

Na prawach rękopisu

bez ograniczeń

INSTYTUT MATEMATYKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

RAPORT SERII PREPRINTY Nr 1

ODWZOROWANIA
SŁABO PRAWIE OKRESOWE
NA PRZESTRZENIACH ZWARTYCH

Tomasz Downarowicz

Praca doktorska

Promotor:

doc.dr hab. Anzelm Iwanik

Wrocław 1983

SPIS TREŚCI

WSTĘP.....	i - v
------------	-------

ROZDZIAŁ I, OPERATORY MARKOWA NA $C(X)$

§1. Podstawowe definicje i twierdzenia.....	1
§2. Konserwatywność.....	6
§3. Słaba (mocna) prawie okresowość.....	8

ROZDZIAŁ II, SYSTEMY SŁABO PRAWIE OKRESOWE

§4. Podstawowe własności operatorów deterministycznych....	14
§5. Słaba prawie okresowość systemów.....	19
§6. Punkty powracające.....	25
§7. Przykłady.....	31

ROZDZIAŁ III, ODWZOROWANIA SŁABO PRAWIE OKRESOWE NA ROZMAITOŚCIACH

§8. Twierdzenia ogólne, przegląd znanych wyników.....	43
§9. Przypadek jednowymiarowy.....	45
§10. Przypadek dwuwymiarowy.....	50

UZUPEŁNIENIE.....	62
-------------------	----

BIBLIOGRAFIA.....	63
-------------------	----

W S T Ę P

Zainteresowanie zachowaniem się iteracji odwzorowania mierzalnego Ψ na przestrzeni mierzalnej (topologicznej) X zrodziło się z potrzeb mechaniki klasycznej. Odwzorowania takie opisywać mogą bez mała każde zjawisko fizyczne związane z ruchem cząstek w przestrzeni. Z zainteresowań tych zrodziły się pod koniec XIX w. dwie dziedziny matematyki, u podstaw których leżą klasyczne dzieła G.D.Birkhoffa i H.Poincarégo : teoria ergodyczna i dynamika topologiczna.

Najważniejsze twierdzenia teorii ergodycznej dotyczą zbieżności oraz średniej zbieżności iteracji Ψ^n odwzorowania zachowującego miarę na przestrzeni miarowej X , w różnych topologiach. Rozpatruje się też modele niedeterministyczne, opisywane przez procesy stochastyczne. Podstawowymi pojęciami dla tej gałęzi teorii są operator stochastyczny i operator Markowa

Dynamika topologiczna zajmuje się półgrupami odwzorowań ciągłych na przestrzeni topologicznej X . Bada się tu między innymi zagadnienie częstości odwiedzania ustalonego obszaru przez trajektorię zadanego punktu. Definiuje się różnego typu punkty powracające. Ważną klasę modeli ogólnej dynamiki topologicznej tworzą tzw. systemy symboliczne, definiowane jako półgrupa przesunięć na zbiorze ciągów jednostronnie lub dwustronnie nieskończonych, o wartościach w zbiorze skończonym. Osobno rozwija się teoria gładkich systemów dynamicznych,

związana z teorią układów równań różniczkowych. Ogiwno łączące ogólną dynamikę topologiczną z powyższą jej gałęzią stanowią systemy dynamiczne na różniczkach topologicznych.

Niniejsza praca dotyczy odwzorowań ciągłych na przestrzeniach topologicznych, a więc zagadnienia leżącego u podstaw obu teorii.

Jeśli Ψ jest dowolnym odwzorowaniem ciągłym na przestrzeni X , opisującym ruch cząstek, to na ogół, blisko siebie leżące cząstki, po dłuższym czasie znacznie się oddalają. W modelach takich niewielki błąd w pomiarze położenia początkowego danej cząstki powoduje znaczny błąd w przewidywaniach, co do jej położenia w przyszłości. Jeśli iteracje Ψ^n stanowią rodzinę jednakowo jednostajnie ciągłą, to stabilność układu dynamicznego w powyższym sensie jest zapewniona. Odwzorowanie Ψ nosi wtedy nazwę mocno prawie okresowego. Od niedawna bada się też przypadek, gdy Ψ spełnia słabszy warunek (tzw. słabą prawie okresowość), polegający na tym, że wszystkie odwzorowania graniczne ciągu iteracji Ψ^n są ciągłe.

Pojęcia mocnej i słabej prawie okresowości zostały wprowadzone przez K. Jacobsa dla operatorów Markowa, a następnie badane przez M. Rosenblatt'a i R. Sine'a, który zastosował je do odwzorowań ciągłych. W tym ostatnim ujęciu słaba prawie okresowość jest tematem dwóch prac Montgomery'ego, Sine'a i Thomasa ([M.-S.-T.1] i [M.-S.-T.2]).

Jak dotąd nie istnieje żadne ogólne kryterium pozwalające rozstrzygać o słabej prawie okresowości odwzorowania ciągłego.

W przykładach stosowano w tym celu najrozmaitsze, indywidualne metody.

Praca ta ma na celu zebranie i uzupełnienie wszystkiego co wiadomo o odwzorowaniach słabo prawie okresowych na przestrzeniach zwartych. Składa się ona z trzech rozdziałów i krótkiego Uzupełnienia.

Rozdział I dotyczy operatorów Markowa na $C(X)$. Podane są tam wszystkie definicje i znane twierdzenia, które będą wykorzystane w dalszej części pracy dla systemów deterministycznych. W §3 tego rozdziału podana jest definicja słabej prawie okresowości. Dowodzi się tam również kilku twierdzeń dotyczących własności spektralnych słabo prawie okresowych operatorów Markowa.

Rozdział II poświęcony jest ogólnemu przypadkowi odwzorowania słabo prawie okresowego na przestrzeni zwartej. W §5 zebrane są najważniejsze znane twierdzenia dotyczące zachowania się takich odwzorowań na centrum. Badaniu zbioru punktów powracających poświęcony jest §6. Udowodniono tam między innymi, że w pewnych ważnych przypadkach zbiór ten pokrywa się z centrum. Wykazano też, że zbiór ten jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy (X, φ) jest systemem konserwatywnym. Wyjaśnieniu istotności założeń w twierdzeniach z §6 służy §7. Na jego wstępie udowodniony jest lemat stanowiący część wspólną większości rozumowań stosowanych do wykazania słabej prawie okresowości odwzorowań. Dalej następują przykłady, z których najważniejszy wykazuje, że zbiór punktów powracających dla systemów słabo prawie okresowych nie zawsze pokrywa się z centrum. (Główne wyniki §§6 i 7

przyjęte zostały do druku w Colloquium Mathematicum ([D.T.])).

Wreszcie rozdział III dotyczy ważnego, szczególnego przypadku, gdy X jest rozmaitością topologiczną zwartą. Dla odcinka i okręgu udowodniona zostaje tam pełna charakteryzacja odwzorowań słabo prawie okresowych. Dalej za cytowane jest najnowsze twierdzenie Montgomery'ego, Sine'a i Thomasa opisujące zachowanie się takiego odwzorowania na centrum, gdy X jest rozmaitością dwuwymiarową. Rozdział ten zamyka dowód twierdzenia (będącego odpowiedzią na pytanie tych trzech autorów), z którego wnioskiem jest, że faktycznie istnieje jedyny słabo prawie okresowy system na zwartej rozmaitości dwuwymiarowej X taki, że X jest orbitą jednego punktu. Stanowi go niewspółmierny obrót torusa. Wraz z twierdzeniem podanym w Uzupełnieniu oznacza to, że jedyną półgrupą monotetyczną zwartą, będącą jako przestrzeń topologiczna, rozmaitością dwuwymiarową, jest grupa obrotów torusa.

Oprócz przykładów w §7 praca na bieżąco ilustrowana jest standardowymi, a także mniej znanymi przykładami dotyczącymi ważniejszych definicji i twierdzeń.

Niektóre fragmenty rozumowań opatrzone rysunkami. Należy jednak traktować je wyłącznie pomocniczo; nie mają one na celu zastępować argumentacji.

Na bieżąco, w poszczególnych paragrafach sformułowano też kilka pytań otwartych.

Chciałbym wyrazić podziękowanie wszystkim tym, którzy pomagali mi w przygotowaniu tej pracy, a szczególnie prof. J.J.Charatonikowi, prof. R.Dudzie, doc. A.Iwanikowi i prof. Cz.Ryll - Nardzewskiemu, za konsultacje, z których wiele skorzystałem.

R O Z D Z I A Ł I

OPERATORY MARKOWA NA $C(X)$

§1. Podstawowe definicje i twierdzenia

Niech X oznacza zwartą przestrzeń Hausdorffa, a $\mathcal{B}_X$ σ -ciało zbiorów borelowskich na X . Przez $B(X)$ oznaczać będziemy przestrzeń wszystkich zespolonych funkcji borelowskich, ograniczonych na X , a przez $C(X)$ - jej podprzestrzeń składającą się ze wszystkich funkcji ciągłych. Przestrzeń sprzężoną do $C(X)$ możemy utożsamiać z przestrzenią $M(X)$ wszystkich zespolonych miar Radona na X . Przez $P(X)$ oznaczać będziemy podzbiór wypukły przestrzeni $M(X)$ składający się z miar probabilistycznych.

Operator liniowy $T : C(X) \rightarrow C(X)$ nazywamy markowskim (lub operatorem Markowa), jeśli spełnia on następujące dwa warunki:

$$Tf \geq 0 \quad , \quad \text{gdy } f \geq 0 \quad (\text{nieujemność})$$

$$T1 = 1 \quad ,$$

gdzie 1 oznacza funkcję tożsamościowo równą 1 na X . Od tej pory T oznaczać będzie zawsze operator markowski na $C(X)$.

Z powyższych warunków wynika, że T jest kontrakcją w normie

supremum na $C(X)$. Operator sprzężony T^* przeprowadza $P(X)$ w $P(X)$, zatem, dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$, mamy

$$Tf(x) = \langle Tf, \delta_x \rangle = \langle f, T^* \delta_x \rangle = \int_X f \, dT^* \delta_x$$

Rodzinę miar $T^* \delta_x$ oznacza się często przez $p(x, \cdot)$.

Funkcja dwuargumentowa $p : X \times \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1]$ spełnia przy tym następujące warunki:

dla ustalonego $x \in X$ $p(x, \cdot)$ jest probabilistyczną miarą Radona na $\mathcal{B}_X$,

dla ustalonego $A \in \mathcal{B}_X$ $p(\cdot, A)$ jest funkcją borelowską na X .

Z drugiej własności wynika, że operator T przedłużyć można na $B(X)$ wzorem

$$Tf(x) = \int_X f(y) \, p(x, dy),$$

Przedłużenie to pokrywa się z operatorem $T^{**}|_{B(X)}$.

Funkcję $f \in C(X)$ nazywamy T-niezmienniozą, jeśli $Tf = f$. Zbiór wszystkich funkcji T-niezmienniczych oznaczać będziemy przez $C_T(X)$. Z definicji operatora markowskiego wynika, że do $C_T(X)$ należą wszystkie funkcje stałe. Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, pomijać będziemy przedrostek "T-", pisząc jedynie "funkcja niezmiennicza". Tę samą konwencję stosować będziemy przy wielu innych własnościach, zaznaczając to w definicji umieszczeniem przedrostka "T-" w nawiasie.

I tak miarę $\mu \in M(X)$ nazywać będziemy (T-)niezmienniozą, jeśli $T^*\mu = \mu$. Zbiór wszystkich probabilistycznych miar (prawdopodobieństw) niezmienniczych oznaczać będziemy przez $P_T(X)$.

Z twierdzenia Markowa-Kakutaniego wynika, że $P_T(X)$ jest zbiorem niepustym. Ponadto wiadomo, że zbiór ten jest $*$ -słabo zwarty i wypukły.

Centrum operatora T nazywamy domknięcie sumy nośników topologicznych wszystkich miar z $P_T(X)$ i oznaczać je będziemy przez M_T . Pojęcie to ma podstawowe znaczenie w dalszej części tej pracy.

Zbiór domknięty, niepusty $F \subset X$ nazywamy (T-)niezmienniczym, jeśli $\text{supp } T^*\delta_x \subset F$ dla każdego $x \in F$ ($\text{supp } \mu$ oznacza nośnik topologiczny miary μ). Łatwo dowodzi się, że domknięty, niepusty zbiór F jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla $f \in C(X)$

$$(*) \quad f|_F = 0 \Rightarrow Tf|_F = 0$$

Można wtedy zdefiniować operator T_F na $C(F)$ wzorem

$$T_F g(x) = \int_F g(y) p(x, dy) = \int_X g(y) p(x, dy), (x \in F)$$

Inaczej mówiąc, niezależnie od przedłużenia funkcji $g \in C(F)$ do funkcji $\tilde{g} \in C(X)$, $T_F g = T\tilde{g}|_F$. Ze wzoru (*) wynika, że nośniki miar z $P_T(X)$ oraz centrum M_T są zbiorami niezmienniczymi. Zbiór niezmienniczy F nazywamy (T-)minimalnym, jeśli nie zawiera on właściwych podzbiorów niezmienniczych. Z lematu Kuratowskiego - Zorna wynika, że każdy zbiór niezmienniczy zawiera podzbiór minimalny. Z poprzednich uwag można wywnioskować, że każdy

zbiór minimalny jest nośnikiem pewnej miary z $P_T(X)$, stąd każdy zbiór minimalny jest zawarty w centrum.

Operator T nazywa się nieprzywiedlny, jeśli X jest zbiorem T -minimalnym. Oczywiście, F jest zbiorem minimalnym wtedy i tylko wtedy, gdy T_F jest operatorem nieprzywiedlnym.

Operator T nazywamy jednostajnie stabilnym (mocno ergodycznym), jeśli dla każdej funkcji $f \in C(X)$ ciąg $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$ jest zbieżny jednostajnie. Z ogólnych twierdzeń teorii ergodycznej wynika, że równoważnie wystarczy żądać, aby ciąg f_n był zbieżny punktowo do funkcji ciągłej (np. [S.H.H.]). Moona operatowa granica $\bar{A} = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ jest wtedy rzutowaniem na $C_T(X)$. R.Sine udowodnił (Cor. 2.3. w [S.R.1]), że do jednostajnej stabilności operatora T potrzeba i wystarcza, aby funkcje z $C_T(X)$ rozdzielały miary z $P_T(X)$. (Miary z $P_T(X)$ rozdziolają funkcje z $C_T(X)$ dla dowolnego operatora T). W tym samym twierdzeniu dowodzi się też, że

dla operatora jednostajnie stabilnego T zbiory minimalne pokrywają się z nośnikami miar ekstremalnych z $P_T(X)$.

Ponieważ, na mocy twierdzenia Kreina - Milmana, centrum jest domknięciem sumy nośników miar ekstremalnych z $P_T(X)$, więc dla operatorów jednostajnie stabilnych centrum pokrywa się z domknięciem sumy zbiorów minimalnych. Warunek ten nie jest jednak wystarczający do jednostajnej stabilności (patrz Przykład 1.2., zob. też Przykład 4.1.).

Przykład 1.1. Niech X będzie zbiorem zwartym, przeliczalnym (lub skończonym). Wtedy operatory Markowa na $C(X)$ możemy utożsamiać z macierzami stochastycznymi $[P_{x,y}]$, gdzie $P_{x,y} = p(x, \{y\})$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu x do stanu y . Odpowiadający takiemu operatorowi proces (patrz §2) nazywa się łańcuchem Markowa.

Przykład 1.2. Symetryczny spacer losowy na liczbach naturalnych. Niech $X = \mathbb{N} \cup \{-\infty, \infty\}$ i niech

$$P_{x,y} = \begin{cases} 1/2 & , \text{ gdy } |x - y| = 1 \\ 1 & , \text{ gdy } x = y = \pm \infty \\ 0 & \text{ poza tym} \end{cases}$$

$$\text{Wtedy } Tf(x) = \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$

Jedynymi zbiorami minimalnymi są $\{-\infty\}$ i $\{\infty\}$, jedyne ekstremalne prawdopodobieństwa niezmiennicze to $\delta_{-\infty}$ i δ_{∞} , mimo to T nie jest jednostajnie stabilny, gdyż, jak nietrudno dowieść, $C_T(X)$ składa się tu wyłącznie z funkcji stałych, a te nie rozdzielają miar niezmienniczych. Jeśli jednak za X przyjąć jednopunktowe uzwarcenie zbioru $\mathbb{N}$, to analogiczny operator okaże się jednostajnie stabilny. Do przykładu tego powrócimy jeszcze przy omawianiu konserwatywności i słabej prawie okresowości.

Przykład 1.3. Niech $\varphi : X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wtedy operator $T = T_\varphi$ na $C(X)$ określony wzorem $Tf(x) = f(\varphi(x))$

jest markowski. Mamy teraz: $p(x, \cdot) = \delta_{\psi(x)}$. Operator taki nazywa się deterministyczny (lub indukowany punktowo). Operatorom deterministycznym poświęcona jest zasadniczo część tej pracy (patrz §4).

Oprócz cytowanych prac o ogólnej teorii operatorów Markowa zajmowano się między innymi w [J.B.], [J.-S.2], [S.R.3], [F.S.R], [R.M.]. Na niektóre podstawowe wyniki z tych prac powoływać się będziemy w następnych paragrafach.

