

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii PRE nr 52/84

UPROSZCZONY MODEL INERCYJNEGO
PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO
I JEGO ZASTOSOWANIA

Piotr RUTA

Praca doktorska

Promotor: Prof. dr hab. inż. Jan Langer

Słowa kluczowe:
półprzestrzeń sprężysta,
podłoże inercyjne,
interakcja konstrukcji i
podłoża, obciążenie
ruchome

Praca wykonana w ramach Problemu Węzłowego PW.05.12.,
temat 14.3.

Wrocław 1984

Panu Profesorowi Janowi Langerowi
składam serdeczne podziękowanie
za cenne wskazówki udzielone mi
przy wykonywaniu niniejszej pracy

SPIS RZECZY

	str.
WSTĘP	5
Rozdział 1. PRZEGLĄD LITERATURY DOTYCZĄCEJ ROZWIĄZY- WANYCH ZAGADNIENI	
1.1. Zagadnienie podłoża sprężystego	8
1.2. Płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe	10
1.3. Stacjonarne drgania fundamentu blokowego spoczy- wającego na podłożu sprężystym	10
1.4. Interakcja konstrukcji z podłożem	11
1.5. Zagadnienie drgań belki nieskończonej spoczywa- jącej na sprężystym podłożu, obciążonej siłą ruchomą	12
Rozdział 2. UPROSZCZONY MODEL INERCYJNEGO PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO	
2.1. Pewne własności przemieszczeniowych funkcji Greena dla statycznego zagadnienia półprzestrze- ni	14
2.2. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia półprzestrze- ni - model podłoża sprężystego	22
2.3. Wybrane własności rozwiązań równań opisujących uproszczony model podłoża	27
2.4. Związki modelu uproszczonego z innymi modelami podłoża sprężystego	31
2.5. Przemieszczeniowe funkcje Greena dla uproszczo- nego modelu podłoża	33
2.6. Analiza porównawcza funkcji Greena	49
Rozdział 3. WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI KONSTRUKCJI SPOCZYWAJĄCYCH NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM	
3.1. Płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe - zagadnienie stempla	68
3.2. Drgania fundamentu blokowego spoczywającego na inercyjnym podłożu sprężystym	81
3.3. Interakcja konstrukcji z podłożem inercyjnym - zagadnienie parasejsmiczne	102

3.4. Drgania belki spoczywającej na inercyjnym podłożu sprężystym, obciążonej siłą ruchomą	114
Rozdział 4. WYBRANE ZAGADNIENIA MATEMATYCZNE I NUMERYCZNE ZWIĄZANE Z REALIZACJĄ PRACY	
4.1. Problemy związane z otrzymaniem rozwinięć przemieszczeniowych funkcji Greena względem wielomianów ortogonalnych	131
4.2. Problemy związane z uzyskaniem wyników nume- rycznych dla zagadnienia belki	144
PODSUMOWANIE	148
LITERATURA	150

WSTĘP

Zagadnienie sprężystego podłoża jest jednym z ważniejszych zagadnień mechaniki budowli. Wystarczy zauważyć, że każda konstrukcja bezpośrednio lub pośrednio spoczywa na sprężystym podłożu gruntowym, a w wielu przypadkach wpływ wzajemnego ich oddziaływania jest istotny.

Głównym problemem pojawiającym się w zagadnieniach teorii konstrukcji na podłożu sprężystym jest wybór odpowiedniego modelu podłoża. Jeżeli bowiem uwzględnimy dwie charakterystyczne cechy modelu podłoża - adekwatność modelu do rzeczywistości oraz stopień trudności natury matematycznej pojawiających się w rozwiązywaniu zagadnień wykorzystujących dany model podłoża - to okazuje się, że cechy te zazwyczaj się wykluczają.

