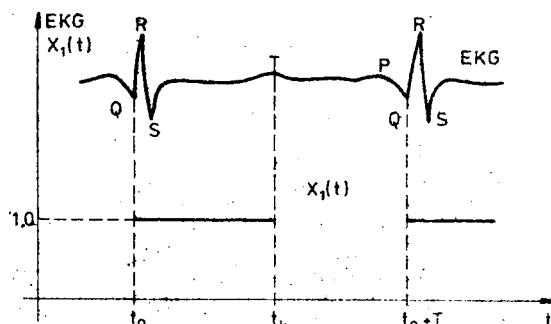
Jednym z badań prowadzonych podczas analizy pracy mięśnia sercowego jest pomiar ciśnienia krwi w komorze $y(t)$ oraz sygnału EKG. Ciśnienie krwi w prawej i lewej komorze ma podobny przebieg. Ciśnienia te różnią się co do wartości. Metoda identyfikacji prawej i lewej ko-

mory jest podobna. Dlatego w dalszej części ograniczono się do wyznaczenia modelu lewej komory. (W tekście "komora" określa lewą komorę.) Przykładowy zapis ciśnienia krwi w komorze oraz EKG przedstawiono na rys. 5.13. Pomiaru wykonano w II Klinice Chirurgicznej Akademii Medycznej we Wrocławiu. Wykorzystamy je w dalszej części do wyznaczania modelu komory. Sygnał EKG charakteryzuje aktywność mięśnia sercowego. Podczas analizy funkcji hemodynamicznych serca bardzo często na podstawie tego sygnału wprowadza się funkcję aktywności mięśnia sercowego [30,57], której przykład przedstawiono na rys. 5.14.



Rys. 5.13. Rejestracje sygnału EKG oraz pomiar ciśnienia krwi w lewej komorze serca

Fig. 5.13. Recording of EKG signal and the measurement of blood pressure in left heart ventricle



Rys. 5.14. Sygnał EKG oraz funkcja aktywności mięśnia sercowego

Fig. 5.14. EKG signal and the function heart muscle activity

W naszych rozważaniach oznaczmy ją przez $x_1(t)$ i przyjmijmy w postaci

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_0, t_k] \\ 0 & t \in [t_k, t_0+T] \end{cases}, \quad (5.11)$$

gdzie t_0 , t_k - odpowiednio początek i koniec skurczu, T - czas trwania jednego cyklu pracy serca.

Problem identyfikacji polega tu na wyznaczeniu zależności między ciśnieniem krwi w komorze a funkcją aktywności mięśnia sercowego. Jest to zadanie identyfikacji na 1. stopniu. Na podstawie analizy zapisu $y(t)$ oraz $x_1(t)$ (rys. 5.13, 5.14) można przyjąć model w postaci równania różniczkowego drugiego rzędu, tj.

$$a_1^{(2)} \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dt^2} + a_1^{(1)} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} + a_1^{(0)} \bar{y}(t) = x_1(t), \quad (5.12)$$

gdzie $\bar{y}(t)$ - wyjście modelu, $a_1^T = [a_1^{(0)} \ a_1^{(1)} \ a_1^{(2)}]$ - wektor parametrów modelu. Problem sprowadza się do wyznaczenia optymalnego wektora parametrów modelu (5.12). Niech kryterium jakości identyfikacji ma postać

$$Q_1(a_1) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[a_1^{(2)} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1^{(1)} \frac{dy(t)}{dt} + a_1^{(0)} y(t) - x_1(t) \right] \Big|_{t=t_i} \right\}^2, \quad (5.13)$$

gdzie $y(t_i)$ - pomiar ciśnienia krwi w komorze, $t_i \in [t_0, t_0+T]$, ($i = 1, 2, \dots, n$), n - liczba punktów pomiarowych. Zwróćmy uwagę, że w kryterium występują pochodne ciśnienia, których nie mierzymy. Możemy je wyznaczyć w przybliżeniu z zależności

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cong \dot{y}(t_i), \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} \approx \frac{\dot{y}(t_{i+1}) - \dot{y}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Proponowane kryterium ma nieco inną postać od wprowadzonych w rozdz. 3. Przyjawszy tę postać poszerzamy rozważania tam prowadzone. Optymalny wektor parametrów modelu (5.12) wyznaczamy przez minimalizację kryterium (5.13) względem a_1 . W wyniku otrzymujemy

$$a_{1n} = B_n^{-1} b_n, \quad (5.14)$$

gdzie B_n - kwadratowa macierz o elementach

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{l-1}} \frac{d^{l-1} y(t)}{dt^{l-1}} \right] \Big|_{t=t_i} \right\}, \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,3}.$$

b_n - kolumnowy wektor o składowych

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}} x_1(t) \right] \Big|_{t=t_i} \right\}, \quad k = \overline{1,3}.$$

Zależność (5.14) jest algorytmem identyfikacji na 1. stopniu. Dla pomiarów ciśnienia krwi w komorze, których zapis przedstawiono na rys. 5.13, wyznaczamy optymalny wektor $a_{1n}^T = [a_{1n}^{(0)} \ a_{1n}^{(1)} \ a_{1n}^{(2)}]$, gdzie $a_{1n}^{(0)} = 0.82 \cdot 10^{-2}$, $a_{1n}^{(1)} = 0.57 \cdot 10^{-3}$, $a_{1n}^{(2)} = 0.105 \cdot 10^{-4}$.

Przyjawszy kryterium na 1. stopniu w innej postaci, tj.

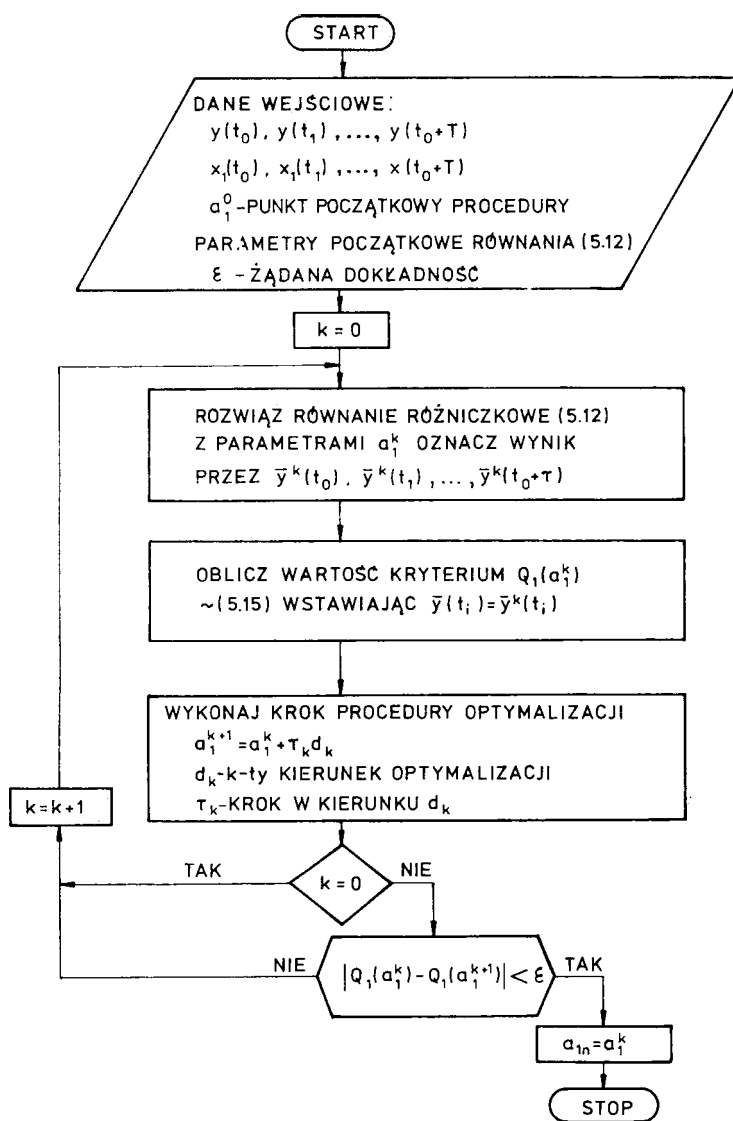
$$Q_1(a_1) = \sum_{i=1}^n [y(t_i) - \bar{y}(t_i)]^2, \quad (5.15)$$

gdzie $\bar{y}(t_i)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego (5.12) w chwili $t = t_i$ dla $x_1(t)$ określonego wzorem (5.11) i warunkami początkowymi $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0$, $\bar{y}(t_0) = y(t_0)$, nie potrafimy analitycznie wyznaczyć

algorytmu identyfikacji. Ze względu na nieliniowość funkcji $\bar{y}(t)$ należy skorzystać z numerycznych metod optymalizacji w celu minimalizacji kryterium (5.15). Przyjęta postać $x_1(t)$ pozwala na analityczne rozwiązanie równania różniczkowego (5.12). Dla bardziej złożonej funkcji $x_1(t)$ (a takie występują w literaturze), często podanej w dyskretnych chwilach t_i , dodatkowo dochodzi problem numerycznego rozwiązania tego równania. Odpowiedni algorytm dla tak przyjętego kryterium przedstawiono na schemacie blokowym (rys. 5.15).

Jako parametry początkowe równania (5.12) można przyjąć wartości wyznaczone z algorytmu (5.14). Rozwiązując zadanie identyfikacji na 1. stopniu otrzymujemy model komory w postaci równania różniczkowego (5.12). Parametry tego równania, wyznaczone na podstawie pomiarów dla konkretnego pacjenta, mogą być wykorzystane w celach diagnostycznych. Zestaw tych parametrów jest obrazem stanu mięśnia sercowego.

Opracowany model może być również wykorzystany w praktyce klinicznej do dawkowania leków. W tym celu należałoby zbadać działanie środków farmakologicznych na pracę mięśnia sercowego, a konkretnie ustalić zależność między dawką określonego leku a parametrami modelu komory. Ustalenie tej zależności jest tu zadaniem identyfikacji na 2. stopniu. Rozważmy dla przykładu preparaty naparstnicy (np. digoxin, dezlamozit), które są stosowane w leczeniu niewydolności układu krążenia [29]. Powodują one m.in. wzrost siły skurczu mięśnia sercowego. Z praktyki klinicznej wiadomo, że skuteczna dawka tego środka jest indywidualna dla każdego pacjenta, a ponadto istnieje niewielka rozpiętość między



Rys. 5.15. Schemat blokowy algorytmu identyfikacji na 1. stopniu
Fig. 5.15. Block diagram of the 1-st stage identification algorithm

dawką terapeutyczną i dawką toksyczną (np. dla niektórych osób dawka 0.4 mg/dobę jest już za duża ze względu na działania uboczne, natomiast dla innych osób skuteczna dawka wynosi 1.6 mg/dobę). Preparaty naparstnicy mogą powodować zaburzenia rytmu serca, a to z kolei ma wpływ na

wielkość pojemności minutowej. Dlatego też dawka tych leków powinna być tak dobrana, aby nie powodowała częstoskurczu i zapewniała odpowiednią wielkość pojemności minutowej. Ustalenie modelu na 2. stopniu pozwoliłoby na racjonalne stosowanie wspomnianych preparatów polegające na takim doborze dawki, która zapewnia odpowiednie ciśnienie krwi i rytm pracy serca. Jak dotychczas nie udało się przeprowadzić w tym przypadku odpowiednich eksperymentów dla identyfikacji na 2. stopniu. Są one pracochłonne, kosztowne i wymagają wielokrotnego powtórzenia identyfikacji na 1. stopniu. Przedstawiony dalej algorytm może być wykorzystany po uzyskaniu konkretnych liczbowych wyników pomiarów w odpowiednim ośrodku medycznym.