§2. Konserwatywność

Znane twierdzenie Ionescu - Tulcea gwarantuje, dla każdego operatora markowskiego T , istnienie procesu markowskiego ξ_n (z czasem dyskretnym), określonego na $\Omega = X^N$, o wartościach w X , takiego że $\xi_n(\omega) = x_n$ dla $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Omega$. Warto dodać, że rozkłady skończone wymiarowe w tym procesie są następujące:

$$P_{x_0} \{ \xi_0 \in A_0, \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n \} = \delta_{x_0}(A_0) \int_{A_1} p(x_0, dx_1) \int_{A_2} p(x_1, dx_2) \dots \int_{A_n} p(x_{n-1}, dx_n),$$

gdzie $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_X$. Miara P_{x_0} na Ω opisuje zachowanie się procesu pod warunkiem, że startuje on ze stanu x_0 .

Można zatem formułować zagadnienia związane z zachowaniem się trajektorii. I tak dla ustalonego zbioru borelowskiego

$A \subset X$ prawdopodobieństwo P_x zbioru tych trajektorii, które odwiedzają zbiór A wynosi, jak udowodniono w [S.R.3]

$$P_{x_0} \{ \omega : \exists_n \xi_n(\omega) \in A \} = i(A)(x)$$

gdzie $i(A) = i(1_A)$ jest tzw. funkcją Brùnela funkcji charakterystycznej 1_A . Jeśli $g \in B(X)$, to $i(g)$ jest zdefiniowana jako najmniejsza funkcja h majoryzująca g , dla której $Th \leq h$ (podniezmienniczość). Podobnie, prawdopodobieństwo zbioru tych trajektorii, które startując z x odwiedzają zbiór A nieskończenie wiele razy wynosi $j(A)$, gdzie funkcję $j(g)$ definiuje się dla $g \in B(X)$ jako $\lim T^n i(g)$. Niech

$$\mathcal{Q} = \{ g \in B(X) : 0 \leq g \leq 1, g - \text{dolnie półciągła}, T^n g \downarrow 0 \}$$

Brzegiem Foguela operatora T nazywamy zbiór $F_T = \bigcap \{ g = 0 \}$ po $g \in \mathcal{Q}$. W [S.R.3] dowodzi się, że brzeg Foguela jest niepustym zbiorem niezmienniczym, oraz, że

$$F_T = \bigcap \{ f = 0 \} \text{ po } f \in C(X) \text{ takich, że } j(f) = 0.$$

O wadze pojęcia brzegu Foguela decyduje twierdzenie Sine'a (Tw. 17 w [S.R.3], zob. też [J.-S.2]), z którego wynika, że gdy X jest przestrzenią metryzowalną, to dla każdego $x \in X$ P_x - prawie każda trajektoria jest zbieżna do F_T .

Operator T nazywa się konserwatywny, jeśli $F_T = X$. Operatory konserwatywne badane były m. in. w [F.S.R.], [B.W.1], [B.W.2]. Dla nas istotny będzie fakt udowodniony w

[F.S.R.] :

jeśli T jest konserwatywny, g jest dolnie półciągłą funkcją podniezmienniczą, to $Tg = g$ poza zbiorem I kategorii.

(w [F.S.R.] zakłada się, że X jest metryzowalna, jednak powyższy fakt jest prawdziwy również bez tego założenia).

Powróćmy teraz na chwilę do Przykładu 1.2. symetrycznego spaceru losowego na liczbach naturalnych. Każda funkcja g podniezmiennicza, a więc taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $g(n) \geq 1/2 (g(n+1) + g(n-1))$, ma tę własność, że jej wykres leży poniżej każdej prostej łączącej dwa sąsiednie jego punkty. Widać więc, że jedynie funkcje stałe na $\mathbb{N}$, spośród podniezmienniczych, są ograniczone. Aby $T^n g \downarrow 0$, g musi więc być funkcją zerującą się na $\mathbb{N}$. Niezależnie od tego, jakie uzwarcenie zbioru $\mathbb{N}$ przyjmiemy za X (zawsze dla $x \in X \setminus \mathbb{N}$ $T^* \delta_x = \delta_x$), to jedyną funkcją nieujemną, dolnie półciągłą, zerującą się na $\mathbb{N}$ jest funkcja tożsamościowo równa zeru na X . Tak więc we wszystkich tych przypadkach $F_T = X$ i T jest konserwatywny.

§3. Słaba (mocna) prawie okresowość

Niech S_T oznacza domknięcie w słabej operatorowej topologii rodziny $\{T^n : n = 1, 2, \dots\}$ potęg operatora T . Jeśli S_T jest zwarta w słabej (mocnej) operatorowej topologii, to operator T nazywamy słabo (mocno) prawie okresowym (w skrócie s.p.o. (m.p.o.)). Dla każdej funkcji $f \in C(X)$ rodzina

$\{T^n f : n = 1, 2, \dots\}^-$ jest zwarta w topologii zbieżności punktowej, więc i w słabej. Równoważnie można zatem powiedzieć, że operator T jest słabo prawie okresowy, jeśli dla każdej funkcji $f \in C(X)$ domknięcie rodziny $\{T^n f; n = 1, 2, \dots\}$ nie zawiera funkcji nieciągłych. T jest mocno prawie okresowy, jeśli dla każdej $f \in C(X)$ $\{T^n f; n = 1, 2, \dots\}$ jest rodziną funkcji jednakowo ciągłych. Zauważmy, że słaba (a więc i mocna) prawie okresowość operatora T implikuje, że S_T jest przemienną półgrupą operatorów. Bez tego założenia przemiennność w S_T może nie zachodzić; pokażemy co więcej, że przy pewnych dodatkowych założeniach słaba prawie okresowość T i przemiennność S_T są wzajemnie równoważne (Lemat 7.1). Różne równoważne definicje słabej (mocnej) prawie okresowości znaleźć można w [J.K.]. W [J.-S.1] udowodniono też, że

ze słabej prawie okresowości operatora T wynika jego jednostajna stabilność.

Dla s.p.o. operatorów ważną własnością jest istnienie tzw. rozkładu de Leeuw - Glicksberga. Dowodzi się mianowicie ([K.J.], [dL.-G.]), że jeśli T jest s.p.o., to każda funkcja $f \in C(X)$ jest postaci $f = Ef + (I - E)f$, gdzie $E \in S_T$ jest rzutowaniem na $C_1(T)$ - podprzestrzeń domkniętą $C(X)$ rozpiętą na funkcjach własnych operatora T , odpowiadających wartościom własnym o module 1, zaś $(I - E)$ (nie koniecznie element z S_T) jest rzutowaniem na $C_0(T)$ - podprzestrzeń domkniętą $C(X)$ składającą się ze wszystkich funkcji g takich, że $S_T(g)$ zawiera funkcję tożsamościowo równą zeru. W dowodzie twierdzenia

de Leeuw - Glicksberga operator E uzyskuje się jako jedność grupy, jaką stanowi jedyny ideał minimalny (obustronny) K_T w S_T . Oczywiście $K_T = ES_T$. Jako zastosowanie powyższych faktów udowodnimy teraz kilka twierdzeń wyjaśniających zależności między punktowym spektrum peryferyjnym $\sigma_p(T)$ operatora T (wartości własne o module 1), a działaniem T na zbiorach minimalnych i strukturą grupy K_T .

Uwaga. Badaniem własności spektralnych operatorów na kratach Banacha zajmował się H.H.Schaefer ([S.H.H.]).

Twierdzenie 5.2 w rozdz. V mówi, że jeśli T jest nieprzywiedlnym operatorem Markowa na $C(X)$, to $\sigma_p(T)$ jest podgrupą koła i krotność każdej wartości własnej $\lambda \in \sigma_p(T)$ (wymiar przestrzeni własnej) wynosi 1. Poniższe twierdzenie wiąże się też z Tw. 105 w rozdz. III, [S.H.H.] (Twierdzenie Halmosa - von Neumanna), w którym zamiast s.p.o. zakłada się, że S_T jest ograniczona oraz, że $C_1(T) = C(X)$ (T jest wtedy deterministyczny)

Twierdzenie 3.1. Niech T będzie nieprzywiedlnym, słabo prawie okresowym operatorem markowskim na $C(X)$. Wtedy peryferyjne spektrum punktowe $\sigma_p(T)$ jest izomorficzne z grupą $\hat{K}_T$ dualną do ideału minimalnego K_T w S_T .

Dowód. Niech $\lambda \in \sigma_p(T)$. Dla każdej funkcji $f_\lambda \in C(X)$ takiej, że $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$ mamy $T^n f_\lambda = \lambda^n f_\lambda$ i jeśli $U \in S_T$, to istnieje λ_U , $|\lambda_U| = 1$ taka że $Uf_\lambda = \lambda_U f_\lambda$. Wartość λ_U nie zależy od wyboru funkcji f_λ . Niech odwzorowanie $\chi_\lambda : S_T \rightarrow \Gamma$ ($\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$) określone będzie wzorem $\chi_\lambda(U) = \lambda_U$.

χ_λ jest ciągle w słabej operatorowej topologii oraz $\chi_\lambda(UV) = \chi_\lambda(U) \cdot \chi_\lambda(V)$ dla dowolnych $U, V \in S_T$. Tak więc odwzorowania χ_λ ($\lambda \in \sigma_p(T)$) są charakterami na K_T . Ponadto przyporządkowanie $\lambda \rightarrow \chi_\lambda$ jest, jak łatwo sprawdzić, różnowartościowym homomorfizmem z $\sigma_p(T)$ w $\hat{K}_T$. Niech $U \neq V$, $U, V \in K_T$. Ponieważ $U = UE$, $V = VE$, więc istnieje funkcja $f \in C_1(T)$ taka, że $Uf \neq Vf$. Istnieje zatem też funkcja własna f_λ o tej samej własności. Tak więc, $\lambda_U f_\lambda \neq \lambda_V f_\lambda$, a co za tym idzie $\chi_\lambda(U) \neq \chi_\lambda(V)$. Wykorzystanie faktu, że dla grup zwartych jedyną podgrupą grupy dualnej rozdzielającą punkty jest cała grupa dualna (np. [H.-R.]), kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 3.2. Dla jednostajnie stabilnego operatora markowskiego T na $C(X)$ mamy

$$\sigma_p(T) = \bigcup \sigma_p(T_F)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich zbiorach minimalnych $F \subset X$. Krotność wartości własnej $\lambda \in \sigma_p(T)$ jest równa ilości tych zbiorów minimalnych F , że $\lambda \in \sigma_p(T_F)$.

Dowód. Jeśli $\lambda \in \sigma_p(T)$, to istnieje $f_\lambda \in C(X)$ taka, że $f_\lambda \neq 0$ i $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Zbiór $\{f_\lambda \mid \|f_\lambda\| = 1\}$ jest niezmienniczy, zawiera więc pewien podzbiór minimalny F . Przeto $\lambda \in \sigma_p(T_F)$. (Dotąd nie korzystaliśmy z założenia jednostajnej stabilności). Na odwrót, dla $\lambda \in \Gamma$ zdefiniujmy operator liniowy T_λ na $C(X)$ wzorem $T_\lambda = \frac{1}{\lambda} T$. Z twierdzeń ergodycznych wynika istnienie mocnej operatorowej granicy $A_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_\lambda^k$.

Niech $\lambda \in \Gamma$ będzie wartością własną operatora T_F , gdzie F jest pewnym zbiorem T -minimalnym, i niech $f_\lambda \in C(F)$ będzie odpowiadającą jej funkcją własną (niezerową). Można rozszerzyć f_λ do $\tilde{f}_\lambda \in C(X)$. Wtedy $f = A_\lambda \tilde{f}_\lambda$ spełnia $Tf = \lambda f$, $f|_F = f_\lambda \neq 0$. Dowodzi to, że $\lambda \in \sigma_p(T)$. Ostatnia część tezy wynika teraz z cytowanego już Tw. 5.2 w [S.H.H.] .

Niech teraz T będzie operatorem s.p.o. na X . Jeśli F jest zbiorem niezmienniczym, to przez $K_T|_F$ oznaczmy grupę operatorów $\{U_F : U \in K_T\}$. Z drugiej strony T_F jest również operatorem s.p.o., więc w półgrupie $S_T|_F = \{U_F : U \in S_T\}$ istnieje jedyny ideał minimalny. Łatwo sprawdzić, że jest on równy $K_T|_F$, i że jego jednością jest E_F . Mając dany charakter χ_F na $K_T|_F$ można zdefiniować charakter χ na K_T wzorem $\chi(U) = \chi_F(U_F)$. Nietrudno sprawdzić, że tak uzyskane charaktery na K_T , przy F przebiegającym wszystkie zbiory minimalne, rozdzielają punkty. Prowadzi to, wraz z Tw. 3.1 i 3.2 do następującej konkluzji:

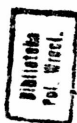
Twierdzenie 3.3. Dla słabo prawie okresowego operatora Markowskiego T na $C(X)$ grupa $\hat{K}_T$ dualna do ideału minimalnego K_T w S_T jest izomorficzna z podgrupą koła Γ wygenerowaną przez $\sigma_p(T)$.

Własności spektralne i słabą prawie okresowość wiąże znane twierdzenie Rosenblatta (Lemat 12 i Tw. 6 w [R.M.]), które mówi, że

Jeśli operator T jest nieprzywiedlny i s.p.o., to iteracje T^n są zbieżne słabo operatorowo wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_p(T) = \{1\}$. Jeśli T jest m.p.o., to zbieżność ta zachodzi bez założenia nieprzywiedlności, i to w moonej operatorowej topologii.

Twierdzenie to prawdziwe jest również dla operatora s.p.o. T jeśli badać zbieżność $T_{M_T}^n$.

W przykładzie 1.2 symetrycznego spaoeru losowego na jednopunktowym uzwarceniu zbioru liczb naturalnych, dla każdej funkcji $f \in C(X)$, a więc mającej granicę w nieskończoności, mamy $T^n f \rightarrow f(\infty)$ jednostajnie. W szczególności więc T jest m.p.o. Fakt, że $\sigma_p(T) = \{1\}$ wynika z twierdzenia Rosenblatta, jak również z Tw. 3.2 i 3.3 : jedynym zbiorem minimalnym jest $\{\infty\}$ i grupa $K_T \setminus \{\infty\}$ (a więc i dualna) jest jednoelementowa.



R O Z D Z I A Ł II

SYSTEMY SŁABO PRAWIE OKRESOWE

§4. Podstawowe własności operatorów deterministycznych

W dalszej części pracy rozpatrywać będziemy markowskie operatory deterministyczne na $C(X)$, czyli operatory indukowane przez odwzorowania ciągłe $\psi: X \rightarrow X$ wzorem $T_\psi f = f\psi$ (patrz Przykład 1.3.). Dobrze znanym faktem (np. [E.A.]) jest, że jeśli T jest operatorem Markowa na $C(X)$, to następujące warunki są parami równoważne:

T jest deterministyczny, tzn. istnieje $\psi: X \rightarrow X$ ciągłe, takie że $T = T_\psi$

T jest mnożliwy, tzn. $Tfg = (Tf)(Tg)$ dla $f, g \in C(X)$

T jest homomorfizmem kratowym, tzn. $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$ dla $f, g \in C(X)$

T jest punktem ekstremalnym zbioru wszystkich operatorów Markowa na $C(X)$

Badaniem własności spektralnych markowskich homomorfizmów kratowych zajmowali się m.in. M.Wolf ([W.M]) i H.H.Schaefer ([S.H.H.]).

Wszystkie własności operatora deterministycznego T możemy przypisać indukującemu go odwzorowaniu φ , dlatego w dalszym ciągu zajmować się będziemy **s y s t e m a m i** (X, φ) , gdzie φ zawsze oznaczać będzie odwzorowanie ciągłe na zwartej przestrzeni Hausdorffa X . We wszystkich nazwach i oznaczeniach w miejsce " T " pojawi się " φ ". Wiele pojęć z teorii operatorów pozwala łatwo przetłumaczyć się na język systemów. I tak zbiór domknięty F jest $(\varphi-)$ niezmienniczy (patrz §1), jeśli $\varphi(F) \subset F$. Tym samym wzorem definiuje się borelowskie zbiory niezmiennicze. Miara Radona μ jest $(\varphi-)$ niezmiennicza, jeśli dla każdego zbioru $A \in \mathcal{B}_X$ $\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$. Jeśli $\mu \in P_\varphi(X)$, to φ można traktować jako transformację zachowującą miarę na przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$. Dowodzi się (np. [D.-G.-S.]), że

μ jest ekstremalna w $P_\varphi(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest ergodyczne na $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, tzn., gdy każdy zbiór borelowski niezmienniczy ma miarę μ zero lub jeden.

Dlatego też często używa się nazwy "miara ergodyczna" w miejsce nazwy "miara niezmiennicza ekstremalna".

Przykład 4.1. Niech $X = [0, 1]$, przy czym utożsamiamy punkty 0 i 1 ($0 = 1$). Niech $\varphi(x) = 2x \pmod{1}$. Miara Lebesgue'a λ jest, jak łatwo zauważyć, niezmiennicza. Wiadomo ponadto (np. [H.P.R.]),

że φ jest ergodyczne na $(X, \mathcal{O}_X, \mu)$, a zatem μ jest ekstremalna w $P_e(X)$. Na przykładzie tym widać, że założenie jednostajnej stabilności jest istotne do tego, aby nośniki miar ekstremalnych były zbiorami minimalnymi (patrz §1), gdyż w naszym przypadku $\text{supp } \mu = X$ zawiera właściwe podzbiory domknięte niezmiennicze (np. $\{0\}$).