Dotychczas najczęściej stosowanym w praktyce inżynierskiej modelem jest model Winklera, dający możliwość efektywnego rozwiązania wielu zagadnień technicznych. Ma on jednak szereg znanych wad jak np. : sprzeczny z doświadczeniem brak oddziaływania między sąsiednimi cząsteczkami podłoża, powodujący znikanie przemieszczeń poza obszarem kontaktu konstrukcji z podłożem, nie uwzględnianie sił bezwładności w podłożu pojawiających się w zagadnieniach dynamicznych. Wśród znanych modeli na uwagę zasługuje model typu półprzestrzeni sprężystej opisany równaniami elastokinetyki. Model ten w przeciwieństwie do modelu Winklera dostatecznie dokładnie opisuje fizyczne własności podłoża. Główną jednak jego wadą jest pojawianie się, już przy rozwiązywaniu prostych zagadnień dynamicznych, olbrzymich trudności natury matematycznej, co znacznie ogranicza praktyczne wykorzystanie modelu. Uzasadnione zatem wydaje się poszukiwanie koncepcji pośrednich, nie mających opisanych wad (patrz [60]).

Celem niniejszej pracy jest zbudowanie uproszczonego modelu, w miarę dokładnie opisującego rzeczywiste własności podłoża, a jednocześnie wprowadzającego duże uproszczenia natury matematycznej, pozwalające na rozwiązanie wielu złożonych zagadnień praktycznych. Wykażemy, że proponowany model wystarczająco dokładnie opisuje podłoże sprężyste i może być wykorzystywany do rozwiązywania zagadnień,

w których obszar kontaktu konstrukcji z podłożem jest ograniczony. Przedstawimy również możliwość praktycznego wykorzystania modelu, rozwiązując kilka ważnych z punktu widzenia zastosowań zagadnień technicznych.

Omawiany w pracy model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej jest opisany trzema niesprzężonymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi, pozwalającymi na obliczenie pełnego wektora przemieszczeń $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Jedno z otrzymanych równań jest analogiczne do wyników uzyskanych na innej drodze przez Świtkę [68] i Murawskiego [44]. Modele przedstawione przez tych autorów umożliwiają obliczenie tylko przemieszczeń pionowych u_3 . W niniejszej pracy dzięki innemu podejściu do tego zagadnienia uzyskuje się zestaw równań umożliwiających obliczenie przemieszczeń pionowych i poziomych.

Praca składa się z czterech rozdziałów i podsumowania. Rozdział pierwszy zawiera przegląd literatury dotyczącej zagadnienia podłoża sprężystego oraz zagadnień szczegółowych rozwiązywanych w drugiej części pracy.

Rozdział drugi w całości poświęcono opisowi uproszczonego modelu inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Przedstawiono w nim przesłanki fizyczne będące punktem wyjścia do stworzenia koncepcji modelu. Wyprowadzono równania opisujące model podłoża oraz przedstawiono pewną możliwą matematyczną ich interpretację. Omówiono najważniejsze własności rozwiązań dotyczące warunków brzegowych oraz możliwości zastąpienia zagadnienia półprzestrzeni odpowiednim zagadnieniem przestrzeni sprężystej. Pokazano również związki stworzonego modelu z innymi znanymi modelami podłoża. Zweryfikowano założenia przyjęte przy wyprowadzeniu równań oraz sprawdzono przedstawioną koncepcję modelu. Dokonano tego przez porównanie obliczonych wcześniej przemieszczeniowych funkcji Greena dla modelu, ze znanymi funkcjami Greena dla klasycznej półprzestrzeni sprężystej. Rozważono przypadek statyczny i dynamiczny.

W rozdziale trzecim przedstawiono formalne rozwiązania szczegółowych problemów, ważnych z punktu widzenia zastosowań. Rozważono następujące zagadnienia:

1. Płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe, polegające na wciskaniu w półprzestrzeń sprężystą sztywnego stempla o danym kształcie linii kontaktu stempla z podłożem. W wyniku otrzymano funkcje oporu podłoża, wykorzystywane w bardziej złożonych zagadnieniach kontaktowych,

2. Stacjonarne drgania fundamentu blokowego o podstawie prostokątnej, obciążonej wektorem uogólnionych sił harmonicznymie zmiennych. Przy pewnych założeniach upraszczających znaleziono funkcje odporu podłoża oraz amplitudy drgań fundamentu,