Jak już wspomniano, preparaty naperstnicy powodują wzrost ciśnienia w komorze oraz szybkość jego narastania. Zwróćmy uwagę, że wzrost siły skurczu mięśnia sercowego możemy zamodelować poprzez zmianę parametru $a_1^{(0)}$ w równaniu (5.12), a konkretnie zmniejszenie parametru $a_1^{(0)}$ (czyli zwiększenie $1/a_1^{(0)}$) powoduje wzrost ciśnienia, a przy stałym $a_1^{(1)}$ ze wzrostem stosunku $a_1^{(1)}/a_1^{(0)}$ zwiększa się szybkość narastania tego ciśnienia. Tak więc działanie preparatów naperstnicy na komorę można zbadać przez ustalenie zależności między dawką tych środków a parametrem $a_1^{(0)}$. Ustalenie tej zależności jest zadaniem identyfikacji na 2. stopniu, gdzie wejściem x_2 jest dawka preparatu naperstnicy, a wyjściem parametr $a_1^{(0)}$. Nie jest znana postać funkcji Φ_2 na 2. stopniu. Wstępnie można ją zaproponować na podstawie praktyki klinicznej w stosowaniu tego leku oraz interpretacji parametrów równania (5.12). Jak wcześniej wspomniano, dla małych dawek działanie tych środków jest nieznaczne, a po przekroczeniu pewnej dawki siła skurczu mięśnia sercowego szybko wzrasta. Odpowiada to niewielkim zmianom wartości $1/a_1^{(0)}$ dla małych dawek i szybkiemu jej narastaniu po przekroczeniu pewnej minimalnej dawki skutecznej. Jest to zależność nieliniowa. W przedziale stosowania tego leku można przyjąć następującą postać zależności między parametrem $a_1^{(0)}$ i dawką x_2

$$\bar{a}_1^{(0)} = \frac{1}{a_2^{(1)}(x_2 - d)^2 + a_2^{(2)}} \triangleq \Phi_2(x_2, a_2), \quad (5.16)$$

gdzie $\bar{a}_1^{(0)}$ - wyjście modelu na 2. stopniu, $a_2 = [a_2^{(1)} \ a_2^{(2)}]^T$ - wektor parametrów.

Stała d występująca w modelu ma interpretację minimalnej skutecznej dawki tego środka. Można ją ustalić (zmierzyć) dla badanego pacjenta na podstawie praktyki klinicznej w dawkowaniu tego leku. Składowym wektora a_2 można nadać pewną interpretację, a mianowicie $a_2^{(1)}$ - współczynnik wzmocnienia siły skurczu mięśnia sercowego spowodowanego

lekiem, $a_2^{(2)}$ - parametr opisujący siłę skurczu mięśnia sercowego bez leku. Ze względów obliczeniowych wygodniej jest badać zależność

$$\bar{b} \triangleq \frac{1}{a_1^{(0)}} = a_2^{(1)}(x_2 - d)^2 + a_2^{(2)}. \quad (5.17)$$

Przyjmijmy kwadratowe kryterium jakości identyfikacji na 2. stopniu w postaci

$$Q_2(a_2) = \sum_{j=1}^m [b_{nj} - a_2^{(1)}(x_{2j} - d)^2 - a_2^{(2)}]^2,$$

gdzie $b_{nj} \triangleq 1/a_{1nj}^{(0)}$, $a_{1nj}^{(0)}$ - optymalna wartość parametru $a_1^{(0)}$ wyznaczona dla j -tej dawki leku (t_j , $x_2 = x_{2j}$). W wyniku minimalizacji powyższego kryterium względem $a_2^{(1)}$ i $a_2^{(2)}$ otrzymamy algorytm identyfikacji na 2. stopniu. Optymalne wartości parametrów $a_{2m}^{(1)}$ i $a_{2m}^{(2)}$ wyliczamy ze wzorów:

$$a_{2m}^{(1)} = \frac{m \sum_{j=1}^m b_{nj} v_j - \left(\sum_{j=1}^m b_{nj} \right) \left(\sum_{j=1}^m v_j \right)}{m \sum_{j=1}^m v_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m v_j \right)^2} \quad (5.18)$$

$$a_{2m}^{(2)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m v_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m b_{nj} \right) - \left(\sum_{j=1}^m v_j \right) \left(\sum_{j=1}^m b_{nj} v_j \right)}{m \sum_{j=1}^m v_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m v_j \right)^2}, \quad (5.19)$$

gdzie $v_j \triangleq (x_{2j} - d)^2$. Po podstawieniu w modelu (5.12) w miejsce $a_1^{(0)}$ zależności (5.16) z parametrami wyznaczonymi ze wzorów (5.18) i (5.19) otrzymamy model komory serca dla konkretnego pacjenta, uwzględniający działanie preparatów naparstnicy.

W podsumowaniu powyższych rozważań możemy zaproponować następujący program badań w celu wyznaczenia wpływu preparatów naparstnicy na funkcję komory serca:

1. Ustalić minimalną skuteczną dawkę preparatu.
2. Dla zadanych kilku dawek x_{21} , x_{22} , ..., x_{2m} zarejestrować EKG oraz ciśnienie krwi w komorze w czasie pełnego cyklu pracy serca (t_j dla j -tej dawki zarejestrować $y_j(t)$ dla $t \in [t_{0j}, t_{0j} + T_j]$, gdzie t_{0j} , T_j odpowiednio początek i czas trwania cyklu; t_{0j} i T_j ustalamy na podstawie sygnału EKG dla j -tej dawki i wykorzystujemy do określenia funkcji aktywności mięśnia sercowego x_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$).

3. Za pomocą algorytmu identyfikacji na 1. stopniu wyznaczyć optymalny wektor a_{1nj} parametrów modelu (5.12) odpowiadający j -tej dawce (we wzorze (5.14) lub (5.15) - zależnie od przyjętego kryterium - należy wstawić w miejsce $y(t)$ i $x_1(t)$ odpowiednio $y_j(t)$, $x_{1j}(t)$).

4. Za pomocą algorytmu identyfikacji na 2. stopniu (wzory (5.18), (5.19)) wyznaczyć optymalne parametry modelu (5.17).

Po wstawieniu w modelu (5.12) w miejsce $a_1^{(0)}$ optymalnej zależności wyznaczonej na 2. stopniu (tj. $\bar{a}_1^{(0)} = 1/\bar{b}$) oraz w miejsce $a_1^{(1)}$ i $a_1^{(2)}$, optymalne parametry wyznaczone na 1. stopniu (tj. $a_{1n}^{(1)}$ i $a_{1n}^{(2)}$), otrzymujemy

$$a_{1n}^{(1)} \frac{d^2 \bar{y}(t)}{dt} + a_{1n}^{(2)} \frac{d \bar{y}(t)}{dt} + \frac{\bar{y}(t)}{a_{2m}^{(1)} (x_2 - d)^2 + a_{2m}^{(2)}} = x_1(t). \quad (5.21)$$

Jest to model funkcji komory serca, uwzględniający wpływ preparatów naparstnicy. Z optymalnymi parametrami wyznaczonymi na podstawie pomiarów dla konkretnego pacjenta może on być wykorzystany do racjonalnego dawkowania leku. W tym celu można sformułować następujące zadanie: Dobrać optymalną dawkę leku maksymalizującą średnią wartość ciśnienia w komorze tak, aby częstość pracy mięśnia sercowego była w zadanym przedziale. Zadanie to możemy zapisać w następujący sposób: Dla pacjenta, którego komorę serca opisuje równanie (5.21), wyznaczyć optymalną dawkę preparatu naparstnicy x_2^* tak, że

$$x_2^* \rightarrow \max_{x_2} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{y}(t) dt$$

przy ograniczeniu

$$T_{\min} \leq \varphi(x_2) \leq T_{\max},$$

gdzie funkcja φ występująca w ograniczeniu opisuje wpływ preparatów naparstnicy na częstość pracy serca, $T_{\min}$ i $T_{\max}$ odpowiednio dolne i górne ograniczenie czasu trwania cyklu pracy serca.

Jest to tylko wstępnie zasygnalizowane zadanie, które w tym przypadku należy rozwiązać. Dokładne sformułowanie tego zadania wymaga m. in. określenia funkcji φ w ograniczeniach. Można to zrobić na podstawie proponowanego zestawu danych pomiarowych za pomocą tradycyjnych metod identyfikacji, a konkretnie zależność tę można wyznaczyć na podstawie pomiaru T_j dla określonej dawki x_{2j} ($j = 1, 2, \dots, m$). Ponadto należy uwzględnić inne ograniczenia wynikające z praktyki klinicznej.

5.3.3. Dwustopniowe zadanie identyfikacji funkcji hemodynamicznych układu krążenia płucnego

Krew krążąca w organizmie ma za zadanie dostarczenie do każdej komórki odpowiednich składników odżywczych, tlenu, uwolnienie dwutlenku węgla, utrzymanie temperatury itp. Zadania te spełniane są przez odpowiedni przepływ krwi przez system naczyń krwionośnych, wymuszony pracą serca, tj. dzięki funkcjom hemodynamicznym układu krążenia. Badanie hemodynamiki krążenia płucnego i wielkiego polega na ustaleniu zależności między ciśnieniem krwi wytwarzanym przez komory, strumieniem krwi wypływającym z serca i ciśnieniami krwi w wybranych punktach układu. Opis taki zależy od parametrów naczyń krwionośnych, a zwłaszcza od ich oporności i elastyczności. Z kolei elastyczność i oporność może się zmieniać pod wpływem czynników zewnętrznych (np. środków farmakologicznych). Powstaje problem zbadania wpływu tych czynników na hemodynamikę krążenia wielkiego i płucnego. W tym celu można zastosować zadanie identyfikacji dwustopniowej. Ograniczymy się do zbadania hemodynamiki krążenia płucnego. Metoda postępowania podczas wyznaczania modelu dla krążenia wielkiego jest analogiczna z tym, że równania opisujące ten obiekt są bardziej złożone. W pierwszym przybliżeniu przepływ krwi przez układ krążenia płucnego możemy traktować jako jednowymiarowy proces dyfuzji wymuszony przez ciśnienie wytwarzane w prawej komorze na jednym brzegu oraz w lewej komorze na drugim brzegu. Klasyczny model tego typu procesu podawany jest w postaci równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. W celu uproszczenia rozważań można zastosować model w postaci dyskretniej i podzielić układ krążenia płucnego na r segmentów.

Podziału należy dokonać tak, aby ciśnienie w punktach, w których linia podziału przecina obwód, było stałe i dla p -tej linii równe $y^{(p)}(t)$ ($p = 1, 2, \dots, r$). Poglądowy obraz podziału przedstawiono na rys. 5.16. Liczba wyodrębnionych segmentów zależy od możliwości pomiarowych. Założywszy, że procesy zachodzące w dowolnym segmencie są stałe oraz, że każdy odcinek charakteryzuje stały opór i elastyczność naczyń krwionośnych, omawiany układ można opisać za pomocą następującego układu równań różniczkowych

$$k_{RV}[x_{RV}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)] H[x_{RV}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)] = u_{RV}(t),$$

$$C^{(1)} \frac{d\bar{y}^{(1)}(t)}{dt} = k^{(1)}[\bar{y}^{(2)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)] - u_{RV}(t), \quad (5.22)$$

$$C^{(p)} \frac{d\bar{y}^{(p)}(t)}{dt} = k^{(p)}[\bar{y}^{(p+1)}(t) - \bar{y}^{(p)}(t)] - k^{(p-1)}[\bar{y}^{(p)}(t) - \bar{y}^{(p-1)}(t)],$$

$$p = 2, 3, \dots, r$$

$$C^{r+1} \frac{d\bar{y}^{(r+1)}}{dt} = u_{LA}(t) - k^{(r)} [\bar{y}^{(r+1)}(t) - \bar{y}^{(r)}(t)] - u x(t),$$

$$k_{LA} \bar{y}^{(r+1)}(t) - x_{LV}(t) H[\bar{y}^{(r+1)}(t) - x_{LV}(t)] = u_{LA},$$

gdzie

$\bar{y}^{(p)}(t)$ - p-ta składowa wyjścia modelu - ciśnienie krwi dla p-tej linii podziału, $p = 1, 2, \dots, r$,

$\bar{y}^{(r+1)}(t)$ - r+1. składowa wyjścia modelu - ciśnienie krwi w lewym przedsionku,

$x_{RV}(t)$, $x_{LV}(t)$ - odpowiednio ciśnienie krwi w prawej i lewej komorze,

$u_{RV}(t)$ - strumień krwi wypływający z prawej komory serca,

$u_{LA}(t)$ - strumień krwi wpływający do lewej komory serca,

$x(t)$ - funkcja aktywności mięśnia sercowego (zdefiniowana analogicznie jak w p. 5.3.2),

$C^{(p)}$ - parametr opisujący elastyczność naczyń krwionośnych między p-tym i (p+1) punktem obwodu krążenia, $p = 1, 2, \dots, r$,