Uwaga. Punkty z przestrzeni X przedstawić można w systemie dwójkowym. Wtedy φ odpowiada przesunięciu w lewo na zbiorze Cantora $\{0,1\}^N$ wszystkich ciągów zero - jedynkowych. Przejście to nie jest do prawda homeomorficzne, ale większość interesujących nas własności jest dla obu tych modeli identyczna. Do wielu dalszych przykładów wykorzystywać będziemy zachowanie się φ na szczególnych podzbiorach niezmienniczych tego systemu.

W dynamice topologicznej bada się ogólny przypadek, gdy na przestrzeni fazowej X (przeważnie lokalnie zwartej) działa półgrupa odwzorowań (działaniem półgrupowym, ciągłym w topologii zbieżności punktowej ze względu na każdy argument z osobna, jest składanie). W naszym przypadku półgrupą tą będzie rodzina $\{\varphi^n: n = 1, 2, \dots\}$ iteracji odwzorowania φ . Niech S_φ oznacza domknięcie tej rodziny w topologii zbieżności punktowej. S_φ jest zwartym podzbiorem X^X . Oczywiście S_φ może zawierać odwzorowania nieciągłe. (Uwaga: Wprowadzone przez nas w §3 oznaczenie S_T na słabe operatorowe domknięcie rodziny $\{T^n: n = 1, 2, \dots\}$ w przypadku deterministycznym nie pokrywa się z S_φ ; S_{T_φ} jest rodziną operatorów indukowanych przez odwzorowania ciągłe z S_φ). Możemy teraz przenieść wiele pojęć z dynamiki topologicznej. Większość z nich znajduje się w [G.W.H.] i [G.-H.]

Orbita domknięta (krótko: orbita) punktu $x \in X$ nazywamy

zbiór $S_\varphi^0(x) = \{x\} \cup S_\varphi(x) \quad (= \{\varphi^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}^-)$.

Jest oczywiste, że orbita $S_\varphi^0(x)$ (jak i zbiór $S_\varphi(x)$) jest dla dowolnego $x \in X$ zbiorem niezmienniczym. Ponadto łatwo dowodzi się, że

Zbiór F jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in F$ $F = S_\varphi^0(x)$

W warunku tym równoważnie można zastąpić $S_\varphi^0(x)$ przez $S_\varphi(x)$, gdyż $S_\varphi(x) = S_\varphi^0(\varphi(x))$, ($x \in X$).

Punkt $x \in X$ nazywamy powracającym jeśli $x \in S_\varphi(x)$.

Podobnie jak w [D.T.] zbiór wszystkich punktów powracających oznaczać będziemy przez M_φ^2 . Punkt x nazywamy jednostajnie powracającym (lub prawie okresowym) jeśli dla każdego otoczenia $U \ni x$ istnieje liczba naturalna k taka, że

$$\{\varphi^{n+1}(x) : i = 1, 2, \dots, k\} \cap U \neq \emptyset \text{ dla każdego } n \text{ naturalnego}$$

Zbiór wszystkich punktów jednostajnie powracających oznaczać będziemy (jak w [D.T.]) przez M_φ^1 . Punkt x nazywa się okresowy, jeśli $\varphi^n(x) = x$ dla pewnego $n = 1, 2, \dots$. Oczywiście punkty okresowe są jednostajnie powracające, zaś $M_\varphi^1 \subset M_\varphi^2$. Inkluzji tych bez dodatkowych założeń nie można odwrócić (Przykład 4.2). Ponadto znane są następujące fakty ([G.W.H.]) :

$x \in M_\varphi^1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_\varphi^0(x)$ jest zbiorem minimalnym, a więc M_φ^1 pokrywa się z sumą wszystkich zbiorów minimalnych.

$$M_{\varphi}^1 = M_{\varphi^n}^1 \text{ dla każdego } n = 1, 2, \dots$$

$$M_{\varphi}^2 = M_{\varphi^n}^2 \text{ dla każdego } n = 1, 2, \dots$$

Uzasadnienia wymaga jedynie inkluzja "C" w ostatnim wzorze:
Niech $x \in X$ będzie punktem φ -powracającym. Wtedy dla każdego otoczenia $U_0 \ni x$ istnieje liczba naturalna n_1 i otoczenie $U_1 \subset U_0$, $x \in U_1$, takie że $\varphi^{n_1}(U_1) \subset U_0$. Przez indukcję otrzymamy ciąg n_k liczb naturalnych i ciąg zstępujący otoczeń $U_k \ni x$ takie, że $\varphi^{n_k}(U_k) \subset U_{k-1}$. Wtedy $\varphi^m(x) \in U_0$ dla każdej liczby m , będącej sumą skończenie wielu liczb n_k o różnych indeksach k . Trzeba teraz wykorzystać prosty lemat z teorii liczb, który mówi, że dla dowolnego ciągu n_k i dowolnego zadanego n ($n, n_k \in \mathbb{N}$) istnieje liczba m opisanej wyżej postaci, podzielna przez n . W ten sposób w U_0 znaleźliśmy punkt $z \in S_{\varphi^n}^0(x)$, co dowodzi, że x jest punktem φ^n -powracającym (por. Tw. 7.04 w [G.-H.]).

Przykład 4.2. Niech (X, φ) będzie przesunięciem w lewo na zbiorze Cantora (Przykład 4.1) . Ciąg zero - jedynkowy $p \in X$ jest powracający, jeśli każdy jego odcinek początkowy powtarza się, zaś jednostajnie powracający, jeśli każdy taki odcinek powtarza się w odstępach ograniczonej długości. Następujący ciąg $p(n)$:

$$p(1) = 1$$

$$p(2) = 0$$

$$p(3,4) = p(1,2), \text{ (gdzie } p(3,4) \text{ oznacza parę } (p(3), p(4)))$$

$$p(5,6,7,8) = (0,0,0,0)$$

$$p(9,10,\dots,16) = p(1,2,\dots,8)$$

$$p(17,18,\dots,32) = (0,0,\dots,0)$$

itd.

jest powracający, lecz nie jednostajnie powracający.

Natomiast ciąg $q(n)$:

$$q(2n-1) = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$q(4n-2) = 0, \quad "$$

$$q(8n-4) = 1, \quad "$$

$$q(16n-8) = 0, \quad "$$

itd.

jest jednostajnie powracający, lecz nie okresowy.

A.Iwanik w [I.A.] podaje przykład podzbioru minimalnego podwyższego systemu, na którym istnieje wiele miar ekstremalnych z $P_\varphi(X)$. Znany jest też przykład (27.2 w [D.-G.-S.]) systemu nieprzywiedlnego, posiadającego dokładnie dwa prawdopodobieństwa niezmiennicze ekstremalne.

§5. Słabo prawie okresowość systemów

O systemie (X, φ) mówimy, że jest słabo (moono) prawie okresowy, jeśli operator T_φ jest s.p.o. (m.p.o.) .

Z definicji podanych w §3 wynika, że

System (X, φ) jest m.p.o. (jednakowo ciągły), jeśli iteracje $\{\varphi^n: n = 1, 2, \dots\}$ stanowią rodzinę jednakowo ciągłą.

System (X, φ) jest s.p.o., jeśli S_φ składa się wyłącznie z odwzorowań ciągłych, czyli, gdy $S_\varphi = S_{T_\varphi}$.

Uwaga. W dynamice topologicznej występują również pojęcia odwzorowań prawie okresowych i słabo prawie okresowych ([G.W.H.]). O ile, przynajmniej dla homeomorfizmów na przestrzeniach zwartych, zakresy pojęć prawie okresowości i mocnej prawie okresowości pokrywają się (4.35, 4.38 w [G.-H.]), o tyle pomiędzy pojęciami słabej prawie okresowości w obydwu sensach nie ma implikacji w żadną stronę (Przykłady 5.3 i 5.4). Dla pełnego obrazu przytoczymy jedną z równoważnych definicji (Tw. 4.24 w [G.-H.]):

Homeomorfizm φ na przestrzeni zwartej X jest słabo prawie okresowy w sensie dynamiki topologicznej, jeśli orbity domknięte stanowią górną półciągłą partycję przestrzeni X .

Z definicji tej w szczególności wynika, że orbity dwóch różnych punktów bądź pokrywają się, bądź są rozłączne, a co za tym idzie, że $M_\varphi^1 = X$.

Przykład 5.1. Obroty okręgu. Niech $X = [0, 1]$, ($0 = 1$), (jak w Przykładzie 4.1). Niech $\varphi(x) = x + a \pmod{1}$, gdzie

a) a jest liczbą wymierną. Wtedy każdy punkt jest okresowy, okres jest wspólny dla wszystkich $x \in X$ (o systemie takim mówimy, że jest globalnie okresowy), tak więc $M_\varphi^1 = X$, jednak (X, φ) nie jest systemem nieprzywiedlnym.

b) a jest liczbą niewymierną. Wtedy (X, φ) jest systemem nieprzywiedlnym i nie ma punktów okresowych.

W obydwu przypadkach (X, φ) jest m.p.o. homeomorfizmem (a więc i s.p.o. w obydwu sensach).

Uogólnieniem powyższego przypadku jest następujący

Przykład 5.2. Niech H będzie zwartą grupą monotetyczną (więc przemienną), postaci $H = \{a^n : n = 1, 2, \dots\}^-$. Odwzorowanie φ zadane niech będzie wzorem $\varphi(b) = ab$, ($b \in H$) (translacja o element generujący). Wtedy S_φ jest zbiorem wszystkich translacji o elementy grupy H (w tym sensie $S_\varphi = H$). Oczywiście S_φ jest rodziną jednakowo ciągłą w jednostajnej strukturze grupy H . Ponadto H jest orbitą każdego swojego elementu, czyli (X, φ) jest m.p.o. systemem nieprzywiedlnym.

Przykład 5.3. Niech X jak w Przykładzie 4.1., $\varphi(x) = x^2$. φ jest homeomorfizmem s.p.o. (w sensie operatorowym), gdyż $\varphi^n(x) \rightarrow 0$ dla każdego $x \in X$. Jednak poza zerem żaden punkt nie jest powracający, tym bardziej $X \neq M_\varphi^1$. Zatem nie może zachodzić s.p.o. w sensie dynamiki topologicznej.

Uwaga. To samo odwzorowanie na zwykłym odcinku $[0,1]$ nie jest s.p.o. w żadnym sensie; odwzorowanie graniczne nie jest ciągłe.

Przykład 5.4. Niech X_1 jak w Przykładzie 4.1. i niech $X_2 = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Przestrzeń $X = X_1 \times X_2$ jest zwarta. Dla liczby niewymiernej a odwzorowanie Ψ na X zdefiniujemy wzorem

$$\Psi(x_1, x_2) = (x_1 + a + 2^{-x_2}, x_2)$$

gdzie dodawanie rozumiane jest modulo 1 oraz $2^{-\infty} = 0$. Dla każdego $x_2 \in X_2$ Ψ na $X_1 \times \{x_2\}$ jest obrotem niewymiernym okręgu (Przykład 5.1.), w szczególności więc $M_\Psi^1 = X$ i partycja na zbiory minimalne (postaci $X_1 \times \{x_2\}$) jest górnio półciągła. Zatem (X, Ψ) jest s.p.o. w sensie dynamiki topologicznej. Jednakże iteracje Ψ^n nie są jednakowo ciągłe na X . W myśl twierdzenia Sine'a, (którego uogólnieniem jest cytowane dalej Tw. 5.4.), (X, Ψ) nie jest s.p.o. w sensie operatorowym.

W dalszej części pracy zajmować się będziemy systemami słabo prawie okresowymi jedynie w sensie operatorowym. Łatwo zauważyć, że dla takiego systemu

$$M_\Psi^2 = \bigcup M_\Psi^1 \text{ po } \Psi \in S_\Psi$$

Zacytujemy teraz dwa najważniejsze twierdzenia dotyczące odwzorowań słabo i mocno prawie okresowych na ogólnych przestrzeniach zwartych.

Twierdzenie 5.4. ($[M.-S.-T.1]$). Niech (X, φ) będzie systemem s.p.o. Wtedy

- a) suma zbiorów minimalnych M_φ^1 jest zbiorem domkniętym,
- b) $\varphi|_{M_\varphi^1}$ jest mocno prawie okresowym homeomorfizmem,
- c) M_φ^1 jest retraktem przestrzeni X .

Twierdzenie 5.5. ($[H.-vN.]$). Niech (X, φ) będzie m.p.o. systemem nieprzywiedlnym. Wtedy X jest homeomorficzne ze zwartą grupą monotetyczną i φ odpowiada translacji o pewien element generujący.

Uwaga. W $[M.-S.-T.1]$ zakłada się metryzowalność przestrzeni X . W dowodzie punktów a) i b) założenie to nie jest istotne. Podamy teraz inny, nie wykorzystujący metryzowalności dowód własności c): Niech ε oznacza ten element S_φ , dla którego $T_\varepsilon = E$ (E -rzutowanie na $C_1(T)$, patrz §3). Ponieważ E jest idempotentem, więc ε jest retrakcją. Niech $f \in C(X)$. Z własności operatora E wynika, że $f \in C_0(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Ef = 0$. Z Twierdzenia 3 i następującego po nim lemacie w $[S.R.2]$ wynika dalej, że $f \in C_0(T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{M_\varphi^1} = 0$. Łatwą konsekwencją tych równoważności jest równość $M_\varphi^1 = \varepsilon(X)$.

Przypomnieć warto, że ponieważ słaba prawie okresowość implikuje jednostajną stabilność, więc w przypadku operatora

s.p.o., z punktu a) w Twierdzeniu 5.4. wynika, iż M_φ^1 pokrywa się z centrum M_φ (patrz §1). W dalszej części używać będziemy w tym przypadku oznaczenia " M_φ ".

Jeśli (X, φ) jest s.p.o. systemem nieprzywiedlnym, to $\xi = \text{id}_X$ i $K_\varphi (= \xi S_\varphi) = S_\varphi$ (K_φ oznacza ideał minimalny w S_φ , patrz §3). Jest więc oczywiste (zob. Przykład 5.2.), że grupą monotetyczną, o której mowa w Tw. 5.5. jest S_φ . Z Twierdzenia 3.1. (a także z Tw. 10.5. w rozdz. III, [S.H.H.]) wiadomo, że grupa ta jest dualna do $\sigma_p(\varphi)$.

Twierdzenie 5.6. Dla każdej podgrupy H torusa Γ istnieje nieprzywiedlny, m.p.o. system (X, φ) taki, że $\sigma_p(\varphi) = H$.

Dowód. Jeśli H traktujemy jako grupę dyskretną, to wiadomo (Tw. 24.32 w [H.-R.]), że H jest zwartą grupą monotetyczną, generowaną przez charakter $\alpha = \text{id}_H$. Jak w Przykładzie 5.2., grupa ta wraz z translacją o element generujący α tworzy m.p.o. system nieprzywiedlny. Równość $\sigma_p(\varphi) = H$ wynika teraz z uwag poprzedzających sformułowanie tego twierdzenia i ze znanego twierdzenia Pontriagina o dualności ([P.L.S.]).

Nawiązując do twierdzenia Rosenblatta (patrz §3) warto odnotować następujący

Wniosek. Z Twierdzeń 3.3. i 3.5. wynika łatwo, że dla słabo prawie okresowego systemu (X, φ) $\sigma_p(\varphi) = \{1\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zbiory minimalne są jednoelementowe.

§6. Punkty powracające

Nadal interesować nas będą głównie systemy słabo prawie okresowe. Badać będziemy zbiór punktów powracających M_φ^2 przy różnych dodatkowych założeniach o systemie (X, Ψ) . Podamy również charakteryzację brzegu Foguela (patrz §2) dla dowolnych systemów (Tw. 6.2.).

Twierdzenie 6.1. ([D.T.]). Niech (X, Ψ) będzie systemem m.p.o. Wtedy $M_\varphi^2 = M_\varphi$.

Dowód. Uzasadnienia wymaga inkluzja $M_\varphi^2 \subset M_\varphi$. Przypuśćmy, że $x = \Psi(x)$ dla pewnego $x \in X$ i $\Psi \in S_\varphi$. Jeśli $\Psi = \varphi$, to $\{x\}$ jest zbiorem minimalnym i $x \in M_\varphi$. W przeciwnym wypadku $\Psi = \varphi\chi$ dla pewnego $\chi \in S_\varphi$. Co więcej, $\Psi\varphi^n(x) = \varphi^n\Psi(x) = \varphi^n(x)$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc z założenia m.p.o., $\Psi|S_\varphi^0(x)$ jest identycznością na $S_\varphi^0(x)$. Zatem $\chi|S_\varphi^0(x) = [\Psi|S_\varphi^0(x)]^{-1}$. Rodzina S_φ jest, z założenia, jednako ciągła, z czego łatwo wywnioskować, że $S_\varphi|S_\varphi^0(x)$ jest grupą. Wobec tego $\Psi|S_\varphi^0(x) = \varepsilon|S_\varphi^0(x)$, jako jodyny idempotent w grupie. Stąd $x = \varepsilon(x)$ i $x \in M_\varphi$, na mocy uwagi po Tw. 5.5.