3. Zagadnienie interakcji konstrukcji z podłożem, przy założeniu sztywnego fundamentu. Czynnikiem generującym drgania układu podłoże - fundament - obiekt jest siła harmonicznymie zmienna przyłożona w pewnym punkcie podłoża. Konstrukcję uważa się za obiekt dyskretny, opisany skończonym zbiorem współrzędnych uogólnionych. W wyniku otrzymano amplitudy drgań fundamentu, pozwalające na wyznaczenie pozostałych wielkości,

4. Drgania belki nieskończonej, spoczywającej na uproszczonym modelu półprzestrzeni sprężystej, obciążonej siłą skupioną, przesuwającą się ze stałą prędkością. Rozważania ograniczono do rozwiązania zagadnienia stacjonarnego. Rozpatrzono dwa przypadki zależne od prędkości poruszania się siły, rozwiązując zagadnienie dla prędkości podkrytycznej i nadkrytycznej. Wykonano również obliczenia numeryczne, ograniczając się do przypadku prędkości podkrytycznej. W obliczeniach brano pod uwagę różne wartości modułów sprężystości podłoża oraz różne wartości prędkości poruszania się obciążenia. Wyniki przedstawiono na wykresach.

W ostatnim rozdziale omówiono metody numeryczne i matematyczne stosowane przy obliczaniu przemieszczeniowych dynamicznych funkcji Greena (wykorzystywanych w punkcie 2.7) oraz metod wykorzystywanych przy rozwiązywaniu zagadnienia belki obciążonej siłą ruchomą. Przedstawione metody dotyczą numerycznego obliczania całek Fouriera. Jest to rozdział dodatkowy omawiający problemy związane z uzyskaniem wyników numerycznych.

Rozdział 1

PRZEGLĄD LITERATURY DOTYCZĄCEJ ROZWIĄZYWANYCH ZAGADNIENI

1.1. Zagadnienie podłoża sprężystego

Pierwszą pracą inicjującą rozwój teorii konstrukcji spoczywających na podłożu sprężystym jest praca Winklera, opublikowana w drugiej połowie XIX w., w której zaproponowany został model znany do dzisiaj pod nazwą podłoża Winklera. Winkler założył, że wartość oporu podłoża w danym punkcie jest wprost proporcjonalna do przemieszczeń tego punktu. Założenie to, sprzeczne z rzeczywistością, całkowicie pomija wpływ wzajemnego oddziaływania cząstek podłoża. Model ten nie uwzględnia również sił bezwładności w podłożu, pojawiających się w zagadnieniach dynamicznych. Mimo tych wad jest on powszechnie stosowany do dzisiaj, pozwala bowiem na otrzymanie wielu efektywnych rozwiązań.

Na szczególną uwagę zasługuje model typu półprzestrzeni sprężystej. Model ten uwzględnia wiele cech podłoża rzeczywistego, jednak ze względu na olbrzymie trudności natury matematycznej, pojawiające się już przy rozwiązywaniu prostych zagadnień dynamicznych, nie jest powszechnie stosowany do rozwiązywania praktycznych zagadnień technicznych. Model ten został wykorzystany w pracy Ewninga, Jardentsky'ego i Pressa [16], w której zastosowano go do rozwiązania zagadnień dynamicznych związanych z problemami sejsmicznymi i zjawiskami falowymi w podłożu (zagadnienia te rozwiązano metodą transformat Fouriera, wykorzystując metodę zespolonych całek konturowych). W pracy Gorbunowa-Posadowa [22], rozwiązano statyczne zagadnienia belek i płyt. Inne przykłady wykorzystania tego modelu omówimy przy prezentacji literatury dotyczącej rozwiązywanych zagadnień szczegółowych.

Należy również wspomnieć o pracach Korieniewa [35], [36], w których zostały przedstawione przemieszczeniowe funkcje Greena, nie wynikające z równań teorii sprężystości. Funkcje te, zdaniem Korieniewa, pozwalają na przybliżanie nimi funkcji Greena odpowiadających podłożu rzeczywistemu. Należy jednak podkreślić, że większość z nich została przyjęta w sposób arbitralny.