$C^{(r+1)}$ - parametr opisujący elastyczność lewego przedsionka,

$k^{(p)}$ - przepływność (odwrotność oporu przepływu) segmentu między p-tym i (p+1) punktem obwodu krążenia, $p = 1, 2, \dots, r$,

k_{RV} - przepływność (odwrotność oporu przepływu) pierwszego odcinka obwodu krążenia płucnego (tj. przepływność między prawą komorą, a pierwszym punktem wybranym na obwodzie, jeżeli wybrany punkt obwodu położony jest blisko prawej komory, to parametr ten może być interpretowany jako przepływność przez otwartą zastawkę między komorą i tętnicą płucną),

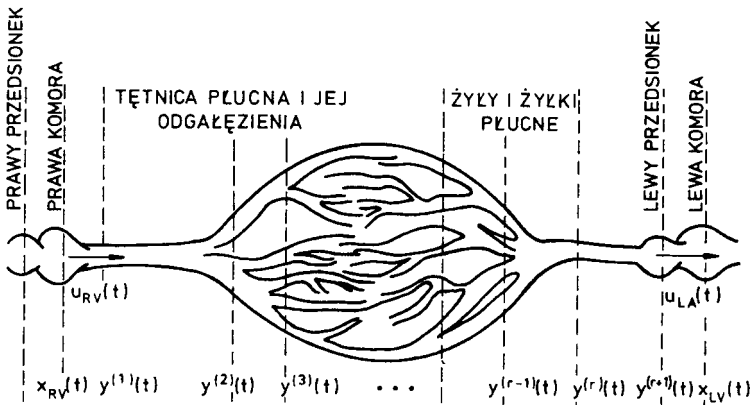
k_{LA} - przepływność (odwrotność oporu przepływu) końcowego odcinka obwodu krążenia płucnego (jeżeli r-ty punkt na obwodzie usytuowany jest blisko lewego przedsionka, to parametr ten może być interpretowany jako przepływność przez otwartą zastawkę między lewym przedsionkiem a lewą komorą i przedsionek łącznie),

u - parametr opisujący wpływ pracy serca na ciśnienie w przedsionku,

H - funkcja opisująca zastawkę,

$$H(z) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0 \\ 1 & \text{dla } z \geq 0. \end{cases}$$

Z systemowego punktu widzenia układ równań (5.22) opisuje wielowymiarowy obiekt dynamiczny o wejściu $x_1(t) \triangleq [u_{RV}(t) \ x_{RV}(t) \ x_{LV}(t) \ u_{LA}(t) \ x(t)]^T$ i wyjściu $y(t) \triangleq [\bar{y}^{(1)}(t) \ \dots \ \bar{y}^{(r+1)}(t)]^T$, natomiast $a_1 \triangleq [k_{RV} \ C^{(1)} \ k^{(1)} \ C^{(2)} \ k^{(2)} \ \dots \ C^{(r)} \ k^{(r)} \ C^{(r+1)} \ k_{LA} \ u]^T$ jest wektorem parametrów modelu tego obiektu. Na podstawie pomiarów ciśnienia



Rys. 5.16. Poglądowy obraz podziału na segmenty podsystemu krążenia płucnego

Fig. 5.16. Schematic representation of the partition of pulmonary circulation subsystem into segments

krwi w lewej i prawej komorze $x_{RV}(t)$, $x_{LV}(t)$, strumienia z prawej komory do aorty płucnej $u_{RV}(t)$ i z prawego przedsionka do lewej komory $u_{LV}(t)$, sygnału EKG w celu ustalenia aktywności mięśnia sercowego $x(t)$ oraz ciśnień w wybranych r punktach układu krążenia $y^{(1)}(t)$, $y^{(2)}(t)$, ..., $y^{(r)}(t)$ i w lewym przedsionku $y^{(r+1)}(t)$, w czasie trwania jednego cyklu pracy serca (tj. $t \in [t_0, t_0+T]$, t_0 - początek skurczu, T - czas trwania jednego cyklu pracy serca), należy wyznaczyć nieznaną wektor parametrów a_1 . Jest to zadanie identyfikacji na 1. stopniu. Wprowadzamy oznaczenia: $v(t)$ - $(2r+3)$ - wymiarowy wektor, $\bar{W}(t)$ - macierz prostokątna o wymiarze $(2r+3) \times (r+3)$

$$\bar{W}^T(t) \equiv \begin{bmatrix} \varphi_{RV}(t) & \varphi_{RV}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\bar{y}^{(1)}(t)}{dt} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi^{(1)}(t) & \varphi^{(1)}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\bar{y}^{(2)}(t)}{dt} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi^{(2)}(t) & \varphi^{(2)}(t) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \frac{d\bar{y}^{(2)}(t)}{dt} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\varphi^{(r)}(t) & \varphi^{(r)}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{d\bar{y}^{(1+r)}(t)}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varphi_{LV}(t) & \varphi_{LV}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$v(t) \triangleq [u_{RV}(t) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ u_{LA}(t)]^T,$$

gdzie

$$\varphi_{RV}(t) = [x_{RV}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)]^T H [x_{RV}(t) - \bar{y}^{(1)}(t)],$$

$$\varphi_{LV}(t) = [\bar{y}^{(r+1)}(t) - x_{LV}(t)]^T H [\bar{y}^{(r+1)}(t) - x_{LV}(t)],$$

$$\varphi^{(p)}(t) = [\bar{y}^{(p)}(t) - \bar{y}^{(p-1)}(t)]^T, \quad p = 1, 2, \dots, r+1$$

i układ równań (5.22) możemy przepisać w postaci

$$\bar{W}(t) a_1 = v(t). \quad (5.24)$$

Przyjmijmy kryterium jakości identyfikacji na 1. stopniu w postaci

$$Q_1(a_1) = \sum_{i=1}^n [W(t_i) a_1 - v(t_i)]^T [W(t_i) a_1 - v(t_i)], \quad (5.25)$$

gdzie $v(t_i)$ - wektor $v(t)$ w i -tej chwili pomiarowej, $W(t_i)$ - macierz $\bar{W}(t)$ określona wzorem (5.23), w której w odpowiednie miejsca wstawiono $x_{RV}(t_i)$, $x_{LV}(t_i)$, $x(t_i)$, a wartości $\bar{y}^{(p)}(t)$ i $d\bar{y}^{(p)}(t)/dt$ zastąpiono odpowiednio przez $y^{(p)}(t_i)$, $[y^{(p)}(t_{i+1}) - y^{(p)}(t_i)] / (t_{i+1} - t_i)$ ($p = 1, 2, \dots, r+1$). W wyniku minimalizacji (5.25) względem a_1 otrzymujemy algorytm identyfikacji na 1. stopniu

$$a_{1n} = \left\{ \sum_{i=1}^n W(t_i)^T W(t_i) \right\}^{-1} \sum_{i=1}^n W(t_i)^T v(t_i), \quad (5.26)$$

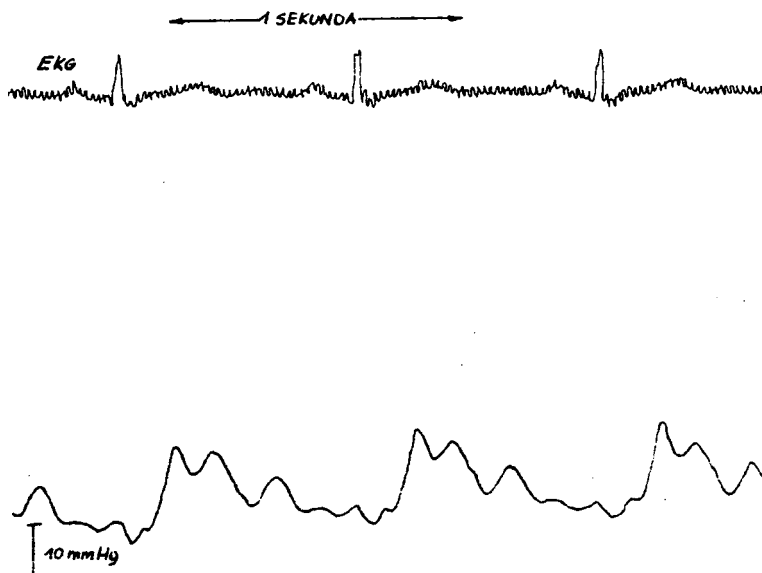
gdzie $a_{1n} = [k_{RVn} \ c_n^{(1)} \ k_n^{(1)} \ c_n^{(2)} \ k_n^{(2)} \ \dots \ c_n^{(r)} \ k_n^{(r)} \ c_n^{(r+1)} \ k_{LAN} \ u_n]^T$ - optymalny wektor parametrów modelu (5.17).

Na rysunkach 5.13 i 5.17-5.20 przedstawiono zarejestrowane pomiary ciśnienia krwi odpowiednio w lewej i prawej komorze $x_{LV}(t)$, $x_{RV}(t)$, głównym pniu tętnicy płucnej $y^{(1)}(t)$, lewej gałęzi tętnicy płucnej $y^{(2)}(t)$, lewym przedsionku $y^{(3)}(t)$ oraz EKG. Pomiary wykonano w II Klinice Chirurgicznej Akademii Medycznej we Wrocławiu. Nie dysponowano pomiarami $u_{LA}(t)$ i $u_{RV}(t)$. Przyjęto je na podstawie danych zawartych w literaturze [5] (rys. 5.21). Na podstawie tych pomiarów wyznaczono optymalne parametry modelu (5.17) za pomocą algorytmu (5.26), przyjmąwszy $r = 2$. Wyniki przedstawiono w tab. 5.5.

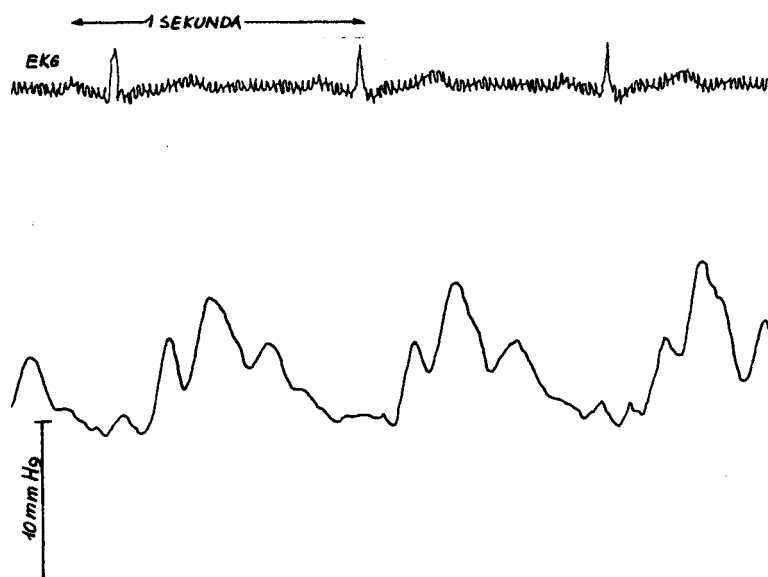
Są to optymalne wartości parametrów modelu na 1. stopniu. W wyniku rozwiązania zadania identyfikacji na 1. stopniu otrzymamy model funkcji hemodynamicznych układu krążenia. Na podstawie pomiarów dla



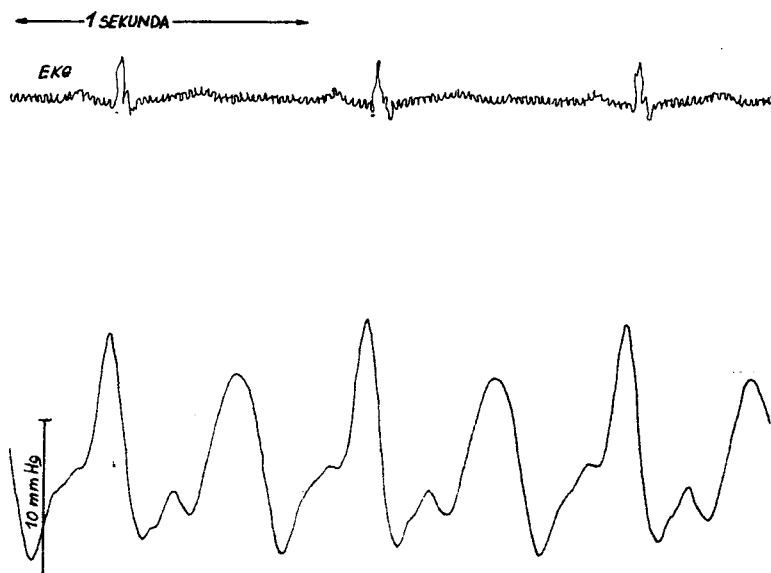
Rys. 5.17. Pomiar ciśnienia krwi w prawej komorze serca
 Fig. 5.17. Measurement of blood pressure in right heart ventricle