Opuśćmy na chwilę założenie o słabej prawie okresowości systemu (X, Ψ) . Przez $\tilde{S}_\varphi$ oznaczmy (jak w [D.T.]) zbiór punktów skupienia ciągu Ψ^n w topologii zbieżności punktowej. Oczywiście $\tilde{S}_\varphi \subset S_\varphi$. Elementy przestrzeni X postaci $\Psi(x)$, ($\Psi \in \tilde{S}_\varphi$, $x \in X$) nazywać będziemy punktami granicznymi. Oczywiście każdy punkt skupienia orbity $S_\varphi^0(x)$ jest punktem granicznym, ale nie odwrotnie.

Twierdzenie 6.2. ([D.T.]). Niech $\Psi: X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Brzeg Foguela operatora T_Ψ jest równy domknięciu zbioru punktów granicznych:

$$F_\Psi = \{\Psi(x) : x \in X, \Psi \in \tilde{S}_\Psi\}^-.$$

Dowód. Oznaczmy przez F_1 zbiór po prawej stronie. Niech $y \notin F_1$ i $U \ni y$ niech będzie zbiorem otwartym, takim że $\bar{U} \cap F_1 = \emptyset$. Funkcja

$$g = 1 \bigcup_{k=0}^{\infty} \Psi^{-k}(U)$$

jest dolnie półciągła i podnieżmiennicza. Przypuśćmy, że istnieje $x \in X$ taki, że $g(\Psi^{n'}(x)) = 1$ dla pewnego podnetu n' liczb naturalnych. Oznacza to, że $\Psi^{n'}(x) \in \Psi^{-k'}(U)$ dla odpowiednich liczb k' i w rezultacie, że $\Psi^{n'+k'}(x) \in U$. Ale net $n'+k' \rightarrow \infty$. Można więc wybrać jego podnet n_α taki, że $\Psi^{n_\alpha} \rightarrow \Psi \in \tilde{S}_\Psi$. Wtedy $\Psi(x) \in F_1$ z definicji zbioru F_1 . Z drugiej strony $\Psi(x) \in \bar{U}$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że $g \downarrow 0$. Ponieważ $g(y) = 1$, więc $y \notin F_\Psi$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $F_\Psi \subset F_1$. Przeciwna inkluzja jest natychmiastowa; zauważyć trzeba tylko, że jeśli h jest dolnie półciągłą funkcją spełniającą $h \Psi^n \rightarrow 0$, to h zeruje się na wszystkich punktach granicznych.

Uwaga 1. Jest teraz oczywiste, że $M_\Psi^2 \subset F_\Psi$.

Uwaga 2. Zbiór wszystkich punktów granicznych nie zawsze jest domknięty (Przykład 7.4.).

Twierdzenie 6.3. ([D.T.]). Słabo prawie okresowy system (X, Ψ) jest konserwatywny wtedy i tylko wtedy, gdy punkty powracające leżą gęsto w X , czyli gdy $M_\Psi^2 = X$.

Dowód. Implikacja " $\Leftarrow$ " jest natychmiastową konsekwencją Tw. 6.2. Dla udowodnienia implikacji przeciwnej określimy, dla zadanego niepustego zbioru otwartego V_1 , dolnie półciągłą funkcję podniezmienniczą

$$g_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Psi^{-k}(V_1)$$

Z założenia konserwatywności wynika, że zbiór $\{g_1(\Psi(x)) \neq g_1(x)\}$ jest pierwszej kategorii (patrz §2). Istnieje więc w V_1 punkt x_1 taki, że $g_1(\Psi(x_1)) = g_1(x_1) = 1$. Dla pewnego $i_1 \geq 1$ mamy $x_1 \in \Psi^{-i_1}(V_1)$, więc istnieje otoczenie $V_2 \ni x_1$ takie, że $\bar{V}_2 \subset V_1$ oraz $\Psi^{i_1}(V_2) \subset V_1$. Analogicznie, zastępując V_1 przez V_2 , konstruujemy g_2 , wybieramy x_2 , i_2 oraz znajdujemy V_3 . Przez indukcję otrzymamy ciąg liczb $i_n \geq 1$ oraz ciąg niepustych zbiorów otwartych V_n , takich że $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$, oraz że $\Psi^{i_n}(V_{n+1}) \subset V_n$. Zbiór $V_\infty = \bigcap V_n$ po $n = 1, 2, \dots$ jest niepusty, domknięty i $\Psi^{i_n}(V_\infty) \subset V_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Można wybrać podciąg i_α z i_n , dla którego $\Psi^{i_\alpha} \rightarrow \Psi \in S_\Psi$. Z założenia s.p.o. wynika, że Ψ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponieważ, jak łatwo widać, V_∞ jest zbiorem Ψ -niezmienniczym, zatem $V_\infty \cap M_\Psi^1 \neq \emptyset$. Stąd w V_1 istnieje punkt Ψ -jednostajnie powracający, a przez to Ψ -powracający.

Uwaga. Dla przestrzeni metrycznych Tw. 6.3. jest prawdziwe bez założenia s.p.o.: Można wybierać zbiory V_n tak, aby ich

Średnice malały do zera. Wtedy V_∞ jest punktem Ψ -niezmienniczym, a więc Ψ -powracającym i ciągłość Ψ nie jest konieczna.

Nasuują się dwa pytania: czy założenie s.p.o. można pominąć również w przypadku niemetryzowalnym oraz czy zbiór M_Ψ^2 jest domknięty dla systemów s.p.o. (Bez założenia s.p.o. odpowiedź jest oczywiście negatywna. Świadczy o tym Przykład 4.1.). Z dalszych twierdzeń wynikać będzie, że dla wielu ważnych typów przestrzeni zbiór ten istotnie jest domknięty i pokrywa się z centrum.

Podobnie jak w dynamice topologicznej system (X, φ) , dla którego istnieje punkt $x \in X$ taki, że $X = S_\varphi^0(x)$, nazywać będziemy systemem tranzytywnym, a x - punktem tranzytywnym systemu (X, φ) . Na przykład systemy nieprzywiedlne są tranzytywne. Jeśli x jest punktem tranzytywnym systemu s.p.o. (X, φ) , to przyporządkowanie $S_\varphi \ni \Psi \rightarrow \Psi(x) \in X$ jest homeomorfizmem. Jak zauważono w [M.-S.-T.1] M_φ składa się wtedy z pojedynczego zbioru minimalnego (odpowiadającego K_φ).

Lemat 6.4. ([D.T.]) . Niech (X, φ) będzie s.p.o. systemem tranzytywnym, takim że istnieje powracający punkt tranzytywny $x \in X$. Wtedy $M_\varphi^2 = X$ i φ jest homeomorfizmem.

Dowód. Z założeń wiemy, że $x = \Psi(x)$ dla pewnego $\Psi \in S_\varphi$. Wtedy Ψ jest identycznością na $X = S_\varphi^0(x)$, zatem każdy punkt z X jest powracający. Ponadto $\varphi = \lim \varphi^{n_\alpha}$ dla pewnego netu n_α liczb naturalnych. Niech φ^{-1} oznacza punkt skupienia netu $\varphi^{n_\alpha - 1}$.

Ponieważ φ^{-1} jest ciągle jako element S_φ i $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \Psi$,
więc φ jest homeomorfizmem.

Lemat 6.5. ([D.T.]). Niech (X, φ) będzie dowolnym systemem
i $U \subset X$ zbiorem otwarto - domkniętym zawierającym M_φ^1 . Wtedy
dla każdego $x \in U^c$ (o ile taki istnieje) zbiór $S_\varphi^0(x)$ zawiera
punkt niepowracający.

Dowód. Przypuśćmy, że x jest powracający. Z niezmienniczości
 $S_\varphi^0(x) \cap M_\varphi^1 \neq \emptyset$. Tym bardziej $S_\varphi^0(x)$ nie jest rozłączny z U .
Co więcej, nietrudno wykazać, że dla każdego n naturalnego
istnieje $k(n)$ takie, że $\varphi^{k(n)}(x) \in U^c$, $\varphi^{k(n)+1}(x) \in U$ dla
 $i = 1, 2, \dots, n$. Niech y będzie punktem skupienia ciągu
 $\varphi^{k(n)}(x)$. Mamy teraz $y \in U^c$ oraz $\varphi^i(y) \in \bar{U} = U$ dla $i = 1, 2, \dots$,
a zatem y nie jest powracający.

Twierdzenie 6.6. ([D.T.], zob. też Tw. 3 w [G.W.H.]).
Niech X będzie zwartą przestrzenią zerowymiarową. Wtedy dla
każdego systemu s.p.o. (X, φ) mamy $M_\varphi^2 = M_\varphi$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje $x \in M_\varphi^2 \setminus M_\varphi$. Rozpatrzmy
system tranzytywny $(S_\varphi^0(x), \varphi)$. Z założenia s.p.o. $M_\varphi^1 = M_\varphi$
jest zbiorem domkniętym i można stosować Lemat 6.5. Z drugiej
strony zastosowanie Lematu 6.4. do tegoż systemu prowadzi do
sprzeczności.

Uwaga. Dla systemów s.p.o. warunek $M_\varphi^2 = M_\varphi$ jest równoważny
z warunkiem $M_\varphi = M_\psi$ dla każdego $\psi \in S_\varphi$.

Lemat 6.7. Niech (X, φ) będzie systemem s.p.o. i niech $x \in M_\varphi^2 \setminus M_\varphi$. Wtedy w $S_\varphi^0(x)$ istnieje punkt $y \in M_\varphi^2 \setminus M_\varphi$ taki, że $S_\varphi^0(y)$ jest zbiorem brzegowym w X .

Dowód. Niech $U \supset M_\varphi$ będzie zbiorem otwartym, takim że $\bar{U} \neq x$. Podobnie jak w dowodzie Lematu 6.5. w zbiorze $S_\varphi^0(x)$ znajdziemy punkt y o tej własności, że $y \in U^0$ (czyli $y \notin M_\varphi$) oraz $\varphi^i(y) \in U$ dla $i = 1, 2, \dots$. Z Lematu 6.4. wynika, że $y \in M_\varphi^2$. Ponieważ x jest powracający, to dla każdego n naturalnego $x \in S_\varphi^0(\varphi^n(x))$. Zatem jeśli dla pewnego n $\varphi^n(x) \in S_\varphi^0(y)$, to również $x \in S_\varphi^0(y) \subset U$. Sprzeczność ta dowodzi, że $\varphi^n(x) \notin S_\varphi^0(y)$ dla wszystkich n , a co za tym idzie $S_\varphi^0(y)$ jest podzbiorem brzegowym w $S_\varphi^0(x)$, przez co tym bardziej w X .

Twierdzenie 6.8. Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną o tej własności, że każdy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych B_n , takich że B_{n+1} jest brzegowy w B_n dla wszystkich n , ma co najwyżej skończenie wiele wyrazów niezerowymiarowych. Wtedy dla każdego systemu s.p.o. (X, φ) mamy $M_\varphi^2 = M_\varphi$.

Dowód. Wynika to nie wprost (indukcyjnie) z Lematu 6.7. i Tw. 6.6.

Uwaga. Przykładami przestrzeni spełniających założenia Tw. 6.8. są skończone sumy łuków, w tym grafy skończone.

§7. Przykłady

Na wstępie tego paragrafu podamy lemat, który ułatwić będzie sprawdzenie s.p.o. w większości przykładów.

Lemat 7.1. ([D.T.]). Niech (X, Ψ) będzie systemem tranzytywnym. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- i) (X, Ψ) jest s.p.o.,
- ii) S_Ψ jest półgrupą przemenną,
- iii) dla pewnego punktu tranzytywnego x
 $\Psi_1 \Psi_2(x) = \Psi_2 \Psi_1(x)$ dla wszystkich $\Psi_1, \Psi_2 \in S_\Psi$.

Dowód. Uzasadnienia wymaga jedynie implikacja $\text{iii}) \Rightarrow \text{i})$:
Niech $\Psi_1 \in S_\Psi$ i niech net $y_\alpha = \Psi_\alpha(x) \rightarrow y$ w X , $\Psi_\alpha \in S_\Psi$. Wybieramy podnet α' taki, że $\Psi_{\alpha'} \rightarrow \Psi_2 \in S_\Psi$. Mamy $\Psi_2(x) = y$. Dalej
 $\Psi_1(y_{\alpha'}) = \Psi_1 \Psi_{\alpha'}(x) = \Psi_{\alpha'} \Psi_1(x)$ z $\text{iii})$, zatem
 $\Psi_1(y_{\alpha'}) \rightarrow \Psi_2 \Psi_1(x) = \Psi_1 \Psi_2(x) = \Psi_1(y)$. W ten sposób udowodniliśmy ciągłość Ψ_1 , więc i s.p.o. systemu (X, Ψ) .

Do konstrukcji niektórych dalszych przykładów wykorzystamy następujący

Przykład 7.2. ([S.R.2]). Niech Ψ będzie przesunięciem w lewo na zbiorze Cantora (Przykłady 4.1., 4.2.). Niech $X = S_\Psi^0(p)$, gdzie $p = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$. Dla systemu (X, Ψ) mamy

$M_\varphi^1 = \{(0,0,0,\dots)\}$. Brzeg Foguela F_φ jest, na mocy Tw. 6.2., zbiorem wszystkich ciągów z co najwyżej jedną jedynką. Idea dowodu s.p.o. zastosowana w [S.R.2] posłużyła do sformułowania Lematu 7.1. Nie ma miejsca zbieżność iteracji φ^n , chociaż $\sigma_p(\varphi) = \{1\}$. Zbieżność ta jednak zachodzi na F_φ .

W podobny sposób skonstruujemy teraz system ilustrujący, że w twierdzeniu Rosenblatta, nawet dla przestrzeni zerowymiarowych, zbieżność iteracji φ^n na F_φ nie jest zagwarantowana.

Przykład 7.3. ([D.T.]). Niech $X = S_\varphi^0(q)$, gdzie φ jest przesunięciem w lewo na zbiorze Cantora oraz q jest ciągiem zdefiniowanym następująco:

$$p = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,\dots) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

$$q = (\alpha_0, 0, 0, \alpha_0, \alpha_1, 0, 0, 0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 0, 0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, \dots)$$

Aby wykazać s.p.o. systemu (X, φ) zauważmy najpierw, że jeśli $Y = S_\varphi^0(p)$, to (Y, φ) jest s.p.o. systemem opisanym w Przykładzie 7.2. i jedynymi jego punktami granicznymi są ciągi z co najwyżej jedną jedynką. Ciąg q jest tak dobrany, że jedynka występuje w p na tych samych miejscach, co α_0 w q . Stąd $\varphi^{n'}(p) \rightarrow (1,0,0,0,\dots)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{n'}(q) \rightarrow p$ dla podnetów n' liczb naturalnych. Podobnie argumentując uzyskamy:

$$1) \quad \lim \varphi^{n'}(q) = p_t \iff \lim \varphi^{n'}(p) = (\overbrace{0,0,\dots,0}^t, 1,0,0,0,\dots),$$

$$\text{gdzie } p_t = (\overbrace{0,0,\dots,0}^t, 1,0,0,1,0,0,0,0,1,\dots), \quad t = 1, 2, \dots$$

$$2) \quad \lim \varphi^{n'}(q) = (0,0,0,\dots) \text{ lub } (0,0,\dots,0,1,0,0,0,\dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim \varphi^{n'}(p) = (0,0,0,\dots)$$

$$3) \quad \lim \varphi^{n'}(q) = \varphi^t(p) \Leftrightarrow \lim \varphi^{n'-t}(q) = p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim \varphi^{n'-t}(p) = (1,0,0,0,\dots), \quad t = 1, 2, \dots$$

Niezbyt trudny rachunek pozwala ponadto wykazać, że

$$4) \quad \text{zbiór wszystkich punktów granicznych jest równy} \\ Y \cup \{p_t: t = 1, 2, \dots\}.$$

Z faktów 1) - 4) wynika dalej, że

$X = Y \cup \{p_t: t = 1, 2, \dots\} \cup \{\varphi^n(q): n = 1, 2, \dots\}$ oraz że $\varphi^{n'}$ są zbieżne do pewnego $\Psi \in S_\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi^{n'}(q)$ jest ciągiem zbieżnym. Wobec tego w miejsce podnetów iteracji wystarczy rozpatrywać podciągi. Aby móc stosować Lemat 7.1., wystarczy teraz wykazać, że dla dowolnej pary podciągów iteracji $\varphi^{m'}$, $\varphi^{n'}$ zbieżnych w punkcie q granice iterowane ciągu podwójnego $\varphi^{m'+n'}(q)$ są sobie równe. Rozpatrzmy cztery przypadki:

a) jedna z granic, powiedzmy, $\lim \varphi^{n'}(q)$ jest ciągiem z oo najwyżej jedną jedynką,

granice $\lim \varphi^{m'}(q)$ i $\lim \varphi^{n'}(q)$ wynoszą odpowiednio

$$b) \quad \varphi^s(p), \varphi^t(p), \quad (s, t \geq 0)$$

$$c) \quad p_s, p_t, \quad (s, t \geq 1)$$

$$d) \quad p_s, \varphi^t(p), \quad (s \geq 1, t \geq 0)$$

W przypadku a) mamy $\lim_{m'} \lim_{n'} \varphi^{m'+n'}(q) = (0,0,0,\dots)$

Z drugiej strony, na mocy 2), $\lim \varphi^n(p) = 0$ i stąd, ponieważ (Y, φ) jest s.p.o., $\varphi^{n'}$ dąży do $(0,0,0,\dots)$ na całym Y . Punkt $\lim \varphi^{m'}(q)$ jest punktem granicznym. Jeśli jest on w Y , to żądana równość zachodzi, jeśli nie, to jest on typu p_s ($s \geq 1$), na mocy 4). Wtedy $\lim \varphi^{n'-s}(q)$ jest nadal ciągiem z co najwyżej jedną jedynką oraz

$$\begin{aligned} \lim_{n'} \lim_{m'} \varphi^{n'+m'}(q) &= \lim_{n'} \lim_{m'} \varphi^{(n'-s)+(m'+s)}(q) = \\ &= \lim_{n'} \varphi^{(n'-s)}(p) = 0 \text{ (z 2))}. \end{aligned}$$

Pominiemy podobne argumentacje dla b), c) i d), w których wykorzystuje się odpowiednio 3), 1) i 3).