Stworzono również wiele koncepcji pośrednich. I tak np. Własow i

Lieontiejew [73], stosując metody wariacyjne do zagadnień teorii sprężystości, wprowadzili własną koncepcję modelu podłoża zwanego modelem dwuparametrowym, otrzymanego wcześniej na innej drodze przez Fiklonienkę-Borodicza. W pracy [73] zostały również przedstawione rozwiązania wielu ważnych zagadnień praktycznych teorii konstrukcji na podłożu sprężystym z wykorzystaniem modelu dwuparametrowego. Równania analogiczne do równań opisujących podłoża dwuparametrowe otrzymał Pasternak [49], [50], opierając się na odmiennych przesłankach.

Inny model podłoża, nazwany aproksymowaną półprzestrzenią sprężystą, wprowadził Świtka [68]. W pracy tej została przedstawiona koncepcja modelu, mającego określoną interpretację mechaniczną. Rozwiązano również szereg podstawowych problemów dotyczących konstrukcji na podłożu sprężystym. Niezależnie do tych samych równań, doszedł na innej drodze Murawski [44].

W ostatnim okresie pojawiło się wiele modeli podłoża opartych na teorii sprężystości, a opisanych techniką metody elementów skończonych. Należy tutaj wymienić przede wszystkim pracę Lysmera i Kuhlemeyera [43], w której wprowadzono skończone wymiarowy model w postaci prostokątnej tarczy, podzielonej na prostokątne elementy skończone. W celu znacznego zmniejszenia energii odbitych od brzegu fal poprzecznych (S) i podłużnych (V), zastosowano tłumiący brzeg zwany standardowym lepkiem brzegiem, pochłaniający prawie całkowicie energię fal S i V oraz brzeg pochłaniający fale Rayleigha. W pracy tej rozwiązano również zagadnienie drgań wymuszonych fundamentu blokowego na podłożu sprężystym. Podobne podejście do zagadnienia podłoża sprężystego prezentują Dasgupta, Kameswara Rao [12], Villiappan, Favoralo, White [75], a z polskich autorów Filipkowski, Ceynowa i Sienkiewicz [20]. Prostsze modele bez brzegów tłumiących zastosowali w zagadnieniach interakcji konstrukcji (opisanej również metodą elementów skończonych) z podłożem Gutierrez, Chopra [27] oraz Vaish i Chopra [74].

Bogatą bibliografię dotyczącą zagadnień podłoża sprężystego można znaleźć w pracach [22], [73].

1.2. Płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe

Literatura dotycząca statycznych zagadnień kontaktowych teorii sprężystości, podobnie jak literatura dotycząca podłoża sprężystego, jest bardzo obszerna. Bogatą bibliografię można znaleźć w pracy Galina [23]. Ograniczymy się do podania pozycji wykorzystywanych w niniejszej pracy.

Na uwagę zasługują prace Galina [23] i Sztajermana [65], w których rozwiązano wiele klasycznych zagadnień metodą funkcji zmiennej zespolonej oraz metodą potencjałów.

Należy również wymienić prace Popowa [53], [54], [55], w których pokazano możliwość wykorzystania wielomianów ortogonalnych do rozwiązywania statycznych zagadnień kontaktowych. Przedstawiona metoda polegała na rozwinięciu jąder równań całkowych (do których prowadzą zagadnienia kontaktowe) w szeregi, których wyrazami są iloczyny stałej i dwóch tego samego typu wielomianów ortogonalnych. Jeden z nich był zawsze funkcją zmiennej całkującej, a drugi zmiennej przestrzennej. Dzięki takiej postaci jądra metoda ta prowadzi do równań algebraicznych, pozwalających na obliczenie współczynników rozwinięcia poszukiwanej funkcji odporu podłoża względem wielomianów wykorzystywanych w rozwinięciu jądra.

Z innych prac wykorzystujących wielomiany ortogonalne wymienimy prace: Borodaczjewa [7], Popowa i Słobodjanjuka [56] oraz Sejmowa [61].

1.3. Stacjonarne drgania fundamentu blokowego spoczywającego na podłożu sprężystym

Zagadnieniu drgań fundamentu na podłożu sprężystym poświęcono wiele opracowań. W pracach tych wykorzystano różne modele podłoża, poczynając od modelu Winklera do modelu typu klasycznej półprzestrzeni sprężystej. W zależności od modelu różny był stopień trudności pojawiających się przy rozwiązywaniu zagadnienia.