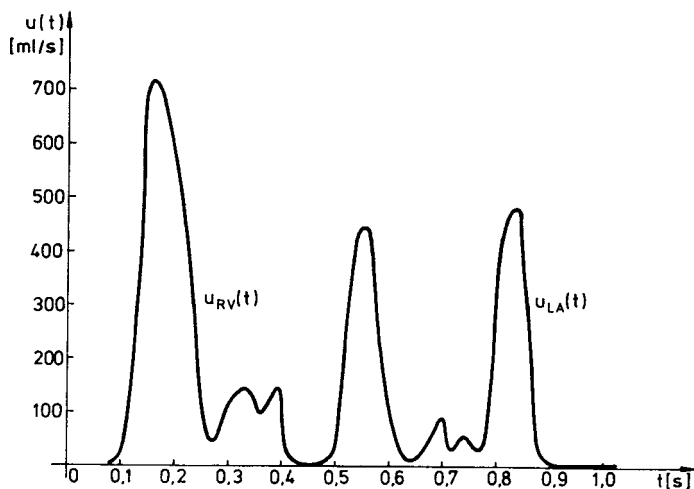
Rys. 5.18. Pomiar ciśnienia krwi w głównym pniu tętnicy płucnej
 Fig. 5.18. Measurement of blood pressure in main pulmonary artery



Rys. 5.19. Pomiar ciśnienia krwi w lewej gałęzi tętnicy płucnej
 Fig. 5.19. Measurement of blood pressure in left branch of pulmonary artery



Rys. 5.20. Pomiar ciśnienia krwi w prawym przedsionku
 Fig. 5.20. Measurement of blood pressure in right heart atrium



Rys. 5.21. Strumienie krwi w obwodzie płucnym
Fig. 5.21. Blood flow in pulmonary circuit

konkretnego pacjenta możemy ustalić jego optymalne parametry. W celu zastosowania tego modelu w praktyce klinicznej do procesu terapii należy zbadać wpływ środków farmakologicznych na jego parametry. Jednym z leków stosowanych w leczeniu niewydolności układu krążenia, a konkretnie nadciśnienia jest prazosyn (minipres). Powoduje on rozszerzenie naczyń krwionośnych, a to

Tabela 5.5

Parametr	Wartość	Jednostki
k_{RVn}	$0.556 \cdot 10^2$	$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
$C_n^{(1)}$	$0.111 \cdot 10$	$\text{ml} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
$k_n^{(1)}$	$0.916 \cdot 10$	$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
$C_n^{(2)}$	0.215	$\text{ml} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
$k_n^{(2)}$	0.446	$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
$C_n^{(3)}$	0.035	$\text{ml} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
k_{LAn}	$0.124 \cdot 10^2$	$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (\text{mmHg})^{-1}$
μ_n	$0.928 \cdot 10^2$	$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1}$

z kolei powoduje obniżenie średniego ciśnienia krwi w organizmie. Badania tego leku wykazują, że spadkowi ciśnienia krwi nie towarzyszy większa zmiana aktywności serca. Ponadto badania te sugerują, że naczyniorozszerzające działanie tego preparatu związane jest z blokadą receptorów alfa adrenergicznych (α_1). Z fizjologii układu krążenia [5] wiadomo, że naczynia krwionośne zbudowane są z włókien sprężystych, mięśni gładkich i włókien kolagenowych. Różny jest skład ilościowy tych włókien w różnych odcinkach układu krążenia, a blokada receptorów α_1 po-

woduje rozszerzenie przede wszystkim tych naczyń, które zawierają najwięcej mięśni gładkich (tj. tętnice umięśnione, tętniczki, żyłki i żyły). Rozszerzenie tych naczyń ma znaczący wpływ na regulację ciśnienia.

Zauważmy, że skutkiem rozszerzenia naczyń krwionośnych jest zmiana ich oporności przepływu. W modelu (5.22) odpowiada to zmianom wartości parametrów $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ..., $k^{(r)}$, które charakteryzują przepływność naczyń (odwrotność oporności przepływu). Tak więc w celu zbadania wpływu prazosynu na homodynamikę układu krążenia należy zbadać zależność między parametrami $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ..., $k^{(r)}$ a dawką tego leku. Jest to zadanie identyfikacji na 2. stopniu, gdzie wejściem x_2 jest dawka prazosynu, a wyjściem wartości parametrów $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ..., $k^{(r)}$.

Zwróćmy uwagę, że przepływności naczyń nie możemy zmierzyć bezpośrednio dla indywidualnego pacjenta. Możemy je wyznaczyć przez rozwiązanie zadania identyfikacji na 1. stopniu. Ustalenie modelu na 2. stopniu pozwoliłoby na racjonalne dobranie dawki prazosynu tak, aby zapewnić żądane ciśnienie w organizmie. Z przyczyn wymienionych poprzednio nie udało się przeprowadzić takich badań, a przedstawione poniżej rozważania można potraktować jako propozycję możliwą do wykorzystania w odpowiednich ośrodkach medycznych. Jak już wcześniej wspomniano, prazosyn powoduje rozszerzenie naczyń krwionośnych, a przez to zwiększa ich przepływność. Małe dawki powodują nieznaczny, a nieco większe szybki wzrost ich przekroju. Po przekroczeniu pewnej dawki następuje nasycenie rozszerzenia naczyń spowodowane działaniem włókien sprężystych. Charakter tych zmian jest podobny w różnych odcinkach układu krążenia, z tym że stopień rozszerzania się pod wpływem prazosynu i próg nasycenia są różne w zależności od stosunku ilości włókien sprężystych do mięśni gładkich, charakteryzującego dany odcinek naczynia krwionośnego. Podobny przebieg mają przepływności naczyń, które zależą od przekroju naczyń. Są to zależności nieliniowe. W przedziale stosowania dawek tego leku zależności te można przybliżyć wielomianami 3. stopnia. Tak więc na 2. stopniu przyjmujemy model dla przepływności p -tego segmentu układu krwionośnego w postaci

$$\bar{k}^{(p)} = a_{2p}^{(0)} + a_{2p}^{(1)} x_2 + a_{2p}^{(2)} x_2^2 + a_{2p}^{(3)} x_2^3, \quad (5.27)$$

$$p = 1, 2, \dots, r,$$

gdzie $\bar{k}^{(p)}$ - wyjście modelu, $a_{2p} = [a_{2p}^{(0)} \ a_{2p}^{(1)} \ a_{2p}^{(2)} \ a_{2p}^{(3)}]^T$ - wektor parametrów modelu.

Zadanie identyfikacji na 2. stopniu sprowadza się do wyznaczenia optymalnych parametrów modelu (5.27). W tym celu dla przyjętych kilku (m) dawek prazosynu, x_{21} , x_{22} , ..., x_{2m} , za pomocą identyfikacji na 1.

stopniu należy wyznaczyć odpowiednie dla tych dawek wartości przepływności p-tego segmentu układu krążenia $k_{n1}^{(p)}, k_{n2}^{(p)}, \dots, k_{nm}^{(p)}$. Optymalny wektor parametrów modelu (5.27) wyznaczamy na podstawie minimalizacji kryterium

$$Q_{2p}(a_{2p}) = \sum_{j=1}^m [k_{nj}^{(p)} - a_{2p}^{(0)} - a_{2p}^{(1)}x_2 - a_{2p}^{(2)}x_2^2 - a_{2p}^{(3)}x_2^3]^2,$$

$$p = 1, 2, \dots, r$$

względem wektora a_{2p} . W wyniku otrzymujemy algorytm identyfikacji na 2. stopniu

$$a_{2pm} = \left\{ \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} 1 & x_{2j} & x_{2j}^2 & x_{2j}^3 \\ x_{2j} & x_{2j}^2 & x_{2j}^3 & x_{2j}^4 \\ x_{2j}^2 & x_{2j}^3 & x_{2j}^4 & x_{2j}^5 \\ x_{2j}^3 & x_{2j}^4 & x_{2j}^5 & x_{2j}^6 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} 1 \\ x_{2j} \\ x_{2j}^2 \\ x_{2j}^3 \end{bmatrix} k_{nj}^{(p)}, \quad (5.28)$$

$$p = 1, 2, \dots, r,$$

gdzie a_{2pm} - optymalny wektor parametrów wielomianu (5.27).

Po wstawieniu w modelu (5.22) w miejsce $k^{(p)}$ zależności (5.27) z optymalnymi parametrami wyznaczonymi za pomocą algorytmu (5.28) otrzymamy model funkcji hemodynamicznych układu krążenia płucnego dla konkretnego pacjenta, uwzględniający działanie prazosynu. Jak wspomniano wcześniej, w podobny sposób można uzyskać taki model dla układu krążenia wielkiego.

Z powyższych rozważań wynika schemat postępowania podczas ustalania wpływu prazosynu na funkcje hemodynamiczne układu krążenia płucnego. Jest on następujący:

1. Dla zadanych kilku dawek $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$ zarejestrować: EKG, ciśnienia krwi w lewej i prawej komorze $x_{LVj}(t), x_{RVj}(t)$, strumienie krwi z prawej komory do aorty płucnej i lewego przedsionka do lewej komory $u_{RVj}(t), u_{LAj}(t)$, ciśnienie krwi w wybranych r punktach układu krążenia $y_j^{(1)}(t), \dots, y_j^{(r)}(t)$ i ciśnienie w lewym przedsionku $y_j^{(r+1)}(t)$ w czasie pełnego cyklu pracy serca ($t \in [t_{0j}, t_{0j} + T_j]$, gdzie t_{0j}, T_j odpowiednio początek i czas trwania cyklu ustalony na podstawie sygnału EKG) oraz wyznaczyć funkcję aktywności mięśnia sercowego $x_{1j}(t), j = 1, 2, \dots, m$.

2. Za pomocą algorytmu identyfikacji na 1. stopniu wyznaczyć optymalne wartości przepływności p-tego segmentu układu krążenia

$k_{n1}^{(p)}, k_{n2}^{(p)}, \dots, k_{nm}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, r$, odpowiadające kolejnym dawkom prazosynu $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$ (w algorytmie na 1. stopniu (5.26) w miejsce $x_{LV}(t), x_{RV}(t), u_{RV}(t), u_{LA}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(r+1)}(t)$ wstawiamy pomiary dla j -tej dawki $x_{LVj}(t), x_{RVj}(t), u_{RVj}(t), u_{LAj}(t), y_j^{(1)}(t), \dots, y_j^{(r+1)}(t)$)).

3. Za pomocą algorytmu identyfikacji na 2. stopniu (5.28) wyznaczyć optymalne parametry modelu (5.27).

Postępując według tego schematu otrzymamy model działania prazosynu na przepływność naczyń krwionośnych. Po złożeniu modeli (5.22) i (5.27) z parametrami wyznaczonymi na podstawie pomiarów dla konkretnego pacjenta uzyskamy model funkcji hemodynamicznych jego układu krążenia. Możemy go teraz wykorzystać do wyboru optymalnej dawki leku tak, aby minimalizować średnie ciśnienie krwi w wybranym punkcie (np. w tętnicy szyjnej), i aby średnie ciśnienia krwi w pozostałych punktach nie były mniejsze od zadanych wielkości. Zadanie to można formalnie zapisać w następujący sposób: Dla pacjenta, którego układ krążenia płucnego opisuje układ równań (5.22) (gdzie w miejsce $k^{(p)}$ należy wstawić zależność (5.27)), należy wyznaczyć optymalną dawkę prazosynu x_2^* tak, że

$$x_2^* \rightarrow \min_{x_2} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{y}^{(q)}(t) dt$$

przy ograniczeniach

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{y}^{(p)}(t) dt \geq \alpha_p, p = 1, 2, \dots, r, p \neq q,$$

gdzie q - wybrany punkt w organizmie (np. tętnica szyjna), α_p - zadane dolne ograniczenie na ciśnienie krwi w pozostałych punktach.

Podobnie jak poprzednio, jest to wstępna propozycja zadania wyboru dawki prazosynu. Należy ją uzupełnić pewnymi ograniczeniami wynikającymi z praktyki klinicznej (np. $x_2 \leq M$, gdzie M - maksymalna dawka nietoksyczna).