Dla systemu tego $M_\varphi = \{0\}$ oraz $\mathcal{G}_p(\varphi) = \{1\}$. Brzeg Foguela opisany jest w 4). Widać, że zbieżność φ^n na F_φ nie zachodzi. Zauważmy również, że system (F_φ, φ) nie jest konserwatywny. (Z Tw. 6.3. i 6.6. wynika, że zerowymiarowy system s.p.o. jest konserwatywny wtedy i tylko wtedy, gdy $M_\varphi = X$).

Następny przykład dotyczy Uwagi 2 po Tw. 6.2.

Przykład 7.4. Niech (X_1, φ) będzie systemem opisanym w Przykładzie 7.2. i niech $X_2 = N \cup \{\infty\}$. Odwzorowanie φ przedłużamy na $X_3 = X_1 \times X_2$ wzorem $\varphi(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), x_2)$. Niech

$$X = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} S^0(\varphi^n(p), n) \right]^-$$

System (X_3, Ψ) , więc i (X, Ψ) , jest s.p.o. Brzeg Foguela systemu (X, Ψ) jest równy iloczynowi brzegu Foguela systemu (X_1, Ψ) (patrz Przykład 7.2.) przez X_2 . Jednakże jego elementy z drugą współrzędną ∞ , (poza punktem $((0,0,0,\dots), \infty)$), nie są punktami granicznymi.

Inny podsystem przesunięcia w lewo na zbiorze Cantora pozwoli ocenić przydatność niektórych poprzednich twierdzeń do badania omawianych wcześniej własności:

Przykład 7.5. Niech

$$\begin{aligned} p_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots) \\ p_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots) = (\alpha_{11}, 0, \dots, 0, \alpha_{11}, \alpha_{12}, 0, \dots, 0, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, 0, \dots) \\ p_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \dots) = (\alpha_{21}, 0, \dots, 0, \alpha_{21}, \alpha_{22}, 0, \dots, 0, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, 0, \dots) \\ &\text{itd.,} \end{aligned}$$

gdzie bloki zer mogą być dowolnej (w tym zerowej) długości. Niech

$$X = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\Psi}^0(p_i) \right]^{-}$$

Każdy punkt $\Psi^n(p_i)$, ($n \geq 0$, $i \geq 1$) jest punktem granicznym (dla punktu p_{i+1}). Na mocy Tw. 6.2. (X, Ψ) jest systemem konserwatywnym, zaś z Tw. 6.3. (wersja dla przestrzeni metryzowalnych), M_{Ψ}^2 leży gęsto w X . Gdyby (X, Ψ) był s.p.o., to z zerowymiarowości X i Tw. 6.6. M_{Ψ}^2 byłby zbiorem domkniętym, więc równym X . Jednak X zawiera punkty niepowracające (np. p_1). Bezpośrednie wykazanie, że punkty powracające leżą gęsto w X nie wydaje się być łatwe.

Główny przykład tej pracy, który teraz podamy, służy wykazaniu, że równość $M_\varphi^2 = M_\varphi$ dla systemów słabo prawie okresowych nie jest prawidłowością ogólną. Największą trudność stanowi i tym razem sprawdzenie s.p.o.

Przykład 7.6. ([D.T.]). Niech φ będzie przesunięciem w lewo na kostce Hilberta $[0,1]^N$, tzn. $\varphi(z_1, z_2, \dots) = (z_2, z_3, \dots)$. Wybierzemy pewien element $a \in [0,1]^N$ i zdefiniujemy X jako $S_\varphi^0(a)$. Niech $0 < \alpha_m < 1$ i $\prod_{m=0}^\infty \alpha_m > 0$ (więc $\alpha_m \rightarrow 1$). Istnieje ciąg liczb naturalnych $w_m \geq 2$ spełniający $\alpha_m^{w_m} \rightarrow 0$. Niech

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, \alpha_1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^{w_1}, \alpha_1^{w_1-1}, \dots, \alpha_1, 1, \alpha_1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^{w_1}, \alpha_1^{w_1-1}, \dots, \alpha_1, 1, \dots) \\ a_2 &= (1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_2, \alpha_2^2, \dots) \\ &\text{itd.,} \end{aligned}$$

tak, że każdy $a_m \in [0,1]^N$ jest ciągiem okresowym o okresie $o_m = 2^{w_m} o_{m-1}$, a_m jest stały na blokach długości o_{m-1} i przyjmuje wartości kolejno: $1, \alpha_m, \alpha_m^2, \dots, \alpha_m^{w_m}, \alpha_m^{w_m-1}, \dots, \alpha_m$. Niech

$$a = \prod_{m=1}^\infty a_m \text{ (mnożone po współrzędnych)}$$

Oczywiście $a > 0$ na każdej współrzędnej. Nietrudno też zauważyć, że a jest powracający, lecz nie jednostajnie powracający; element zerowy w $[0,1]^N$ (oznaczany odtąd przez 0) należy do $S_\varphi^0(a)$, stąd $S_\varphi^0(a)$ nie jest zbiorem minimalnym. System (X, φ) jest z definicji tranzytywny. Dla udowodnienia s.p.o. sprawdzać będziemy warunek iii) z Lematu 7.1. Niech $x \in X$. Wtedy, z metryzowalności X , $x = \lim \varphi^{n_k}(a)$. Metodą przekątniową można wybrać

podciąg n_k tak, aby:

1) $n_k = n_m \pmod{o_m}$ dla $k \geq m$ (oznaczmy $p_m = (n_m)_{o_m}$ - resztę z dzielenia n_m przez o_m),

2) $r_k = \prod_{m=k+1}^{\infty} \psi^{n_k}(a_m)$ było zbieżne przy $k \rightarrow \infty$ na każdej współrzędnej. Element graniczny oznaczmy przez r .

Oczywiście

3) $0 \leq p_m \leq o_m$ oraz $p_m = p_{m-1} \pmod{o_m}$

Mamy teraz $\psi^{n_k}(a_m) = \psi^{p_m}(a_m)$ dla $k \geq m$, a zatem

$$\psi^{n_k}(a) = \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{n_k}(a_m) = \prod_{m=1}^k \psi^{p_m}(a_m) \cdot r_k$$

Ponieważ pierwszy czynnik po prawej stronie maleje monotonicznie, gdy k rośnie, przeto $x = \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{p_m}(a_m) \cdot r$. Pokażemy, że r jest ciągiem stałym (tzn. $r = (\varphi, \varphi, \varphi, \dots)$). Pokażemy nawet więcej: jeśli q_m i n_k są takimi ciągami liczb naturalnych, że granica r' ciągu $r'_k = \prod_{m=k+1}^{\infty} \psi^{n_k + q_m}(a_m)$ istnieje, to r' jest ciągiem stałym. Wynika to mianowicie z faktu, że stosunek dwóch dowolnych sąsiadujących współrzędnych ciągu r'_k jest zawarty w przedziale $\left[\prod_{m=k+1}^{\infty} \alpha_m, \prod_{m=k+1}^{\infty} \alpha_m^{-1} \right]$ zbieżnego do $\{1\}$. W ten sposób opisaliśmy punkty przestrzeni X ; są one postaci $x = \varphi \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{p_m}(a_m)$ gdzie φ jest współczynnikiem z przedziału $[0, 1]$, a liczby p_m spełniają 3). Co więcej, jeśli $x \neq 0$, to wszystkie jego współrzędne są niezerowe i powyższa reprezentacja jest jedyna.

Pierwsze stwierdzenie wynika z faktu, że stosunek dwóch sąsiednich współrzędnych w x zawarty jest w przedziale $\left[\prod_{m=1}^{\infty} \alpha_m, \prod_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-1} \right]$ nie zawierającym zera i ograniczonym. Dla udowodnienia jedyności reprezentacji przypuśćmy, że $\varphi \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{p_m}(a_m) = \varphi' \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{p'_m}(a_m)$. Niech m_0 oznacza najmniejszą liczbę m , dla której $p_m \neq p'_m$. Mamy wtedy $\varphi \cdot \prod_{m=m_0}^{\infty} \psi^{p_m}(a_m) = \varphi' \cdot \prod_{m=m_0}^{\infty} \psi^{p'_m}(a_m)$. Jednak zauważmy, że w ciągu po lewej stronie blok długości o_{m_0-1} , na którym ciąg $\psi^{p_{m_0}}(a_{m_0})$ przyjmuje wartość $\alpha_{m_0}^{w_0}$, ma wartości mniejsze niż obydwa sąsiednie bloki (z założenia $w_m \geq 2$, wszystkie dalsze ciągi $\psi^{p_m}(a_m)$ dla $m > m_0$ są stałe na tych trzech blokach). Skoro $p_{m_0} \neq p'_{m_0}$, to $\psi^{p'_{m_0}}(a_{m_0})$ przyjmuje na tych samych miejscach inną wartość, a co za tym idzie, jeden z sąsiednich bloków ciągu po prawej stronie ma wartości mniejsze niż blok środkowy. Sprzeczność ta dowodzi, że $p_m = p'_m$ dla wszystkich $m \geq 1$ i w konsekwencji $\varphi = \varphi'$. Niech teraz $\Psi \in S_{\varphi}$ i $0 \neq x \in X$, $x = \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \psi^{p_m}(a_m)$. Z metryzowalności i zwartości X , istnieje podciąg iteracji φ^{n_k} taki, że $\varphi^{n_k}(a) \rightarrow \Psi(a)$, $\varphi^{n_k}(x) \rightarrow \Psi(x)$, i dla którego zachodzą 1), 2) oraz następujący warunek

2') $r'_k = \prod_{m=k+1}^{\infty} \psi^{q_m+n_k}(a_m)$ jest zbieżne na każdej współrzędnej, gdy $k \rightarrow \infty$.

Element graniczny r' jest, jak już wykazywaliśmy ciągiem stałym $(r' = (\varphi', \varphi', \varphi', \dots))$.

Mamy teraz

$$\varphi^{n_k}(x) = \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{q_m+n_k}(a_m) = \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^k \varphi^{q_m+p_m}(a_m) \cdot r'$$

Zatem $\Psi(x) = \varphi' \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{q_m+p_m}(a_m)$ i, jak poprzednio

$\Psi(a) = \varphi \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{p_m}(a_m)$. Pokażemy teraz, że $\varphi = \varphi'$. Najpierw trzeba zauważyć, że każdy a_m ma następującą własność: dla dowolnej pary liczb naturalnych i, j

$$\frac{a_m(i)}{a_m(0)} \leq \frac{a_m(i+j)}{a_m(j)} \leq \frac{a_m(0)}{a_m(i)}$$

gdzie $a_m(i)$ oznacza $i+1$ -szą współrzędną a_m ($a_m(0) = 1$).

Ponieważ $\prod_{m=1}^{\infty} a_m(q_m) = \varphi_x^{-1} \cdot x(0) \neq 0$, więc $\prod_{m=k+1}^{\infty} a_m(q_m) \rightarrow 1$, gdy $k \rightarrow \infty$. Stąd i z powyższych nierówności wynika, że

$$\frac{\prod_{m=k+1}^{\infty} a_m(q_m+n_k)}{\prod_{m=k+1}^{\infty} a_m(n_k)} \rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = 1, \text{ gdy } k \rightarrow \infty$$

Z jedyności reprezentacji elementów niezerowych przestrzeni X wynika teraz, że każde $\Psi \in S_{\varphi}$, które na elemencie a przyjmuje wartość różną od 0, ma postać $\Psi = \varphi \cdot \Psi_p$, gdzie $\varphi \in [0, 1]$ i Ψ_p jest zdefiniowane na X dla $p = (p_1, p_2, \dots)$ spełniającego 3) wzorem

$$4) \quad \Psi_p(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x = 0 \\ \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{q_m+p_m}(a_m), & \text{jeśli } x = \varphi_x \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{q_m}(a_m) \neq 0 \end{cases}$$

Oczywiście w wykładniku $q_m + p_m$ można zastąpić przez $(q_m + p_m)_{o_m}$. Ponadto, dla każdego takiego p , ciąg $\varphi^{p_m}(a)$ jest zbieżny do $\Psi_p(a)$, a stąd, o ile tylko $\Psi_p(a) \neq 0$, mamy $\varphi^{p_m} \rightarrow \Psi_p$ (każdy zbieżny podnet ciągu iteracji φ^{p_m} ma tę samą granicę). Zatem $\Psi_p \in S_\varphi$. Ze wzoru 4) wynika żądany warunek $\Psi_1 \Psi_2(a) = \Psi_2 \Psi_1(a)$ dla $\Psi_1, \Psi_2 \in S_\varphi$, które na a przyjmują wartość różną od 0. To samo spełniają również (trywialnie) odwzorowania zerujące się na a . Pozostał przypadek, gdy $\Psi_1(a) \neq 0 = \Psi_2(a)$. Mamy wtedy $\Psi_1 = \varphi \cdot \Psi_p$, dla odpowiednich φ i p . Zdefiniujmy

$$p'_m = \begin{cases} o_m - p_m, & p_m \neq 0 \\ 0, & p_m = 0 \end{cases}$$

Ponieważ $p' = (p'_1, p'_2, \dots)$ spełnia 3), więc $\Psi_{p'} \in S_\varphi$. Co więcej $\Psi_{p'}(a)$ i $\Psi_p(a)$ przyjmują, co łatwo spostrzeć, identyczną wartość na pierwszej współrzędnej. Tak więc $\Psi_{p'}(a) \neq 0$. Mamy też $\Psi_p \Psi_{p'}(a) = \prod_{m=1}^{\infty} \varphi^{o_m}(a_m) = a (\neq 0)$. Przypuśćmy teraz, że $\Psi_1 \Psi_2(a) \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \Psi_2 \Psi_1(a) &= \Psi_2 \Psi_1(\Psi_p \Psi_{p'}(a)) = \Psi_p \Psi_{p'}(\Psi_2 \Psi_1(a)) = \Psi_p(\Psi_2 \Psi_1) \Psi_{p'}(a) = \\ &= \Psi_p \Psi_2(\varphi \cdot \Psi_p) \Psi_{p'}(a) = \varphi \cdot \Psi_p \Psi_2(a) = 0 \end{aligned}$$

Druga i trzecia równość wynikają z komutowania na a odwzorowań nie zerujących się na a . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\Psi_2 \Psi_1(a) = 0 = \Psi_1 \Psi_2(a)$, gdzie ostatnia równość jest oczywista. Zastosowanie Lematu 7.1. prowadzi do wniosku, że (X, φ) jest s.p.o.

W przykładzie tym łatwo zauważyć, że $M_\varphi = \{0\}$, więc $\zeta_p(\varphi) = \{1\}$. Na mocy Lematu 6.4. $M_\varphi^2 = X$, więc (X, φ) jest

konserwatywny. Pomimo tego ciąg φ^n nie jest zbieżny.

Uwaga 1. Udowodnione tu istnienie systemu s.p.o. (X, φ) takiego, że $M_\varphi^2 \neq M_\varphi$, jest równoważne z istnieniem półgrupy monotetycznej zwartej $S = \{a^n : n = 1, 2, \dots\}^-$, z jednością e , nie będącej grupą: Mając półgrupę S o żądanych własnościach system (X, φ) uzyskamy jako translację na S o element generujący a . S_φ składa się wtedy z translacji o elementy z S , więc z odwzorowań ciągłych (s.p.o.). Jedność $e \in S_\varphi^0(a)$, a ponieważ nie jest ona równa a , więc należy do $S_\varphi(a)$. Wtedy $a = \varphi(e) \in S_\varphi(a)$ i $a \in M_\varphi^2$. Gdyby $a \in M_\varphi$, to z Tw. 5.4. i 5.5. wynikałoby, że S jest grupą. Na odwrót, mając żądany system (X, φ) półgrupę S stanowi $S_\varphi | S_\varphi^0(x)$, gdzie $x \in M_\varphi^2 \setminus M_\varphi$. Zawieranie jedności, jaką jest odwzorowanie identycznościowe wynika z rozumowań przeprowadzonych w dowodzie Lematu 6.4., gdyby zaś $S_\varphi | S_\varphi^0(x)$ była grupą, to podobnie jak w dowodzie Tw. 6.1. wykazalibyśmy, że $x \in M_\varphi$.

Uwaga 2. Przykład 7.6. ilustruje też, że w Tw. 6.8. nie można zastąpić warunków nałożonych na przestrzeń żadnym ograniczeniem wymiaru topologicznego. Pokażemy mianowicie, że przestrzeń X z tego przykładu jest jednowymiarowa:

Zbiór P ciągów $p = (p_1, p_2, \dots)$ spełniających 3) można wzajemnie jednoznacznie odwzorować na zbiór ciągów $(x_1, x_2, \dots)$ liczb naturalnych, takich że $0 \leq x_m \leq 2w_m$. Zależność ustala wzór rekurencyjny $p_1 = x_1$, $p_m = p_{m-1} + x_m o_m$, ($m > 1$). W zbiorze P określone jest działanie $(p + q)_m = (p_m + q_m) o_m$. Zbiór P stanowi z tym działaniem grupę zerowymiarową. (Grupa ta została

opisana w [H.-R.], 10.2, jako Δ_a , gdzie za a_n trzeba przyjąć $2w_{n+1}$). Ponieważ S_φ składa się z odwzorowań typu $\varphi \cdot \Psi_p$ i odwzorowania zerowego, to ze wzoru 4) wnioskujemy, że S_φ jest izomorficzna z jednopunktowym uzwarceniem półgrupy $(0,1] \times P$, ze zwykłym mnożeniem na pierwszej osi i pochłaniającym punktem uzwarzającym. Jednak izomorfizm ten nie jest ciągły: np. dla odwzorowań φ^n odpowiednie φ wynosi 1, a można nimi przybliżać również te odwzorowania z S_φ , dla których $\varphi < 1$.

Jeśli jednak przyporządkowanie z S_φ w jednopunktowe uzwarcenie zbioru $(0,1] \times P$ określimy wzorem $\varphi \cdot \Psi_p \rightarrow (d_p \varphi, p)$, gdzie d_p oznacza odległość w $[0,1]^N$ punktu $\Psi_p(a)$ od 0 , to będzie to, jak nietrudno sprawdzić, homeomorfizm. Dowodzi to w szczególności, że S_φ (a więc i X) jest przestrzenią topologiczną jednowymiarową. Bezpośrednie określenie działania półgrupowego na odpowiednim podzbiorze jednopunktowego uzwarcenia zbioru $(0,1] \times P$, z pominięciem całej konstrukcji na kostce Hilberta, tak aby otrzymać żądane własności, nie wydaje się by było łatwiejsze.

R O Z D Z I A Ł III

ODWZOROWANIA SŁABO PRAWIE OKRESOWE NA ROZMAITOŚCIACH

§8. Twierdzenia ogólne, przegląd znanych wyników

Oddzielnie rozpatruje się systemy dynamiczne na rozmaitościach topologicznych. Przestrzeń X nazywamy rozmaitością topologiczną n -wymiarową, jeśli każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie homeomorficzne bądź z $\mathbb{R}^n$, bądź z półprzestrzenią $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$. Zbiór punktów w X , dla których nie istnieje otoczenie homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$ nazywamy wtedy brzegiem rozmaitości i oznaczamy przez ∂X . Rozmaitość o brzegu pustym nazywamy rozmaitością bez brzegu, jeśli zaś brzeg jest niepusty, mówimy o rozmaitości z brzegiem. Brzeg rozmaitości n -wymiarowej jest rozmaitością wymiaru $n-1$ bez brzegu. Problematyką odwzorowań s.p.o. na zwartych rozmaitościach topologicznych zajmowali się J.Montgomery, R.Sine i E.Thomas ([M.-S.-T.1], [M.-S.-T.2]). Ich twierdzenia dotyczą zachowania się Ψ na centrum M_Ψ . W przypadku ogólnym, dla rozmaitości dowolnego wymiaru uzyskali oni następujące wyniki:

Twierdzenie 8.1.([M.-S.-T.1]). Niech (X, Ψ) będzie s.p.o. systemem na zwartej rozmaitości topologicznej n -wymiarowej.

Przypuśćmy, że F jest zbiorem minimalnym o wymiarze topologicznym k . Jeśli $k = n$ lub $n = 1$, to F jest rozłączną sumą skończenie wielu torusów k -wymiarowych.

Twierdzenie 8.2. ([M.-S.-T.1]). Niech (X, Ψ) będzie systemem s.p.o. na zwartej rozmaitości topologicznej bez brzegu i niech Ψ będzie różnowartościowe. Jeśli wnętrze M_Ψ jest niepuste, to $M_\Psi = X$ (i Ψ jest m.p.o.).

Twierdzenie 8.3. ([M.-S.-T.1]). Niech (X, Ψ) będzie systemem s.p.o. na zwartej rozmaitości topologicznej z brzegiem ∂X . Jeśli $\partial X \subset M_\Psi$, to $M_\Psi = X$.

W tej samej pracy autorzy stawiają pytanie o istnienie na zwartych rozmaitościach topologicznych systemów tranzytywnych, s.p.o., które nie są nieprzywiedlne. Ogólniej można spytać, czy dla s.p.o. systemów na rozmaitościach zwartych $M_\Psi = M_\Psi^2$. Jeśli bowiem dla s.p.o. systemu na rozmaitości zwartej X istnieje punkt tranzytywny, to jest on powracający, i na mocy Lematu 6.4. $M_\Psi^2 = X$. O ile więc $M_\Psi = M_\Psi^2$, to z tranzytywności wynika, że X jest zbiorem minimalnym. W Tw. 6.8. zawarta jest odpowiedź na tę ogólniejszą wersję pytania dla rozmaitości jednowymiarowych. Na pytanie Montgomery'ego, Sine'a i Thomasa, gdy X ma wymiar 2, odpowiemy negatywnie w §10.

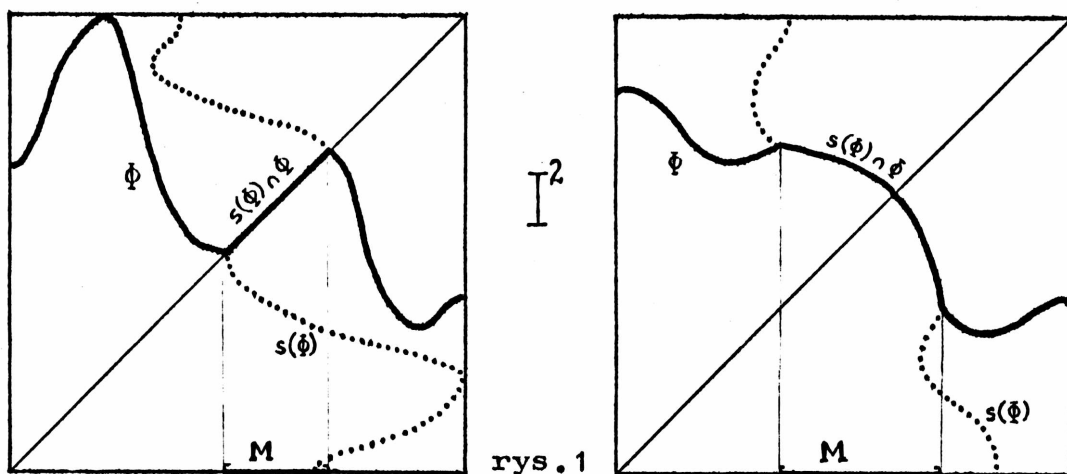
§9. Przypadek jednowymiarowy

Jedynymi (z dokładnością do homeomorfizmu) spójnymi rozmaitościami jednowymiarowymi są okrąg Γ i odcinek I . Jeśli X jest jedną z nich, a (X, φ) - systemem s.p.o., to na mocy Tw. 5.4. M_φ jest bądź całą przestrzenią X , bądź łukiem (odcinkiem bądź też punktem. W pierwszym przypadku, na okręgu, φ jest z dokładnością do homeomorfizmu (w skrócie: homeo) albo obrotem (w tym identycznością), albo odbiciem symetrycznym (tzn. istnieje wtedy homeomorfizm $\tau: X \rightarrow \Gamma$ taki, że $\tau\varphi\tau^{-1}$ ma opisaną wyżej postać). Fakt ten jest dobrze znany (np. [W.G.T.]). Na odcinku zaś, w tym przypadku, φ^2 jest odwzorowaniem identycznościowym ([M.-S.-T.1]). W [M.-S.-T.1], (Tw. 3.2) wykazano też, że jeśli X jest okręgiem, (X, φ) - systemem s.p.o. i M_φ - łukiem właściwym nie zredukowanym do punktu, to φ nie jest odwzorowaniem "na" i system (X, φ) jest m.p.o.

Podamy teraz pełną klasyfikację odwzorowań s.p.o. na odcinku i okręgu. Przez I^2 rozumiemy kwadrat kartezjański odcinka $I = [0, 1]$. Wykres odwzorowania ciągłego $\varphi: I \rightarrow I$ oznaczymy przez Φ ($\Phi \subset I^2$). Jeśli M jest podzbiorem φ -niezmien-
niczym odcinka I , to niech Φ_M oznacza wykres odwzorowania $\varphi|_M$ ($\Phi_M \subset M \times M$). Przekształcenie $s: I^2 \rightarrow I^2$ zdefiniujemy wzorem $s(x, y) = (y, x)$.

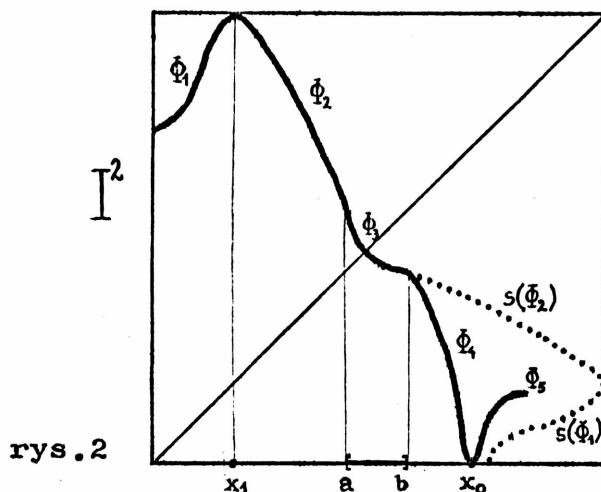
Twierdzenie 9.1. Niech $\varphi: I \rightarrow I$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Następujące warunki są równoważne:

- i) Ψ jest s.p.o.
- ii) zbiór $M = \{x \in I: \Psi^2(x) = x\}$ jest spójny
- iii) $s(\Phi) \cap \Phi$ jest zbiorem spójnym (rys. 1)
- iv) Ψ^{2n} jest zbieżne jednostajnie
- v) Ψ jest m.p.o.



Dowód. Załóżmy i). Centrum M_Ψ jest odcinkiem, bądź punktem i $\Psi^2|_{M_\Psi}$ jest identycznością. Zatem $M = M_\Psi$ i M jest spójny. Równoważność ii) z iii) jest oczywista: $s(\Phi) \cap \Phi = \Phi_M$. Niech teraz zachodzi ii). Zbiór M jest niezmienniczy. Jeśli $M = I$, to oczywiście iv) jest spełnione. Jeśli $M = [0, b]$, $0 \leq b < 1$, to cała dalsza część wykresu leży ostro poniżej przekątnej i Ψ nie jest odwzorowaniem "na". Podobnie jest, gdy $M = [a, 1]$, $0 < a \leq 1$. Rozpatrzmy również pozostały przypadek, gdy zbiór ten jest postaci $[a, b]$, $0 < a \leq b < 1$. Wtedy wykres odwzorowania na $[0, a)$ leży ostro powyżej przekątnej, zaś na $(b, 1]$ - poniżej.

Jeśli istnieją $x_0, x_1 \in I$ takie, że $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_1) = 1$, to $x_0 > b$, $x_1 < a$. Części wykresu Φ odpowiadające $\varphi|_{[0, x_1]}$, $\varphi|_{[x_1, a]}$, $\varphi|_{[a, b]}$, $\varphi|_{[b, x_0]}$ i $\varphi|_{[x_0, 1]}$ oznaczmy odpowiednio przez $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_5$. Wszystkie one są łukami (homeomorficznymi obrazami odcinka) i $s(\Phi_2)$ łączy $\Phi_3 (= s(\Phi_3))$ z krawędzią $\{1\} \times I$. Zatem Φ_1 leży ostro poniżej $s(\Phi_2)$. Wtedy jednak Φ_5 , łącząc krawędzie $I \times \{0\}$ i $\{1\} \times I$, przecina bądź $s(\Phi_2)$, bądź $s(\Phi_1)$, co jest sprzeczne z założeniem, że wszystkie takie punkty przecięć należą do Φ_3 (rys. 2).



rys. 2

Ostatecznie więc, we wszystkich przypadkach φ nie jest odwzorowaniem "na". Jeśli $\varphi(I) \neq M$, to $\varphi(I)$ jest niezmienniczym odcinkiem oraz $M \subset \varphi(I)$, i całe rozumowanie możemy powtórzyć. Ciąg zbiorów $\varphi^n(I)$ jest zstępujący, a jego granica jest niezmienniczym odcinkiem, na którym φ jest "na". Zatem granicą tą jest zbiór M . Udowodniliśmy w ten sposób, że $\varphi^n(I) \rightarrow M$. Ponieważ $\varphi^2|_M$ jest identycznością, to nietrudno szacuje się, że φ^{2n} jest zbieżne jednostajnie, jak mówi warunek iv). Implikacje iv) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ i) są oczywiste.

Twierdzenie 9.2. Odwzorowanie ciągle z okręgu Γ w Γ jest s.p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących przypadków:

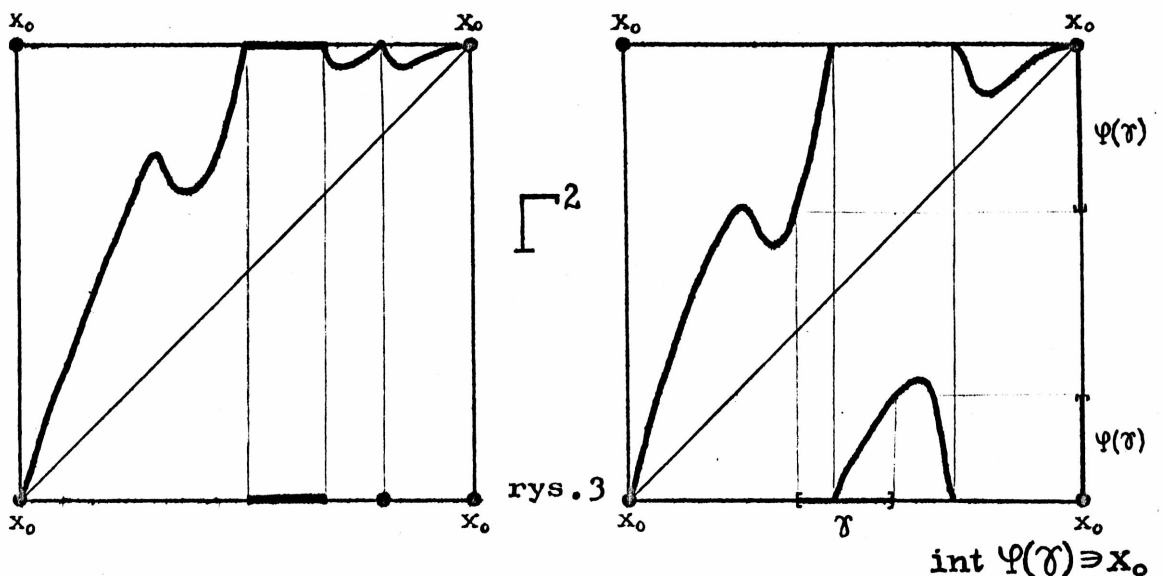
- a) Ψ jest obrotem lub odbiciem symetrycznym (homeo),
- b) Ψ nie jest "na" i $\Psi|_{\Psi(\Gamma)}$ jest odwzorowaniem s.p.o. odcinka $\Psi(\Gamma)$,
- c) Ψ jest "na", posiada jeden punkt stały x_0 i ma tę własność, że dla każdego domkniętego łuku $\gamma \subset \Gamma$, $\gamma \neq x_0$ zachodzi $\text{int } \Psi(\gamma) \neq x_0$.

W przypadkach a) i b) Ψ jest m.p.o., zaś w przypadku c) $\Psi^n(x) \rightarrow x_0$ dla każdego $x \in \Gamma$, jednak m.p.o. nie ma miejsca.

Dowód. Wiadomo, że a) $\Rightarrow$ m.p.o. Na mocy Tw. 9.1. również b) $\Rightarrow$ m.p.o. Przypuśćmy, że spełniony jest warunek c). Nietrudno zauważyć, że wtedy system (Γ, Ψ) jest obrazem pewnego systemu $(I, \tilde{\Psi})$ na odcinku, przez utożsamienie punktów 0 i 1 z punktem stałym x_0 . Wykres odwzorowania $\tilde{\Psi}$ leży (oprócz zera i jedynki w całości poniżej lub powyżej przekątnej. Zatem $\tilde{\Psi}^n(y) \rightarrow 0$ lub 1 dla $y \in I$, a więc $\Psi^n(x) \rightarrow x_0$ dla $x \in \Gamma$, stąd Ψ jest s.p.o. Gdyby Ψ było m.p.o., to znaczy, gdyby iteracje Ψ^n były jednakowo ciągle, tę samą własność miałyby $\tilde{\Psi}$, a przecież $\tilde{\Psi}$ nie jest nawet s.p.o. (por. Przykład 5.3.).