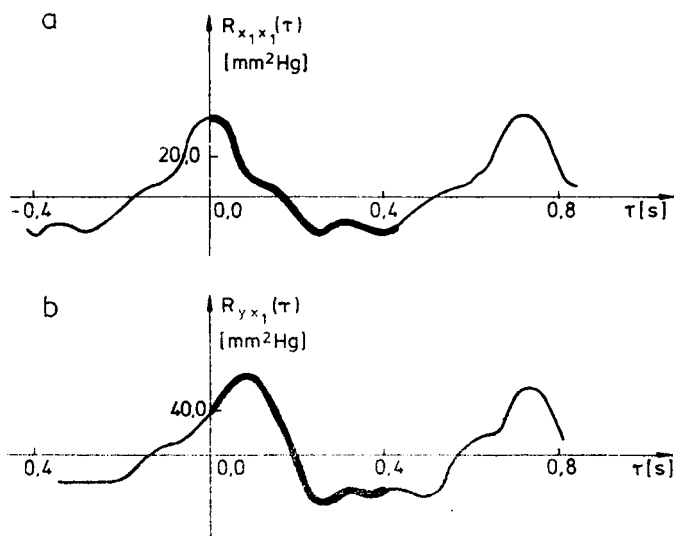
5.3.4. Dwustopniowe zadanie identyfikacji aorty

W celu zbadania własności dynamicznych aorty należy ustalić zależność między ciśnieniami krwi na wejściu do aorty i w jej końcowym odcinku. Oznaczmy odpowiednie ciśnienia przez $x_1(t)$ i $y(t)$. Badania przedstawione w pracy [56] pokazały, że aorta może być przedstawiona jako element oscylacyjny z opóźnieniem. Tak więc do jej opisu można

przyjąć model w postaci

$$K(p, a_1) \triangleq \frac{Y(p)}{X_1(p)} = \frac{a_1^{(1)} e^{-a_1^{(2)} p}}{p^2 + a_1^{(3)} p + a_1^{(4)}}, \quad (5.29)$$

gdzie $K(p, a_1)$ – transmitancja obiektu zależna od wektora parametrów $a_1 = [a_1^{(1)} \ a_1^{(2)} \ a_1^{(3)} \ a_1^{(4)}]^T$, $Y(p)$, $X_1(p)$ transformaty Laplace'a odpowiednio sygnałów $y(t)$ i $x_1(t)$. Interesujące nas zadanie identyfikacji na 1. stopniu polega na wyznaczeniu optymalnych parametrów modelu (5.29). W tym celu zarejestrowano na taśmie magnetycznej ciśnienia krwi w początkowym odcinku aorty i w jej biodrowym odgałęzieniu. Eksperyment przeprowadzono na psach w Akademii Medycznej w Budapeszcie. Sygnały te wykorzystano do wyznaczenia funkcji autokorelacji $R_{x_1 x_1}(\tau)$ ciśnienia w początkowym odcinku aorty i korelacji wzajemnej $R_{y x_1}(\tau)$ między ciśnieniem w początkowym odcinku aorty a ciśnieniem w jej biodrowym odgałęzieniu. Obliczenia te przeprowadzono we współpracy z naszym ośrodkiem w Katedrze Automatyki Politechniki Budapeszteńskiej. Wyznaczone funkcje $R_{x_1 x_1}(\tau)$, $R_{y x_1}(\tau)$ ilustruje wykres na rys. 5.22



Rys. 5.22. Funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej ciśnień krwi w aorcie

Fig. 5.22. Autocorrelation and cross-correlation functions of blood pressure in aorta

oraz ich fragment przedstawia tab. 5.6, gdzie $R_{x_1x_1}[s] \cong R_{x_1x_1}(s \Delta\tau)$, $R_{yx_1}[s] \cong R_{yx_1}(s \Delta\tau)$, $\Delta\tau = 4\text{ms}$. (Wartości zawarte w tab. 5.6 i na rys. 5.22 przedstawiono pogrubioną linią). Dane te wykorzystamy do ilustracji zadania identyfikacji na 1. stopniu. Wiadomo, że w przypadku dyskretnym optymalna charakterystyka czasowa spełnia równanie sumacyjne

Tabela 5.6

s	$R_{x_1x_1}[s]$ mm ² Hg	$R_{yx_1}[s]$ mm ² Hg	s	$R_{x_1x_1}[s]$ mm ² Hg	$R_{yx_1}[s]$ mm ² Hg
0	45.96	40.80	25	-11.83	-39.14
1	45.10	46.27	26	-14.22	-36.72
2	43.70	52.18	27	-15.83	-33.26
3	40.99	57.91	28	-17.89	-30.26
4	37.87	62.95	29	-19.63	-27.29
5	34.08	66.46	30	-21.32	-24.55
6	30.50	69.29	31	-22.13	-22.30
7	27.00	70.00	32	-22.46	-20.40
8	21.62	67.56	33	-22.40	-19.08
9	19.10	63.00	34	-22.09	-18.12
10	15.49	56.54	35	-21.66	-17.66
11	12.71	47.76	36	-21.00	-17.69
12	10.34	38.28	37	-20.21	-17.95
13	8.21	28.01	38	-19.93	-18.22
14	6.50	17.28	39	-19.99	-18.43
15	5.14	6.96	40	-19.63	-18.14
16	3.70	-3.43	41	-19.85	-17.74
17	2.92	-13.13	42	-20.65	-19.51
18	1.45	-21.72	43	-20.77	-16.39
19	0.11	-29.11	44	-21.43	-16.13
20	-1.60	-34.30	45	-22.21	-16.08
21	-3.30	-39.10	46	-22.86	-16.68
22	-5.26	-40.73	47	-23.64	-17.40
23	-7.19	-41.42	48	-29.75	-18.41
24	-9.47	-40.58	49	-23.05	-19.61

$$R_{yx_1}[s] = \sum_{l=1}^{\infty} k_1(a_1) R_{x_1x_1}[s-l], \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (5.30)$$

gdzie $k_1(a_1) \cong k(1 \Delta\tau, a_1)$, $k(t, a_1)$ - odpowiedź impulsowa, tj.

$$k(t, a_1) = \mathcal{L}^{-1}[K(p, a_1)] = \alpha e^{-\beta(t-T_0)} \sin[\omega(t-T_0)],$$

$$\omega \triangleq \sqrt{a_1^{(4)} - 4(a_1^{(3)})^2}, \quad \alpha = \frac{a_1^{(1)}}{\omega}, \quad T_0 = a_1^{(2)}, \quad \beta = \frac{1}{2} a_1^{(3)}.$$

Dla skończonej liczby pomiarów równanie (5.30) przyjmuje postać

$$\bar{R}_{yx_1}[s] = \sum_{l=1}^n k_l(a_1) R_{x_1 x_1}[s-l], \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.31)$$

Wartość $\bar{R}_{yx_1}[s]$ wyznaczona z równania (5.31) różni się od $R_{yx_1}[s]$.

Pojawiają się kłopoty, o których wspomniano w p. 3.4. Z układu równań (5.31), w którym wstawimy $\bar{k}_1$ w miejsce $k_1(a_1)$ i $\bar{R}_{yx_1}[s]$ w miejsce $R_{yx_1}[s]$, możemy wyliczyć wartość odpowiedzi impulsowej $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_1$. Ze względu na skończoną granicę sumowania, wyznaczone z układu równań (5.31) wartości odpowiedzi impulsowej $\bar{k}_1$ różnią się od optymalnej odpowiedzi $k_1(a_1)$ ($l = 1, 2, \dots, n$). W wyniku porównania $\bar{k}_1$ i $k_1(a_1)$ otrzymamy na ogół sprzeczny układ równań ($\bar{k}_1 = k_1(a_1)$, $l = 1, 2, \dots, n$), z którego nie wyznaczymy a_1 . Dlatego też w celu wyznaczenia przybliżonej wartości parametrów optymalnej charakterystyki czasowej wprowadźmy kryterium

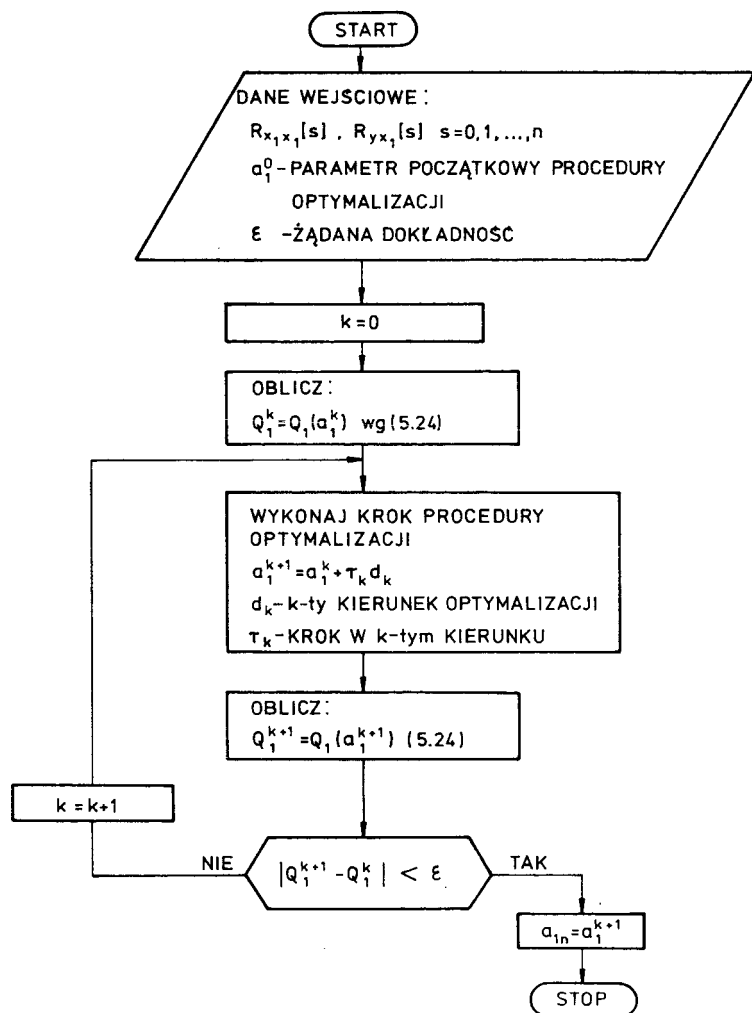
$$Q_1(a_1) = \sum_{s=1}^n \left\{ R_{yx_1}[s] - \sum_{l=1}^n k_l(a_1) R_{x_1 x_1}[s-l] \right\}^2. \quad (5.32)$$

Zadanie identyfikacji na 1. stopniu sprowadza się tu do wyznaczenia a_{1n} minimalizującego (5.32) względem a_1 . Zwróćmy uwagę, że ze względu na nieliniowość względem parametrów postać funkcji $k_1(a_1)$ nie możemy podać algorytmu identyfikacji w postaci analitycznej. Do rozwiązania zadania optymalizacji kryterium (5.32) należy stosować metody numeryczne. Schemat blokowy programu realizującego algorytm identyfikacji na 1. stopniu przedstawiono na rys. 5.23. Opracowano odpowiedni program na mikrokomputer IMP 85 w języku BASIC. Na podstawie danych przedstawionych na rys. 5.22 i w tab. 5.6 za pomocą tego programu wyznaczono optymalne wartości parametrów modelu (5.22), i tak

$$a_{1n}^{(1)} = 782.4, \quad a_{1n}^{(2)} = 8.0, \quad a_{1n}^{(3)} = 1.65, \quad a_{1n}^{(4)} = 652.9.$$

Wyznaczone parametry modelu (5.29) zależą od oporu przepływu i elastyczności aorty. Z fizjologii układu krążenia [5] wiadomo, że w aorcie przeważają włókna sprężyste. Stosunkowo mała ilość mięśni gładkich powoduje, że środki farmakologiczne, które stosowane są do leczenia niewydolności krążenia, w nieznaczny sposób powodują zmianę jej oporności

i elastyczności. Z drugiej strony wiadomo, że częstym schorzeniem naczyń krwionośnych, m.in. aorty są zmiany miażdżycowe, polegające na odkładaniu się na ściankach naczyń cholesterolu i jego związków. Powoduje to zmniejszenie światła naczyń oraz ograniczenie działania włókien sprężystych, a przez to zmianę ich elastyczności i oporności przepływu.