Na odwrót. Przypuśćmy, że Ψ jest s.p.o. Jeśli Ψ nie jest odwzorowaniem "na", to oczywiście zachodzi b). Jeśli Ψ jest

"na" to na mocy cytowanego już Tw. 3.2 w [M.-S.-T.1] M_φ jest bądź całym okręgiem Γ , bądź też punktem stałym $\{x_0\}$. Widać więc, że jeśli φ nie ma punktów stałych, to $M_\varphi = \Gamma$ i φ jest obrotem (homeo), jeśli zaś φ ma więcej niż jeden punkt stały, to również $M_\varphi = \Gamma$, ale φ jest odbiciem symetrycznym (homeo). Zachodzi zatem wtedy a). Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $M_\varphi = \{x_0\}$. Przypuśćmy, że c) nie jest spełnione, czyli że istnieje łuk domknięty $\gamma \not\ni x_0$ taki, że $\text{int } \varphi(\gamma) \ni x_0$. Wtedy istnieje otoczenie $U \ni x_0$ zawarte w $\varphi(\gamma)$ i rozłączne z γ . Istnieje też otoczenie spójne $V \ni x_0$ takie, że $\varphi(V) \subset U$. Dopełnienie V^0 jest łukiem domkniętym. Ponieważ φ jest "na", przeto $\varphi(V^0) \supset U^0$, a ponieważ $V^0 \supset \gamma$, więc $\varphi(V^0) \supset U$. Tak więc, $\varphi(V^0) = \Gamma$, w szczególności $\varphi(V^0) \supset V^0$. Niech $H_0 = V^0$, $H_1 = \varphi^{-1}(H_0) \cap H_0$ i $H_{n+1} = \varphi^{-1}(H_n) \cap H_n$, dla $n = 1, 2, \dots$. Łatwo widać, że H_n jest łańcuchem niepustych zbiorów domkniętych, spełniających warunek $H_n \supset \varphi(H_{n+1}) \supset H_{n+1}$. Wobec tego $H_\infty = \bigcap H_n \neq \emptyset$ jest zbiorem niezmienniczym, a więc nierozłącznym z M_φ . Uzyskaliśmy sprzeczność, bowiem $M_\varphi = \{x_0\}$ i $x_0 \notin H_0$.



Uwaga. Zachodzenie warunku o) łatwo można sprawdzić na wykresie odwzorowania Ψ ; oznacza on, że jeśli punkt stały x_0 umieścimy w początku układu I^2 , to jedna ze składowych spójnych wykresu łączy dolny lewy wierzchołek kwadratu z górnym prawym, nie przecinając poza tym przekątnej. Składowa ta może osiągać górną lub dolną krawędź kwadratu, wtedy oczywiście na przeciwległej krawędzi pojawią się dodatkowe składowe (rys. 3)).

§10. Przypadek dwuwymiarowy

Mocno prawie okresowe homeomorfizmy na R^2 zostały w pełni scharakteryzowane przez N.E.Folanda ([F.N.E.]). Każdy taki homeomorfizm jest obrotem lub symetrią osiową (homeo).

Opisywaniem zbiorów minimalnych dla pewnych systemów na sferze S_2 zajmował się W.K.Mason ([M.W.K.]). Jego twierdzenia dotyczą odwzorowań słabo prawie okresowych w sensie dynamiki topologicznej, stosują się więc w szczególności do przypadku, gdy $M_\Psi = S_2$ i Ψ jest m.p.o.

Wynik Folanda, jak i wnioski płynące z twierdzeń Masona dla systemów m.p.o. na S_2 , zostały uogólnione przez Montgomery'ego, Sine'a i Thomasa w [M.-S.-T.2]. Autorzy ci podają pełną klasyfikację zachowania się Ψ na M_Ψ , gdzie Ψ jest s.p.o. (w sensie operatorowym) odwzorowaniem na zwartej, spójnej rozmaitości topologicznej wymiaru 2.

Twierdzenie 10.1. ([M.-S.-T.2]). Niech (X, Ψ) będzie s.p.o. systemem na zwartej, spójnej rozmaitości topologicznej

dwuwymiarowej X . Wtedy zachodzi dokładnie jeden z następujących przypadków:

a) Każdy zbiór minimalny jest zerowymiarowy (być może skończony). Co więcej, w tym przypadku, jeśli M_φ ma wewnątrz niepuste, to φ jest globalnie okresowe na M_φ ($\varphi^n|_{M_\varphi} = \text{id}_{M_\varphi}$ dla pewnego $n \geq 1$).

b) X jest torusem dwuwymiarowym i system (X, φ) jest nieprzywiedlny.

c) Istnieje jedyny zbiór minimalny i jest on homeomorficzny z okręgiem Γ .

d) M_φ jest jednym z następujących przykładów:

Przykład 1. $M_\varphi = [-1, 1] \times \Gamma$

$$(A) \quad \varphi(t, \theta) = (t, \theta + \lambda)$$

$$(B) \quad \varphi(t, \theta) = (-t, \theta + \lambda)$$

(λ niewymierna, dodawanie modulo 1).

Przykład 2. (M_φ, φ) jest modyfikacją Przykładu 1.(A), taką że zbiór $\{-1\} \times \Gamma$ utożsamiamy z punktem. System ten jest niewymiernym obrotem koła domkniętego.

Przykład 3. (M_φ, φ) jest modyfikacją Przykładu 1., taką że obie komponenty brzegu utożsamiamy z punktami. Wtedy, w przypadku (A), φ jest niewymiernym obrotem sfery S_2 , zaś w (B), - złożeniem takiego obrotu z symetrią względem równika $\{0\} \times \Gamma$.

Przykład 4. M_φ jest modyfikacją przestrzeni z Przykładu 1., polegającą na identyfikacji $(-1, \theta) = (1, \theta)$. Wtedy M_φ jest torusem dwuwymiarowym. Odwzorowanie Ψ jest zdefiniowane następująco:

$$(A) \quad \Psi(t, \theta) = (t + \lambda_1, \theta + \lambda_2)$$

$$(B) \quad \Psi(t, \theta) = (-t, \theta + \lambda_2)$$

(λ_1 wymierna, λ_2 niewymierna).

Przykład 5. (M_φ, Ψ) jest modyfikacją Przykładu 1.(A), polegającą na utożsamieniu przeciwległych punktów z $\{-1\} \times \Gamma$ oraz utożsamieniu całego zbioru $\{1\} \times \Gamma$ z punktem. Wtedy M_φ jest przestrzenią rzutową.

Przykład 6. (M_φ, Ψ) jest modyfikacją Przykładu 1.(A), polegającą na utożsamieniu przeciwległych punktów z $\{-1\} \times \Gamma$. Wtedy (M_φ, Ψ) jest obrotem wstęgi Möbiusa.

Przykład 7. (M_φ, Ψ) jest modyfikacją Przykładu 1., polegającą na utożsamieniu przeciwległych punktów z $\{-1\} \times \Gamma$ i podobnym utożsamieniu przeciwległych punktów z $\{1\} \times \Gamma$. Wtedy M_φ jest butelką Kleina, a Ψ , w przypadku (A), obrotem zaś w (B), obrotem złożonym z symetrią względem $\{0\} \times \Gamma$.

Wiadomo, że obrót torusa jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy współrzędne wektora obrotu i ich iloraz są liczbami niewymiernymi. W dalszej części udowodnimy twierdzenie, z którego wnioskiem będzie, że obroty takie są zarazem jedynymi s.p.o. systemami tranzytywnymi na zwartych, spójnych rozmaitościach dwuwymiarowych.

Każdy homeomorficzny obraz odcinka nazywamy łukiem.

Grafem nazywamy skończoną sumę łuków, których przekroje zawarte są w zbiorze wszystkich końców tych łuków (zwanych wierzchołkami grafu). Pętlą nazywamy każdy homeomorficzny obraz okręgu Γ .

Każda pętla, jako graf, ma co najmniej dwa wierzchołki. Jeśli X jest rozmaitością zwartą, dwuwymiarową, to wiadomo też, że każdy łuk zawarty w X , rozłączny z brzegiem ∂X ma (podobnie jak punkty) otoczenie homeomorficzne z R^2 .

Definicja. (por. [A.-J.]). Rzędem spójności grafu G nazywamy maksymalną liczbę $r(G)$, taką że istnieje w G układ $r(G)$ łuków o tej własności, że po usunięciu ich wnętrza, powstały zbiór ma tę samą liczbę składowych, co graf G (liczba pętli).

Definicja. (por. [A.-J.]). Rzędem spójności zwartej, spójnej rozmaitości topologicznej dwuwymiarowej X nazywamy maksymalną liczbę $r(X)$, taką że istnieje graf $G \subset X$ rzędu spójności $r(G) = r(X)$, o tej własności, że $X \setminus G$ jest zbiorem spójnym (będziemy wtedy mówić, że G jest maksymalnym grafem nie rozspajającym X).

Rząd spójności dla każdej takiej rozmaitości jest skończony ([A.-J.]).

Lemat 10.2. Niech X będzie zwartą, spójną rozmaitością topologiczną dwuwymiarową bez brzegu i $G \subset X$ grafem spójnym, takim że $\infty > r(G) \geq r(X)$. Wtedy przynajmniej jedna składowa zbioru $X \setminus G$ jest homeomorficzna z płaszczyzną (będziemy mówić,

ze G wycina dysk z X).

Dowód. Niech najpierw powien graf spójny H rozspaja X , ale żaden jego spójny podgraf nie ma tej własności. Łatwo sprawdzić, że $X \setminus H$ ma dokładnie dwie składowe i istnieją rozmaitości bez brzegu X_1, X_2 takie, że składowe te są homeomorficzne ze zbiorami powstałymi z X_1, X_2 przez usunięcie z nich skończenie wielu punktów. Niech $H_1 \subset X_1, H_2 \subset X_2$ będą grafami maksymalnymi nie rozspajającymi X_1, X_2 i nie zawierającymi tychże punktów. Ponieważ $r(H) \geq 1$ (inaczej H nie rozspajałby X), więc istnieje podgraf spójny $H' \subset H$ rzędu $r(H) - 1$. Wtedy graf $H_1 \cup H_2 \cup H'$ nie rozspaja X , a jego rząd spójności wynosi $r(X_1) + r(X_2) + r(H) - 1$. Tak więc

$$(*) \quad r(X) \geq r(X_1) + r(X_2) + r(H) - 1$$

Przypuśćmy dodatkowo, że graf G (patrz założenia lematu) rozspaja X . Niech H będzie podgrafem spójnym grafu G rozspajającym X , minimalnym ze względu na te własności. Wtedy, stosując poprzednio przyjęte oznaczenia, zauważamy, że graf G rozpada się na dwa grafy spójne G_1 i G_2 na X_1 i X_2 odpowiednio. Przy przejściu tym wszystkie pętle grafu H stają się punktami, tak więc

$$(**) \quad r(G_1) + r(G_2) = r(G) - r(H)$$

Liczba po prawej stronie jest z założenia nie mniejsza niż $r(X) - r(H)$, co z kolei na mocy $(*)$ jest $\geq r(X_1) + r(X_2) - 1$. Ponieważ są to liczby naturalne, więc porównując skrajne

wyrażenia dochodzimy do wniosku, że dla jednej z rozmaitości X_1, X_2 (niech to będzie X_1) zachodzi

$$r(G_1) \geq r(X_1)$$

W ten sposób X_1 spełnia założenia lematu. Jeśli więc G_1 rozspaja X_1 , to rozumiemy jak poprzednio. Ze wzoru (**) wynika również, że $r(G_1) \leq r(G) - 1$. Skoro $r(G) < \infty$, to po skończonej liczbie kroków indukcyjnych otrzymamy rozmaitości X_n o tej własności, że

$$r(G_n) \geq r(X_n), \text{ oraz graf } G_n \text{ nie rozspaja } X_n.$$

Tak więc w powyższym wzorze jest równość. W ten sposób pozbywamy się też dodatkowego założenia, uozynionego po wzorze (*); jeśli G nie rozspaja X , to przyjmujemy $X_n = X$. Widać teraz, że $X_n \setminus G_n$ jest zbiorem jednospójnym (tzn. każda pętla w nim zawarta rozspaja go). Aby udowodnić, że zbiór ten jest dyskiem otwartym wystarczy wykazać (patrz [A.-J.]), że każde jego uzwarcenie ma brzeg spójny. Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech $\gamma \subset X_n \setminus G_n$ będzie łukiem łączącym dwie różne składowe brzegu pewnego uzwarcenia. Wtedy graf $G_n \cup \gamma$ nadal nie rozspaja X_n , mimo że jego rząd spójności jest większy niż $r(X_n)$ (można dodatkowo usunąć wnętrze łuku γ). Tak więc $X_n \setminus G_n$ jest dyskiem. Dowód lematu kończy uwaga, że przejście z $X_n \setminus G_n$ w X jest homeomorficzne.

Lemat 10.3. Niech X będzie jak w założeniach Lematu 10.2. i niech $\Psi: X \rightarrow X$ oznacza odwzorowanie ciągłe o obrazie Y brzegowym w X . Wtedy istnieje zwarta przestrzeń Hausdorffa Y' taka, że

- 1) $\Psi = \Psi_2 \Psi_1$, gdzie $\Psi_1: X \xrightarrow{\text{na}} Y'$, $\Psi_2: Y' \xrightarrow{\text{na}} Y$, Ψ_1 - ciągłe, monotoniczne (tzn. przeciwobrazy punktów, lub równoważnie - zbiorów spójnych, są spójne), Ψ_2 - ciągłe, zerowymiarowe (tzn. przeciwobrazy punktów są zerowymiarowe),
- 2) $\dim Y' = 1$ albo Y jest punktem,
- 3) dla każdego homeomorfizmu φ na X komutującego z Ψ istnieje homeomorfizm φ' na Y' taki, że $\varphi' \Psi_1 = \Psi_1 \varphi$,
- 4) Y' zawiera najwyżej skończoną wiele pętli.

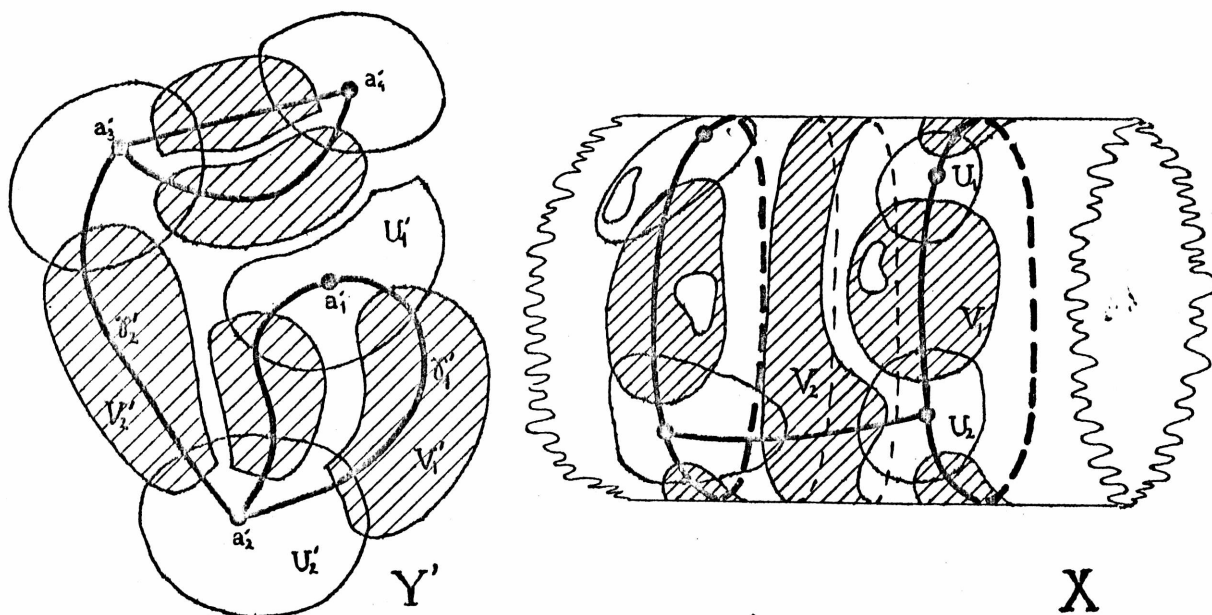
Dowód.

ad.1). Jest to zastosowanie twierdzenia o faktoryzacji ([W.G.T.]).

ad.2). $1 = \dim Y = \dim \Psi_2(Y') \geq \dim Y' - 0$, w myśl twierdzenia Murewioza (np. [K.K.]) i zerowymiarowości Ψ_2 . Ponadto Y' jest łukowo spójna (jako ciągły obraz X), więc jeśli Y zawiera przynajmniej dwa punkty, to $\dim Y' \geq 1$.

ad.3). φ' definiujemy właśnie wzorem $\varphi' \Psi_1(x) = \Psi_1 \varphi(x)$. Sprawdzenie poprawności tej definicji, ciągłości i różnowartościowości φ' nie jest trudne. (Korzysta się istotnie z monotoniczności Ψ_1 i komutowania φ z Ψ).

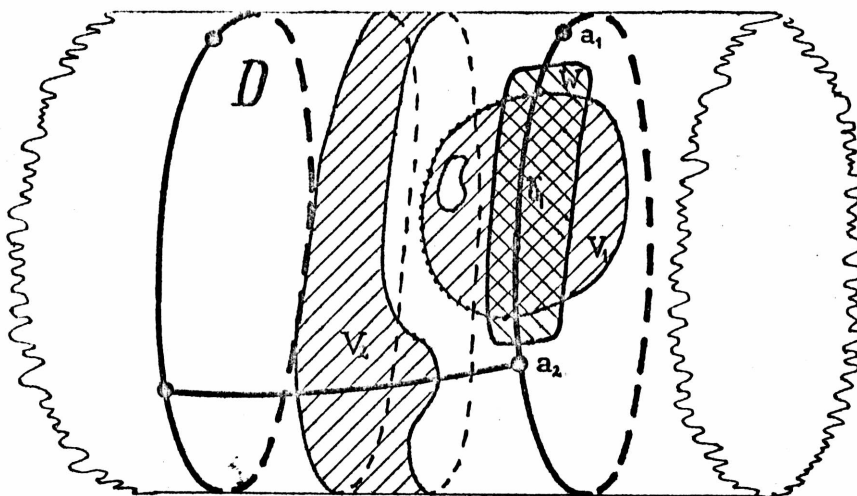
ad.4). Przypuśćmy, że jest przeciwnie. Wtedy Y' zawiera graf spójny G' rzędu spójności $r(G') = r(X) + 1$. Wierzchołki $a'_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ tego grafu mają otoczenia spójne U'_i parami rozłączne i takie, że każdy łuk $\gamma'_j, (j = 1, 2, \dots, m)$ grafu G' ma niepusty przekrój z dokładnie dwoma spośród U'_i i przekroje te są spójne. Pozostałe, domknięte części tych łuków są spójne i mają również spójne otoczenia V'_j (odpowiednio) parami rozłączne i takie, że każdy z V'_j ma niepusty przekrój z dokładnie dwoma spośród U'_i oraz $V'_j \cap \gamma'_k = \emptyset$ dla $j \neq k$ (rys.4). Z jednowymiarowości i zwartości Y' wynika, że otoczenia V'_j można wybrać tak, aby ich brzegi były zbiorami zerowymiarowymi.



rys.4

Przeciwobrazy przez Ψ_1 wszystkich tych otoczeń oznaczać będziemy odpowiednio przez U_i i V_j . Są one wszystkie zbiorami spójnymi i otwartymi w X , a więc łukowo spójnymi. Łatwo teraz widzieć, że w X istnieje graf G homeomorficzny z G' , taki że układ otoczeń U_i, V_j spełnia wobec G te same warunki (oprócz

zerowymiarowości brzegów V_j), które nakładaliśmy na U'_i i V'_j wobec G' . Zgodnie z Lematem 10.2. graf G wycina dysk otwarty D z X . Ponieważ $r(G) > r(X)$, więc G rozspaja X i $\bar{D}^o$ jest niepuste. Przynajmniej jeden łuk grafu G leżący na brzegu D należy też do brzegu $\bar{D}^o$ (rys.5). Niech γ_1 oznacza taki właśnie łuk, a_1, a_2 - jego wierzchołki, V_1 - odpowiedni zbiór otwarty zawierający środkową część γ_1 . Z własności rozmaitości dwuwymiarowych wynika łatwo, że istnieje zbiór $W \subset X$ homeomorficzny z kołem domkniętym, taki że $\text{int } W \supset (\gamma_1 \cap \bar{V}_1)$ i $(W \cap G) \subset \gamma_1 \setminus \{a_1, a_2\}$. Zbiory $W \cap \bar{D}$ i $W \cap D^o$ są niepuste i wobec powyższych własności oba homeomorficzne z kołem domkniętym.



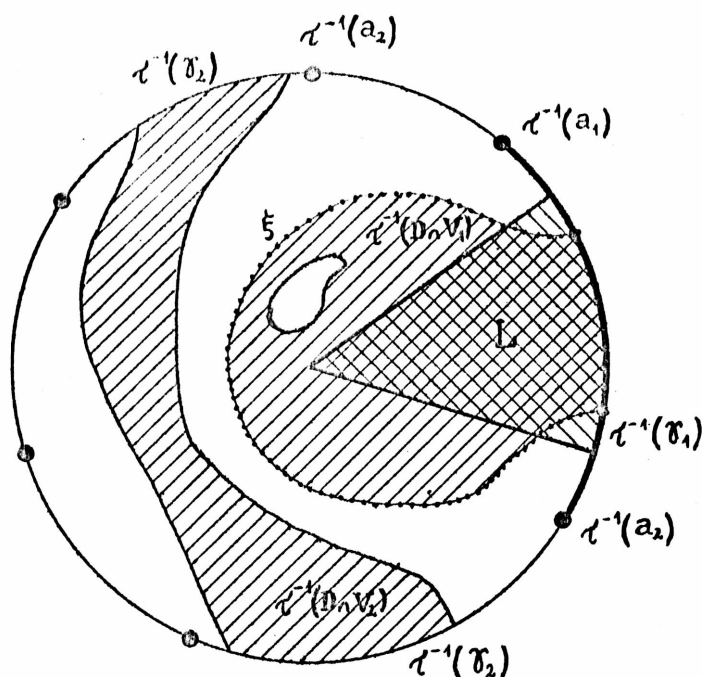
rys.5

Mozna tak określić homeomorfizm α z koła otwartego na D , aby jego ciągle przedłużenie na koło domknięte przeprowadzało homeomorficznie pewien wycinek koła L na $W \cap \bar{D}$ (rys.6).

Obrazem przez α całego koła domkniętego jest wtedy $\bar{D}$. Wykażemy,

że $\mathcal{U}^{-1}(\gamma_1 \cap \bar{V}_1)$ jest pojedynczym łukiem na brzegu koła.

Przypuśćmy bowiem, że pewien punkt b spoza L przechodzi przez $\mathcal{U}$ w $\gamma_1 \cap \bar{V}_1$. Wtedy b można przybliżyć ciągiem b_n punktów z koła otwartego, nie należących do L . Mamy $\mathcal{U}(b_n) \in (D \setminus W)$ i $\lim \mathcal{U}(b_n) \notin \text{Int } W$, co przeczy ciągłości $\mathcal{U}$, gdyż $\mathcal{U}(L) \subset (\gamma_1 \cap \bar{V}_1) \subset \text{Int } W$.



rys.6

Tak więc przeciwobraz przez $\mathcal{U}$ zbioru $\gamma_1 \cap \bar{V}_1$ jest zawarty w L , a przez to homeomorficzny z $\gamma_1 \cap \bar{V}_1$. Dalej rozumiemy następująco: Pewna składowa C zbioru $\mathcal{U}^{-1}(D \cap V_1)^c$ na kole domkniętym zawiera pozostałą, spójną część okręgu brzegowego. Ponadto C^c jest zbiorem domkniętym i spójnym (jest sumą $\mathcal{U}^{-1}(D \cap V_1)$ i pozostałych składowych dopełnienia tego zbioru). Rozpatrzmy $\xi = C^c \cap \bar{C}$. Jest to część brzegu zbioru $\mathcal{U}^{-1}(D \cap V_1)$. Z faktu, że koło ma tzw. rząd wielosprzęgłości równy 1 (tzn., że jeśli pokryjemy je dwoma domkniętymi zbiorami spójnymi to ich przekrój będzie spójny ([W.G.T.])) wynika też, że ξ jest

spójne. Ponadto ξ zawiera oba końce łuku $\tau^{-1}(\gamma_1 \cap \bar{V}_1)$. Oznacza to, że $\tau(\xi)$, będący spójnym podzbiorem brzegu V_1 zawiera obydwie końce łuku $\gamma_1 \cap \bar{V}_1$. Końce te należą do dwu rozłącznych zbiorów U_1 i U_2 . Uzyskaliśmy sprzeczność, ponieważ, z założenia o zerowymiarowości brzegu zbiorów V_j' wynika, że $\Psi_1(\tau(\xi))$ jest punktem, z drugiej strony U_1' i U_2' są rozłączne.

Twierdzenie 10.4. Każdy s.p.o. tranzytywny system (X, φ) na zwartej różności topologicznej dwuwymiarowej jest nieprzywiedlny.

Dowód. Niech X będzie spójna. Załóżmy też najpierw, że X jest różnością z brzegiem. Na mocy Lematu 6.4. φ jest homeomorfizmem, więc ∂X jest zbiorem niezmienniczym i składa się z punktów powracających. Korzystając z Tw. 6.8. i z faktu, że ∂X jest grafem wnioskujemy, że $\partial X \subset M_\varphi$. Teza wynika teraz z Tw. 8.3. i z tranzytywności systemu. Gdy X nie ma brzegu, to rozumiemy następująco: Jeśli punkt tranzytywny x_0 należy do M_φ , to $X = M_\varphi$. Jeśli nie, to w myśl Lematu 6.7. istnieje punkt $y \in X \setminus M_\varphi$, którego orbita $S_\varphi^0(y)$ jest zbiorem brzegowym Y w X . Niech Ψ oznacza taki element S_φ , dla którego $\Psi(x_0) = y$. Z założenia s.p.o. φ jest ciągle i $\varphi(X) = Y$. Stosować teraz można Lemat 10.3. Przy oznaczeniach z tego lematu mamy ponadto: (Y', φ') jest systemem s.p.o., co wynika z definicji φ' , $\Psi_1(M_\varphi) \subset M_{\varphi'}$ i $\Psi_2(M_{\varphi'}) \subset M_\varphi$. (Inkluzje te wynikają z charakterystyki M_φ przez punkty jednostajnie powracające i z ciągłości Ψ_1, Ψ_2). Podobnie $M_{\varphi'}^2 = Y$. Suma wszystkich skończenie wielu pętli z Y' jest grafem skończonym, oczywiście φ' -niezmienniczym,

a więc na mocy Tw. 6.8. pętle te zawarte są w $M_{\psi'}$. Oznaczmy $y' = \Psi_1(x_0)$. Ponieważ $\Psi_2(y') = y \notin M_{\psi}$, to $y' \notin M_{\psi'}$. Z poprzednich rozważań wynika, że y' łączy z $M_{\psi'}$ tylko jeden łuk γ w Y' (inaczej powstałaby pętla poza $M_{\psi'}$). Łuki γ i $\Psi'(\gamma)$ mogą

a) mieć punkt wspólny poza $M_{\psi'}$. Wtedy niech p oznacza najwoześniejszy taki punkt (wg. parametryzacji $[0, 1] \rightarrow \gamma$; $0 \rightarrow y'$).

Jedyny łuk, jaki łączy y' z $\Psi'(y')$, zawiera p . Przez nietrudną indukcję wywnioskujemy, że jedyny łuk łączący y' z $\Psi^n(y')$ zawiera wszystkie punkty $p, \Psi'(p), \dots, \Psi^{n-1}(p)$.

b) być rozłączne poza $M_{\psi'}$. Możemy wtedy przyjąć, że wszystkie dalsze obrazy tego łuku są parami rozłączne poza $M_{\psi'}$, inaczej dla pewnego Ψ^n zachodziłby przypadek a).

Ponieważ x_0 jest powracający, to istnieje w X łuk zawierający pewien ciąg $\varphi^{n_k}(x_0)$ zbieżny do x_0 . Łuk ten jest sumą ciągu łuków γ_k zstępującego do $\{x_0\}$, zawierających $\varphi^{n_j}(x_0)$, ($j \geq k$). Obrazy $\Psi_1(\gamma_k)$ są łukowo spójne w Y' i zwarte, zawierają więc w przypadku a) całą orbitę punktu p , w szczególności punkt z $M_{\psi'}$ (np. $\varepsilon'(p)$), a w przypadku b) - bezpośrednio punkty z $M_{\psi'}$. Ponieważ $\Psi_1(\gamma_k) \rightarrow \{y'\}$, to $y' \in M_{\psi'}$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód twierdzenia dla rozmaitości spójnych. Jeśli X jest rozmaitością niespójną, zwartą, to liczba składowych jest skończona. Dla pewnego n składowe te wraz z φ^n tworzą systemy spójne spełniające pozostałe założenia twierdzenia.

U Z U P E Ł N I E N I E

Z rozumowań przeprowadzonych w §§ 6 i 7 wynika pewien fakt, który nie został jednak wyodrębniony. Warto go odnotować chociażby z tego względu, że wyjaśnia on, podobnie jak twierdzenie Halmosa - von Neumanna, niektóre związki pomiędzy dynamiką topologiczną, a teorią półgrup topologicznych.

Twierdzenie 11.1. System tranzytywny (X, φ) jest s.p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy jest on homeomorficzny z translacją o element generujący pewnej zwartej, przemiennej półgrupy monotetycznej $S = \{a^n: n = 1, 2, \dots\}^-$. Ponadto $M_\varphi^2 = X$ jest równoważne temu, że S posiada jedność, (X, φ) jest nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy S jest grupą.

Dowód. Za S przyjąć trzeba S_φ i skorzystać z Lematu 7.1. Na odwrót: jest oczywiste, że dowolne translacje na półgrupach zwartych są s.p.o.

Dalej rozumować należy jak w Uwadze 1 po Przykładzie 7.6.

B I B L I O G R A F I A

- [A.-J.] P.S.Aleksandrow i W.A.Jefremowicz, Zarys Podstawowych Pojęć Topologii, Warszawa (1955).
- [B.W.1] W.Bartoszek, "Zero - two" law for conservative Markov operators, Colloq. Math. (w druku).
- [B.W.2] W.Bartoszek, Własności ergodyczne operatorów markowskich na zwartej przestrzeni fazowej, Praca doktorska.
- [D.-G.-S.] M.Denker, C.Grillenberg i K.Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin (1976).
- [D.T.] T.Downarowicz, Some properties of weakly almost periodic mappings on compact spaces, Colloq. Math. (w druku).
- [E.A.] A.J.Ellis, Extreme positive operators, Quart. J. Math. 15 (1964), 342 - 344.
- [F.S.R.] S.R.Foguel, The ergodic theory of positive operators on continuous functions, Annali Scuola Normale Superiore de Pisa 26 (1973), 19 - 34.
- [F.N.E.] N.E.Foland, A characterization of the almost periodic homeomorphisms on the closed 2-cell, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 1031 - 1034.
- [G.W.M.] W.H.Gottschalk, Almost periodic points with respect to transformation semi-groups, Annals of Math. 47 (1946), 762 - 766.
- [G.-H.] W.H.Gottschalk i G.A.Hedlund, Topological dynamics, A.M.S. Colloq. Pub., Vol. 36 (1955).

- [H.P.R.] P.R.Halmos, Lectures on Ergodic Theory, Math. Society of Japan (1956).
- [H.-vN.] P.R.Halmos i J.von Neumann, Operator Methods in classical mechanics II, Ann. of Math. 43 (1942), 332 - 350.
- [H.-R.] E.Hewitt i K.A.Ross, Abstract Harmonic Analysis I, Academic Press, New York, (1963).
- [I.A.] A.Iwanik, Unique ergodicity of irreducible Markov operators on $C(X)$, Studia Math. (w druku).
- [J.K.] K.Jacobs, Neue Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, Springer Verlag, Berlin (1960).
- [J.B.] B.Jamison, Ergodic decompositions induced by certain Markov operators, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 451 - 468.
- [J.-S.1] B.Jamison i R.Sine, Irreducible almost periodic Markov operators, J. Math. Mech. 18 (1969), 1043 - 1057
- [J.-S.2] B.Jamison i R.Sine, Sample path convergence of stable Markov process, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 28 (1974), 173 - 177.
- [K.K.] K.Kuratowski, Topologie II, Warszawa (1961).
- [M.W.K.] W.K.Mason, Weakly almost periodic homeomorphisms of S_2 , Pacific J. Math. 48 (1973), 185 - 196.
- [M.-S.-T.1] J.Montgomery, R.Sine i E.Thomas, Some topological properties of weakly almost periodic mappings, Topology and its Applications 11 (1980), 69 - 85.
- [M.-S.-T.2] J.Montgomery, R.Sine i E.Thomas, Weakly Almost Periodic Mappings on Two-Dimensional Manifolds, preprint
- [P.L.S.] L.S.Pontrjagin, Topological Groups, New York (1966).

- [R.M.] M.Rosenblatt, Equicontinuous Markov operators, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 9 (1964), 205 - 222.
- [S.H.H.] H.H.Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer Verlag, Berlin (1974).
- [S.R.1] R.Sine, Geometric theory of a Single Markov operator, Pacific J. Math. 27 (1968), 155 - 166.
- [S.R.2] R.Sine, Convergence theorems for weakly almost periodic Markov operators, Israel J. Math. 19 (1974), 246 - 255.
- [S.R.3] R.Sine, Sample path convergence of stable Markov process II, Indiana University Math. Journal 26 (1976), 23 - 43.
- [W.G.T.] G.T.Whyburn, Analytic Topology, A. M. S. Colloq. Pub., Vol 28 (1955).
- [W.M.] M.Wolf, Über das Spectrum von Verbandshomomorphismen in $C(X)$, Math. Ann. 182 (1969), 161 - 169.