Rys. 5.23. Schemat blokowy algorytmu identyfikacji na 1. stopniu
Fig. 5.23. Block diagram of the first stage identification algorithm

Dla aorty obrazem zmian miażdżycowych mogą być zmiany parametrów $a_1^{(1)}$, $a_1^{(3)}$ i $a_1^{(4)}$ modelu jej własności dynamicznych. Wartości tych parametrów wyznaczone na podstawie uprzednio (na 1. stopniu) opisanych pomiarów dla konkretnego pacjenta mogą posłużyć do celów diagnostycznych. Parametr $a_1^{(2)}$ opisuje czas propagacji ciśnienia w aorcie i jej stwardnienie nie ma istotnego wpływu na ten parametr. Leczenie i profilaktyka w przypadku zmian miażdżycowych polega przede wszystkim na zapewnieniu odpowiedniej diety lub podawaniu środków farmakologicznych gwarantujących wymagany poziom cholesterolu [29]. Poziom ten u różnych osób w różny sposób wpływa na zmiany miażdżycowe. Wpływ ten zależy m. in. od wieku, otyłości, palenia tytoniu. W celu podjęcia działań profilaktycznych należy zbadać wpływ poziomu cholesterolu we krwi na opór przepływu i elastyczność aorty dla osób w pewnych populacjach (np. dla nałogowych palaczy). Prowadzi to do ustalenia zależności między poziomem cholesterolu a parametrami $a_1^{(1)}$, $a_1^{(3)}$ i $a_1^{(4)}$ dla osób w pewnych populacjach. Jest to zadanie identyfikacji na 2. stopniu, gdzie wejściem x_2 jest poziom cholesterolu we krwi, a wyjściem wartości parametrów $a_1^{(1)}$, $a_1^{(3)}$, $a_1^{(4)}$. Na podstawie analogii hydromechanicznych możemy zauważyć, że zwiększenie oporności i zmniejszenie elastyczności aorty, które towarzyszy zmianom miażdżycowym, powoduje wzrost wartości parametru $a_1^{(1)}$ i zmniejszenie wartości $a_1^{(3)}$, $a_1^{(4)}$. Niskie stężenie cholesterolu powoduje niewielkie zmiany, a przekroczenie pewnej wartości - narastanie zmian miażdżycowych, aż do osiągnięcia pewnego nasycenia. Wynika stąd, że zależności między parametrami $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ i $a_1^{(4)}$ a stężeniem cholesterolu mają charakter nieliniowy. W interesującym nas zakresie zmian x_2 (tj. pomiędzy minimalnym i maksymalnym możliwym poziomem cholesterolu) zależności te można przybliżyć wielomianami 3. stopnia, czyli na 2. stopniu przyjmujemy model

$$\bar{a}_1^{(p)} = a_{2p}^{(0)} + a_{2p}^{(1)}x_2 + a_{2p}^{(2)}x_2^2 + a_{2p}^{(3)}x_2^3, \quad (5.33)$$

gdzie $\bar{a}_1^{(p)}$ - wyjście modelu, $a_{2p} = [a_{2p}^{(0)} \ a_{2p}^{(1)} \ a_{2p}^{(2)} \ a_{2p}^{(3)}]^T$ - wektor parametrów.

Zadanie identyfikacji na 2. stopniu sprowadza się do wyznaczenia optymalnych parametrów wielomianów (5.33). W celu ich wyznaczenia należy dla osób o różnym stężeniu cholesterolu we krwi x_{21} , x_{22} , ..., x_{2m} wyznaczyć, na podstawie zadania identyfikacji na 1. stopniu, odpowiednie dla tych stężeń wartości parametrów $a_{1nj}^{(1)}$, $a_{1nj}^{(3)}$, $a_{1nj}^{(4)}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Dla kwadratowego kryterium jakości identyfikacji jak w p. 5.3.3, algorytm identyfikacji na 2. stopniu ma postać (5.28), gdzie w miejsce $k_{nj}^{(p)}$ należy wstawić $a_{1nj}^{(p)}$, $p = 1, 3, 4$, a wektor a_{2pm} jest optymalnym wektorem parametrów wielomianu (5.33).

Na podstawie przedstawionych rozważań możemy zaproponować następujący program badań w celu ustalenia wpływu poziomu cholesterolu na zmiany miażdżycowe w aorcie.

1. Dla osób z danej populacji, dla których poziom stężenia cholesterolu we krwi wynosi $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}$, zarejestrować ciśnienia krwi na wejściu do aorty i w jej końcowym odcinku.

2. Na podstawie tych sygnałów dla j -tego stężenia wyznaczyć odpowiednie funkcje korelacji $R_{yx_{1j}}[s]$ i $R_{x_1x_{1j}}[s]$, $j = 1, 2, \dots, m$.

3. Wyznaczyć optymalne wartości parametrów $a_{1nj}^{(1)}, a_{1nj}^{(2)}, a_{1nj}^{(3)}$ odpowiadające j -temu stężeniu cholesterolu. Należy skorzystać z algorytmu identyfikacji na 1. stopniu i wstawić w miejsce $R_{yx_1}[s]$ i $R_{x_1x_1}[s]$ odpowiednio $R_{yx_{1j}}[s]$ i $R_{x_1x_{1j}}[s]$.

4. Za pomocą algorytmu na 2. stopniu wyznaczyć optymalne parametry wielomianów (5.33).

W wyniku otrzymamy model opisujący wpływ cholesterolu na zmiany miażdżycowe aorty, a konkretnie uzyskamy zależność między parametrami modelu dynamiki aorty a poziomem cholesterolu we krwi dla wybranej populacji. Na podstawie tych zależności można określić dla tej populacji, w jakim zakresie może się zmieniać poziom cholesterolu we krwi, aby nie dopuścić do zmian miażdżycowych, co sprowadza się do określenia takiego zbioru zmienności x_2 , dla których parametry $a_1^{(1)}, a_1^{(3)}$ i $a_1^{(4)}$ zmieniają się w dopuszczalnym przedziale, tj. należy wyznaczyć zbiór

$$X_2 \triangleq \left\{ x_2; a_{1\min}^{(p)} \leq a_{2pm}^{(0)} + a_{2pm}^{(1)} x_2 + a_{2pm}^{(2)} x_2^2 + a_{2pm}^{(3)} x_2^3 \leq a_{1\max}^{(p)}, p = 1, 3, 4 \right\},$$

gdzie $a_{1\min}^{(p)}$ i $a_{1\max}^{(p)}$ dopuszczalne zmiany parametrów $a_1^{(p)}$, $p = 1, 3, 4$. Dla pewnych populacji nie wszystkie ograniczenia muszą być aktywne.

Tak określony zbiór X_2 pozwala zaproponować odpowiedni dobór diety lub środków farmakologicznych, które zapewnią żądany poziom cholesterolu we krwi.

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono usystematyzowany przegląd problematyki identyfikacji dwustopniowej oraz jej zastosowań w wybranych przykładach technicznych i biomedycznych. W części podstawowej przedstawiono metodykę tworzenia algorytmów identyfikacji, konkretną analityczną postać algorytmów w prostych przypadkach oraz wyniki rozważań i twierdzenia dotyczące porównania podejścia dwustopniowego i bezpośredniego. Rezul-

taty te dotyczą zarówno zadania estymacji dwustopniowej, jak i zadania dwustopniowego wyboru najlepszego modelu. W rozdziałach 4 i 5 przedstawiono w charakterze przykładów ilustrujących wyniki dotyczące zastosowań identyfikacji dwustopniowej w wybranych przypadkach technicznych i biomedycznych. Jak się wydaje, przykłady te (z konieczności nieco uproszczone) mogą stanowić pewną ilustrację celowości i możliwości takich zastosowań, a także szeroki wachlarz występujących tu problemów metodologicznych. Warto zauważyć, że uwzględnienie specyfiki konkretnego zadania praktycznego wymagało w niektórych przypadkach pewnej modyfikacji i uzupełnienia schematu podstawowego przedstawionego w części ogólnej (rozdz. 2 i 3). Tak np. dla kolumny destylacyjnej wprowadzono wstępny (pomocniczy) stopień identyfikacji, w przypadkach dynamicznych występują modele nie uwzględnione w części podstawowej, w niektórych przypadkach wprowadzono specyficzne formy kryterium jakości identyfikacji: postać logarytmiczną dla kolumny destylacyjnej, specyficzną postać związaną z równaniem różniczkowym dla układu krążenia.

Jak już wspomniano w rozdz. 1, przedstawione opracowanie może stanowić podstawę dalszych prac rozwijających teorię i zastosowanie identyfikacji dwustopniowej. Jako proponowane kierunki dalszych prac podstawowych można wymienić:

1. Opracowanie metodyki planowania eksperymentu dwustopniowego w sytuacji, gdy możliwy jest eksperyment aktywny. Warto zauważyć, że charakter taki ma zazwyczaj eksperyment na drugim stopniu, tzn. x_2 jest wyznaczane i wprowadzane przez eksperymentatora.

2. Dalsze opracowanie identyfikacji dwustopniowej dla systemów dynamicznych, uwzględniające inne, nie rozpatrywane tu przypadki, a także obiekty o parametrach rozłożonych opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

3. Zastosowanie identyfikacji dwustopniowej w systemach sterowania (naszkicowane wstępnie w p. 1.4), a konkretnie podanie metod i algorytmów w bieżącej identyfikacji dwustopniowej, wykorzystywanej w systemie adaptacyjnym. Jest to problematyka szczególnie aktualna, związana z obserwowaną obecnie nową fazą rozwoju adaptacyjnych systemów sterowania. Interesujące wydaje się również rozwinięcie problemu powiązania stopni identyfikacji z poziomami sterowania.

4. Porównanie identyfikacji dwustopniowej z innymi koncepcjami identyfikacji systemów złożonych, na przykład ze zbliżoną, choć istotnie różną koncepcją identyfikacji dwupoziomowej. Jak się wydaje, powinno to prowadzić do pewnego uogólnienia problematyki identyfikacji systemów złożonych, w którym takie koncepcje, jak identyfikacja globalna, wielostopniowa, wielopoziomowa, identyfikacja z ograniczoną możliwością obserwacji, dekompozycja strukturalna i in. powinny stanowić przypadki szczególne.

5. Rozszerzenie metod i algorytmów identyfikacji dwustopniowej na potrzeby modelowania i identyfikacji kompleksów operacji. Ważność tego zagadnienia wiąże się z analizą, projektowaniem i sterowaniem tzw. dyskretnych procesów produkcyjnych, a problemy identyfikacji takich systemów są słabo opracowane. Dotyczy to np. identyfikacji procesów montażowych.

6. Opracowanie zagadnień komputerowej identyfikacji dwustopniowej (naszkicowanych wstępnie w p. 1.5), a zwłaszcza organizacji bazy danych, wyboru struktury systemu, podziału zadań, sieciowego systemu operacyjnego podczas identyfikacji na bieżąco itd.

Ten ostatni zakres tematyczny należy uznać za szczególnie ważny, bowiem systemy identyfikacji zarówno w warunkach przemysłowych, jak i laboratoryjnych, są w istocie specyficznymi, problemowo zorientowanymi systemami informatycznymi, w których źródła danych, czyli obiekty obserwacji, są częściami składowymi systemu. Z tego punktu widzenia zagadnienia identyfikacji stanowią specyficzną problematykę systemów informatycznych.

LITERATURA

- [1] ARAFEH S.A., SAGE A.P., Multilevel discrete time systems identification for large scale systems, Int. J. on Systems Science, vol. 5, 1974, pp. 753-783.
- [2] ARAFEH S.A., SAGE A.P., Hierarchical system identification of states and parameters in interconnected power systems, Int. J. on Systems Science, vol. 5, 1974, pp. 817-864.
- [3] BEKEY G.A., BENEKEN J.E., Identification of biological systems: a survey, Automatica, vol. 14, 1978, pp. 41-47.
- [4] BENEKEN J.E.W., de WITT B., Physical Basics of Circulatory Transport: Regulation and Exchange, W.B. Sanders Pub. Co., Philadelphia 1967.
- [5] BEST C.H., TAYLOR V.B., Fizjologiczne podstawy postępowania lekarskiego, PZWL, Warszawa 1971.
- [6] BORZEMSKI L., GRZECH A., KASPRZAK A., KOSZAŁKA L., Development of distributed applications for experiment and education support based on the NETEX local area network, Proc. of International Symposium COMNET'85 Services Conveyed by Computer Networks, John von Neuman Soc. Comput. Sc., Budapest 1985, pp. 4.38-4.47.
- [7] BORZEMSKI L., JÓZEFczyk J., ŚWIĄTEK J., Wykorzystanie mikrokomputerów do analizy układów sterowania w pracach badawczych, projektowych oraz w dydaktyce, Materiały ogólnopolskiej konferencji naukowo-

- technicznej "Mikrokomputery w automatyce i technice systemów", t. 2, Wrocław 1984, s. 204-211.
- [8] BORZEMSKI L., KOSZAŁKA L., KURZYŃSKI M., LEBIEDIEWA S., Funkcje i zastosowania komputerowego systemu eksperymentowania z rozproszoną bazą danych, Raport ISiTS serii SPR 62/83, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1983.
 - [9] BORZEMSKI L., LEBIEDIEWA S., Data base organization in the multi-stage experiment, Proc. of IFAC Workshop on Scientific Experiments and Laboratory Procedures Automation (SELPA) Smolenice, Czechosłowacja, 1980, pp. 79-100.
 - [10] BUBNICKI Z., Identification of Control Plants, PWN-Elsevier, Warszawa-Amsterdam-Oxford-New York 1980.
 - [11] BUBNICKI Z., Global and local identification of complex systems with cascade structure, Systems Science, vol. 1, no 1, 1975, pp. 55-65.
 - [12] BUBNICKI Z., On the multistage identification, Systems Science, vol. 3, no 2, 1977, pp. 207-210.
 - [13] BUBNICKI Z., Optymalizacja kompleksów operacji w sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi, Prace VII krajowej konferencji automatyki, t. 3. Referaty plenarne i przeglądowe, Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 1979, s. 37-49.
 - [14] BUBNICKI Z., Optimization problems in large-scale systems modeling and identification, In. A. Straszak Ed. Large Scale Systems: Theory and Applications 1983, Pergamon Press, Oxford 1984, pp. 411-416.
 - [15] BUBNICKI Z., Optimal models of complex operation systems, 6^e Congres International de Cybernetique et de Systemique, College de Systemique de l'AFCEt, Paris 1984, pp. 871-876.
 - [16] BUBNICKI Z., Problemy zastosowań mikrokomputerów w automatyce i technice systemów. Materiały ogólnopolskiej konferencji naukowo-technicznej "Mikrokomputery w automatyce i technice systemów", t. 3, Wrocław 1984, s. 1-13.
 - [17] BUBNICKI Z., Computer networks for system identification and pattern recognition, Proc. of 4th International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Politechnic, Coventry 1985, pp. 136-143.
 - [18] BUBNICKI Z., Global modelling and identification of complex systems, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp. York, UK, 1985, Identification and System Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt 1985, pp. 261-263.
 - [19] BUBNICKI Z., Dwupoziomowa optymalizacja probabilistyczna kompleksów operacji sterowanych lokalnie, Prace VIII krajowej konferencji

- automatyki "Automatyka w służbie gospodarki narodowej", t. 1, NOT, Szczecin 1980, s. 493-498.
- [20] BUBNICKI Z., KOSZAŁKA L., Wstępna koncepcja sterowania eksperymentem, Raport ICT serii SPR 68/74, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1974.
 - [21] BUBNICKI Z., KURZYŃSKI M., PUCHAŁA E., ŚWIĄTEK J., WILIMOWSKI M., ŻOŁNIEREK A., Pakiet procedur statystycznych systemu BAMED. Cz. I - dokumentacja projektowa, Cz. II - dokumentacja eksploatacyjna, Raporty ICT serii SPR 3,4/81, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1982.
 - [22] BUBNICKI Z., ŚWIĄTEK J., On the Bayesian estimation of a complex dynamic system, Systems Science, vol. 6, no 4, 1980, pp. 305-315.
 - [23] BUBNICKI Z., ŚWIĄTEK J., Separability and estimation problem in the identification of complex system, Proc. of 5th Polish-Italian Symposium: Application of Systems Theory to Economics, Management and Technology, Toruń 1980, PWN, Warszawa-Lódź 1980, pp. 128-137.
 - [24] BUBNICKI Z., ŚWIĄTEK J., On the parameter estimation in the identification of complex static system, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, vol. 29, no 1-2, 1981, pp. 35-44.
 - [25] BUBNICKI Z., ŚWIĄTEK J., Separowalność i estymacja parametrów w identyfikacji złożonych systemów statycznych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. 26, z. 3, 1981, s. 349-363.
 - [26] BUBNICKI Z., ŚWIĄTEK J., Optimization problems in the parameter estimation for complex input-output systems, Proc. of X Internationaler Kongress Über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Berichte 4, Weimar 1984, pp. 29-32.
 - [27] CRAMER H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton, New York, 1946.
 - [28] CZECHOWICZ K., MALAVE N., A complex of operations approach to the optimal control of the set of plants, Systems Science, vol. 5, no 4, 1979, pp. 417-423.
 - [29] DANYSZ A., Farmakologia, PZWL, Warszawa 1978.
 - [30] DONDERS J.J.H., ZUIDERVAART J.C., ROBIJN J.P., BENEKEN J.E.W., Estimation of heart function parameters by hybrid optimization techniques. Proc. 3rd IFAC Symp. Identification and System Parameter Estimation, North-Holland/Elsevier, Amsterdam 1973.
 - [31] EYKHOFF P., System Identification, Parameter and State Estimation, Wiley, New York-London-Sydney 1974.
 - [32] EYKHOFF P., Trends and Progress in System Identification, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt 1981.

- [33] EYKHOFF P., Biomedical identification: overview, problems and prospects, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, 1985. Identification and System Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt 1985, pp. 37-44.
- [34] EYLES J.G., PIMEL R.L., FULLTON J.M., BROMBERG P.A., Parameter estimates in a five - element respiratory mechanical model, IEEE Trans. on Biomedical Engineering, vol. BME-29, no 6, 1983, pp. 460-463.
- [35] EYLES J.G., PIMEL R.L., FULLTON J.M., BROMBERG P.A., Estimating parameters in respiratory mechanical models, Proc. of 36th ACEMB, Columbus, Ohio 1983, pp. 208.
- [36] FILIP S., Intensyfikacja wymiany masy w układach gaz-ciecz przez nakładanie pulsacji na fazę gazową (praca doktorska), Bibl. Główna PWR, Wrocław 1966.
- [37] FINDEISEN W., SZYMANOWSKI J., WIERZBICKI A., Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1977.
- [38] FISHER J., WILFERT H.-H., Determination of the statistical errors in the estimation of the power spectrum by means of univariate time series analysis, Preprints, 5th IFAC Symp. on Identification, vol. 2, Darmstadt 1979, pp. 1235-1240.
- [39] FISCHER J., WILFERT H.-H., A decomposition algorithm for a robust estimation of multivariable ARMA - models, Preprints, 6th IFAC Symp. on Identification, Washington 1982.
- [40] FISZ M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1969.
- [41] FRESEWINKEL T., UNBEHAUEN H., On the identification of subsystems of decomposed large scale systems, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, 1985, Identification and System Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt 1985, pp. 267-272.
- [42] HASIEWICZ Z., SPANKIEWICZ A., On applicability of interconnection balance method to global identification of interconnected steady-state systems, Trans. Automatic Control, vol. AC-31, no 1, 1986, pp. 77-80.
- [43] JARACZ K., Zakłócenia stochastyczne i ich wpływ na wielkość regulowaną w układach napędowych prądu stałego, Zesz. Nauk. AGH, t. 667, z. 100, Kraków 1978.
- [44] KASPRZAK W. i in., System komputerowy SMA-ODRA 1325 w laboratorium badawczym, Wydawnictwo PWR, Wrocław 1984.
- [45] KOSZAŁKA L. i in., Komputerowy system eksperymentowania EKSPES-L. Opis systemu i opisy programów cz. I i cz. II, Raporty ISITS seria SPR 9.10/82, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1982.

- [46] KURZYŃSKI M., Wielostopniowa identyfikacja obiektów statycznych w warunkach probabilistycznych. Prace naukowe Inst. Cybern. Tech. PWr nr 46, PWr, Wrocław 1975, s. 47-58.
- [47] KURZYŃSKI M., ŚWIĄTEK J., BORZEMSKI L., Przykłady w zakresie identyfikacji eksperymentowania i rozpoznawania oraz ich programowa realizacja z wykorzystaniem pilotowej LSK, Raport ISiTS serii SPR 27/85, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1985.
- [48] MAŃCZAK K., Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania, WNT, Warszawa 1979.
- [49] MICHAELSON E.D., GRASSMAN E.D., PETERS W.R., Pulmonary mechanics by spectral analysis of forced random noise, The Journal of Clinical Investigation, vol. 56, 1975, pp. 1210-1230.
- [50] RAO C.R., Linear Statistical Inference and its Applications, Wiley, New York-London-Sydney-Toronto 1965.
- [51] RAO G.P., Decomposition, decentralization and coordination of identification algorithms for large scale systems, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, 1985, Identification and System Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt 1985, pp. 279-302.
- [52] SAGE A.P., MELSA J.L., Estimation Theory with Application to Communication and Control, McGraw-Hill, New York 1972.
- [53] SAGE A.P., Hierarchical estimation and identification method for large scale systems, in Singh M., Tittli A., Ed., Handbook of Large Scale Systems, Engineering Applications, North-Holland Pub. Co., Amsterdam 1979.
- [54] SHAW R., Linear Algebra and Group Representations, Academic Press, New York 1983.
- [55] SZUCS B., MONOS E., Circulatory system analysis by a stochastic method using an analogue correlator, Int. Bio-Medical Computing, vol. 4, 1970, pp. 87-102.
- [56] SZUCS B., MONOS E., SZUTRELY J., Comparison of identification methods in the cardiovascular system, Proc. of 3rd IFAC Symp. Identification and System Parameter Estimation, North-Holland Pub. Co./Elsevier, Amsterdam-London/New York, 1973.
- [57] ŚWIĄTEK J., Model matematyczny i identyfikacja procesów hemodynamicznych w układzie krążenia (rozprawa doktorska), Raport ICT serii PRE 84/79, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1979.
- [58] ŚWIĄTEK J., Some problems of mathematical models and identification of cardiovascular system, Systems Science, vol. 5, no 1, 1979, pp. 291-298.
- [59] ŚWIĄTEK J., The Bayes approach to the parameter estimation in complex systems, Foundations of Control Engineering, vol. 5, no 1,

1980, pp. 45-52.

- [60] ŚWIĄTEK J., Mathematical model and identification of haemodynamical process in cardiovascular system., Proc. of International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry 1980, pp. 216-228.
- [61] ŚWIĄTEK J., Optimalnaja zadača ocenki parametrov v identifikacii složnych sistem, Materjaly VII Polsko-Bulgarskogo Simpozjuma: Optimalizacija i Upravljenje v Kibernetičeskich Sistemach, Prace IBS, PAN, Warszawa 1980, s. 58-65.
- [62] ŚWIĄTEK J., Parameter identification of complex systems with limited measurement possibilities, Proc. of International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry 1980, pp. 249-255.
- [63] ŚWIĄTEK J., Two stage parameter estimation in linear systems by maximum likelihood method, Proc. of 2nd International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry 1982, pp. 15-24.
- [64] ŚWIĄTEK J., Identification and sensitivity analysis for pulmonary circuit in the cardiovascular system, in Ricciardi L., Scott A., Ed., Biomathematics in 1980, North-Holland Pub. Co., Amsterdam-New York-Oxford 1982, pp. 265-279.
- [65] ŚWIĄTEK J., Identification of haemodynamical process in cardiovascular system, in Tarpl B., Ricciardi L., Pask G. Ed., Progress in Cybernetics and Systems Research, Cybernetics in Biology and Medicine, vol. 9, Hemisphere Pub. Co. McGraw-Hill, Washington-New York-London 1982, pp. 87-96.
- [66] ŚWIĄTEK J., Maximum likelihood approach to the two-stage estimation in the identification of static systems, Systems Science, vol. 8, no 1, 1982, pp. 39-44.
- [67] ŚWIĄTEK J., Nekotoraja problema mnogourovnevnych modelej i mnogošagovoj identifikacii, Sbornik Lekci i Soobščeniya, VIII Nacionalna Škola za Mlodi Naučni Robotnici "Priloženie na Matematikata v Technikata, Varna '82, Sofija 1983, s. 137-145.
- [68] ŚWIĄTEK J., On two-stage parameter estimation in static system, IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics, vol. SMC-13, no 1, 1983, pp. 77-81.
- [69] ŚWIĄTEK J., Multistage models and identification. Tagung Modellierung und Optimierung von Systemen, Lichte 1983, Wissenschaftliche Berichte der Technischen Hochschule Leipzig 1984, pp. 27-31.
- [70] ŚWIĄTEK J., Application of the multistage identification to modelling of absorption process, Proc. of 3rd International Conference

on Systems Engineering, Wright State University, Dayton 1984.

- [71] ŚWIĄTEK J., Analiza modelu układu krążenia dla potrzeb rozpoznawania wad serca, Mat. konf., "Przetwarzanie sygnałów w telekomunikacji, sterowaniu i kontroli", Instytut Telekomunikacji i Elektrotechniki ATR, Ministerstwo Łączności, Bydgoszcz 1984, s. 147-150.
- [72] ŚWIĄTEK J., Application of the two-stage identification to the modelling of packed distillation column with pulsator, Preprint in Proc. 4th International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry 1985, pp. 251-258, przedruk w Systems Science, vol. 11, no 3-4.
- [73] ŚWIĄTEK J., Application of two-level pattern recognition system to the hormonal investigation, Proc. of the Colloquium on Application of Computational and Cybernetics Methods in Medicine and Biology, Szeged 1985.
- [74] ŚWIĄTEK J., REYNOLDS D., Two-stage approach to the modelling of the influence of drugs on the respiratory system, Proc. of 3rd International Conference on Systems Engineering, Wright State University, Dayton 1984, pp. 209-212.
- [75] ŚWIĄTEK J., On two-stage optimal models and identification, Systems Science, vol. 11, no 3-4 (w druku).
- [76] TUCKER E.C., SANDERS C.W., Decentralized structures for state estimation in large scale systems, Large Scale Systems, vol. 1, 1980, pp. 39-49.
- [77] WILFERT H.-H., BRETHAUER G., Identification aspects in large scale systems, Proc. of IFAC/IFORS Symposium Large Scale Systems: Theory and Applications, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1983.
- [78] WILFERT H.-H., BRETHAUER G., Some problems and approaches of identification in large scale systems, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, 1985, Identification and System Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt 1985, pp. 309-314.

Praca wpłynęła do Redakcji 1986.08.29

TWO-STAGE IDENTIFICATION AND ITS TECHNICAL AND BIOMEDICAL APPLICATIONS

The review of the two-stage identification problems is presented. The problems of two-stage estimation and two-stage choice of the best model are formulated. General procedures for obtaining the two-stage and direct estimation algorithms by maximum likelihood and minimum risk methods have been developed and for typical cases estimation algorithms have been given. The procedures of determining

the optimal parameters for the two-stage choice of the best model and for a direct one are given for the case of full probabilistic knowledge as the basis for obtaining the respective algorithms in an empirical case. The algorithms for linear-quadratic case are given. The comparison of two-stage identification with the direct one was discussed, a special attention being given to sufficient conditions of the equivalence of both approaches. These conditions are valid both for the two-stage estimation and two-stage choice of the best model. Some selected cases of two-stage identification of dynamical system are presented. General considerations were completed with remarks concerning the possible extension of two-stage identification on the multi-stage one as well as the application of control systems and computer realization in the respective information systems. The results of application of the two-stage identification to some technical and biomedical problems are presented as illustrating examples. These examples show the advisability and possibility of such applications and reveal a wide spectrum of the existing methodological problems.

Translated by Ruta Czaplińska

ДВУХСТЕПЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ЕЁ ТЕХНИЧЕСКОЕ И БИОМЕДИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Представлен систематизированный обзор проблематики двухступенной идентификации. Сформулирована задача двухступенной оценки и двухступенного выбора наилучшей модели. Разработаны общие процедуры получения алгоритмов двухступенной и непосредственной оценки с применением метода максимального достоверия и метода минимального риска. Представлены конкретные алгоритмы оценки для типичных случаев. Описана общая процедура назначения оптимальных параметров для двухступенной задачи и непосредственного выбора наилучшей модели при полной пробабилистической информации, как основа получения подходящих алгоритмов в эмпирической ситуации. Даны конкретные алгоритмы для линейно-квадратного случая. Обсуждена проблема сравнения непосредственной и двухступенной идентификации, а точнее охарактеризовано некоторые условия равновесия обоих подходов. Они касаются так задачи двухступенной оценки, как и двухступенного выбора наилучшей модели. Представлены избранные случаи двухступенной идентификации динамической системы. Общие рассуждения касающиеся возможности расширения на задачу многостепенной идентификации, применения для систем управления, а также компьютерной реализации алгорит-

мов идентификации в подходящей информационной системе. Представлены результаты применений двухступенной идентификации в избранных технических и биомедицинских случаях. Эти примеры указывают на целенаправленность и возможность таких применений, а также на многие выступающие здесь методологические проблемы.

Перевела М. Наганьска-Пиляк

SPIS RZECZY

Wykaz podstawowych oznaczeń	4
1. Wprowadzenie w problematykę identyfikacji dwustopniowej	5
1.1. Wstęp	5
1.2. Identyfikacja pojedynczego elementu	9
1.3. Koncepcja identyfikacji dwustopniowej. Problemy pracy ...	14
1.4. Identyfikacja dwustopniowa na potrzeby sterowania automatycznego	19
1.5. Realizacja komputerowa - system informatyczny	22
2. Estymacja dwustopniowa parametrów	26
2.1. Opisy matematyczne i sformułowanie problemu dla przypadku statycznego	26
2.2. Zastosowanie metody maksymalnej wiarygodności	30
2.2.1. Ogólna metodyka postępowania	30
2.2.2. Typowe przypadki - przykłady	31
2.2.3. Porównanie estymacji dwustopniowej i bezpośredniej .	36
2.3. Zastosowanie metody maksymalnego prawdopodobieństwa	37
2.3.1. Ogólna metodyka postępowania	37
2.3.2. Rezultaty w typowym przypadku	39
2.3.3. Porównanie estymacji dwustopniowej i bezpośredniej .	41
2.4. Estymacja systemu dynamicznego	42
2.4.1. Ogólna metodyka postępowania	42
2.4.2. Typowe przypadki - przykłady	45
2.5. Możliwość uogólnienia dla zadania estymacji wielostopnio- wej	48
3. Dwustopniowy wybór optymalnego modelu	50
3.1. Sformułowanie problemów dwustopniowego wyboru optymalnego modelu i ogólne procedury ich rozwiązywania	51
3.2. Przypadek liniowo-kwadratowy	55
3.3. Porównanie podejścia dwustopniowego i bezpośredniego	61
3.4. Wyniki eksperymentów obliczeniowych	65
3.5. Przypadek systemu dynamicznego	70
3.6. Uwagi o identyfikacji wielostopniowej	74

4. Przykłady technicznych zastosowań identyfikacji dwustopniowej.	76
4.1. Identyfikacja dwustopniowa kolumny destylacyjnej z wypełnieniem oraz przepływem pulsacyjnym	76
4.1.1. Opis problemu	76
4.1.2. Opis danych pomiarowych	77
4.1.3. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń	81
4.2. Uwzględnienie wpływu amplitudy pulsacji na objętościowy współczynnik przenikania masy - uogólnienie dla przypadku identyfikacji trójstopniowej	85
4.3. Zastosowanie identyfikacji dwustopniowej do wyznaczania wpływu parametrów wypełnienia kolumny na objętościowy współczynnik przenikania masy	88
4.3.1. Opis problemu	88
4.3.2. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń	89
4.4. Zastosowanie podejścia dwustopniowego do modelowania i identyfikacji charakterystyk statycznych obcowzbudnego silnika prądu stałego	92
4.4.1. Opis problemu	92
4.4.2. Modelowanie dwustopniowe i symulacja obcowzbudnego silnika prądu stałego	94
4.4.3. Identyfikacja dwustopniowa charakterystyk statycznych obcowzbudnego silnika prądu stałego	101
4.5. Identyfikacja dwustopniowa własności dynamicznych obcowzbudnego silnika prądu stałego	104
4.5.1. Opis problemu	104
4.5.2. Algorytmy identyfikacji i wyniki obliczeń	106
5. Przykłady biomedycznych zastosowań identyfikacji dwustopniowej	109
5.1. Ogólna problematyka identyfikacji obiektów biomedycznych.	109
5.2. Identyfikacja dwustopniowa funkcji mechanicznych układu oddechowego	114
5.2.1. Opis problemu	114
5.2.2. Dwustopniowe zadanie identyfikacji	117
5.2.3. Algorytmy identyfikacji i rezultaty obliczeń	120
5.3. Identyfikacja dwustopniowa układu krążenia	126
5.3.1. Ogólne problemy identyfikacji układu krążenia	126
5.3.2. Dwustopniowe zadanie identyfikacji komory serca	127
5.3.3. Dwustopniowe zadanie identyfikacji funkcji hemodynamicznych układu krążenia płucnego	135
5.3.4. Dwustopniowe zadanie identyfikacji aorty	144
6. Uwagi końcowe	150
Literatura	152

CONTENTS

	page
Specification of important symbols denotations	4
1. Introduction in to the problem of two-stage identification ...	5
1.1. Preliminary remarks	5
1.2. Identification of a single element	9
1.3. General idea of the two-stage identification. Basic problems	14
1.4. Two-stage identification for automatic control	19
1.5. Computer realization - information system	22
2. Two-stage parameter estimation	26
2.1. Mathematical descriptions and formulation of the problem for a static case	26
2.2. Application of the maximum likelihood method	30
2.2.1. General methods	30
2.2.2. Typical cases - examples	31
2.2.3. Comparison of the two-stage estimation with the direct one	36
2.3. Application of the maximum a posteriori probability method	37
2.3.1. General methods	37
2.3.2. Results for a typical case	39
2.3.3. Comparison of the two-stage and direct estimations .	41
2.4. Estimation for dynamical systems	42
2.4.1. General methods	42
2.4.2. Typical cases - examples	45
2.5. Possibility of extension on multistage estimation	48
3. Two-stage choice of the best model	50
3.1. Formulation of the problems of two-stage choice of the best model and general procedures of their solutions	51
3.2. Linear-quadratic case	55
3.3. Comparison of the two-stage and direct approaches	61
3.4. Results of numerical experiments	65
3.5. Dynamic system case	70
3.6. Remarks concerning the multistage identification	74

4. Examples of applications of the two-stage identification to technical problems	76
4.1. Two-stage identification of packed distillation column with a pulsator	76
4.1.1. Description of the problem	76
4.1.2. Description of the experimental data	77
4.1.3. Identification algorithms and the results of calculation	81
4.2. The influence of pulsation amplitude on volume mass exchange coefficient - extension on the three-stage identification	85
4.3. Application of the two-stage identification in determining the influence of column packing parameters on volume mass exchange coefficient	88
4.3.1. Description of the problem	88
4.3.2. Identification algorithms and the results of calculation	89
4.4. Application of two-stage approach to the modelling and identification of static characteristics of d.c. separately excited motor	92
4.4.1. Description of the problem	92
4.4.2. Two-stage modelling and simulation of a d.c. separately excited motor	94
4.4.3. Two-stage identification of static characteristics of a separately excited d.c. motor	101
4.5. Two-stage identification of dynamic properties of a separately excited d.c. motor	104
4.5.1. Description of the problem	104
4.5.2. Identification algorithms and the results of calculation	106
5. Examples of applications of the two-stage identification to biomedical problems	109
5.1. General problems of identification of biomedical plants	109
5.2. Two-stage identification of mechanical functions of the respiratory system	114
5.2.1. Description of the problem	114
5.2.2. Two-stage identification problem	117
5.2.3. Identification algorithms and the results of calculation	120
5.3. Two-stage identification of the cardiovascular system ...	126

5.3.1. General problems of identification of the cardio-vascular system	126
5.3.2. Two-stage identification of a heart ventricle	127
5.3.3. Two-stage identification of hemodynamical functions of the pulmonary circuit	135
5.3.4. Two-stage identification of the aorta	144
6. Final remarks	150
References	152

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU STEROWANIA I TECHNIKI SYSTEMÓW

- | | |
|---|-------|
| Nr 1, Monografie nr 1, T. Batycki, A. Kasprzak, <i>Wybrane algorytmy optymalizacji przepływów w sieciach teleinformatycznych</i> , Wrocław 1983 | 93,— |
| Nr 2, Konferencje nr 1, <i>Systems Science VIII</i> , Wrocław 1983 | 92,— |
| Nr 3, Konferencje nr 2, <i>Systems Science IX</i> , Wrocław 1986 | 120,— |

Cena zł 180,—

Subscription rates and orders should be adressed to:

"ARS POLONA"

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

or OR PAN, 00-901 Warszawa, PKiN, POLAND

Bank account number: NBP, VIII OM Nr 1550-6-81574 Warszawa/Poland

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej

ma stale na składzie Księgarnia Wr 49

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

oraz Wojewódzka Księgarnia Techniczna

ul. Świdnicka 8, 50-067 Wrocław

ISSN 0209-2573