Model Winklera uwzględnili w swych pracach Kisiel [32], który rozpatrywał drgania własne i wymuszone sztywnej tarczy spoczywającej na

podłożu, wywołane przez harmonicznie zmienne obciążenie pionowe i poziome oraz Klasztorny, Langer, Mironowicz [33], którzy rozpatrywali sztywny trójwymiarowy blok o dowolnym kształcie i poziomej podszewie. W pracy [33] rozwiązano zagadnienie własne oraz zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznie zmiennym obciążeniem, uwzględniając efekty drugiego rzędu. Możemy tam również znaleźć omówienie innych prac dotyczących drgań fundamentów na podłożu Winklera.

Zagadnieniem drgań fundamentu na klasycznej półprzestrzeni sprężystej zajmowali się Arnold, Bycroft i Warburton [2]. Rozważyli oni zagadnienie drgań wymuszonych fundamentu kołowego, uwzględniając różne typy obciążenia. Podobny problem rozwiązał Luco [41], z tą różnicą, że brał pod uwagę półprzestrzeń uwarstwioną.

Płaskie zagadnienie rozwiązali Karasudhi, Keer, Lee [29], Oien [48] oraz Luco, Westman [42], wykorzystując metodę równań całkowych. Otrzymane wyniki miały postać całkową. Tym samym zagadnieniem zajmował się również Awojobi [3], stosując metodę dualnych równań całkowych. Z innych prac możemy wymienić prace Burjaka [8] i Siejmowa [61].

Zagadnienie drgań fundamentu o podstawie prostokątnej rozwiązali Thomson, Kobori [70], zakładając równomierny rozkład funkcji odporu podłoża. Dowolny kształt fundamentu rozpatrywali Wong i Luco [72].

Wielu autorów rozwiązało to zagadnienie, wykorzystując metodę elementów skończonych. Z prac, w których zastosowano tę metodę, należy wymienić cytowane już prace Lysmera i Kuhlemeyera [43] oraz Dasgupty i Kamesewara Rao [12].

1.4. Interakcja konstrukcji z podłożem

Oprócz wymienionych w poprzednim punkcie prac dotyczących zagadnienia stacjonarnych drgań fundamentu blokowego na podłożu sprężystym, omówimy prace dotyczące wpływu wzajemnego oddziaływania podłoża z obiektami bardziej złożonymi niż fundament. Z prac zajmujących się tą tematyką należy wymienić prace Parmelle [51] oraz Parmelle, Perelmana, Lee, Keera [52], w których rozważono drgania harmoniczne obiektu spoczywającego na półprzestrzeni sprężystej. Obiekt zbudowany był z dwóch elementów masowych (jeden z nich był fundamentem), połączonych więziami sprężystymi i tłumiącymi.

Problemem oddziaływania fal Rayleigha na obiekt zbudowany z fundamentu i połączonego z nim za pośrednictwem sprężystej belki elementu masowego zajmował się Simpson [62]. Rozważania swe ograniczył do zagadnienia płaskiego.

Do rozwiązywania tego typu zagadnień stosowano również metodę elementów skończonych. Stosowali ją między innymi: Chopra, Chakrabart i Dasgupta [10], Gutierrez, Chopra [27] oraz Vaish, Chopra [74], dyskretyzując tą metodą oprócz półprzestrzeni sprężystej również obiekt na niej spoczywający.

Zagadnieniem drgań złożonych układów dyskretnych, połączonych za pośrednictwem więzi sprężysto-lepkich z drgającą ostoją, której ruch był opisany dowolną daną funkcją rozważali Bielak [4] oraz Nien-Chien Tsai [45].

1.5. Zagadnienie drgań belki nieskończonej spoczywającej na podłożu sprężystym, obciążonej siłą ruchomą

Zagadnienie to jest jednym z ważniejszych zagadnień mechaniki konstrukcji, można je bowiem traktować jako uproszczony model zagadnienia drgań toru kolejowego obciążonego ruchomymi pojazdami.

Problemami tego typu zajmowało się wielu autorów. W pracach swych brali oni pod uwagę różne modele podłoża poczynając od najprostszego modelu Winklera do modelu klasycznej półprzestrzeni sprężystej włącznie.

I tak Kenney [30], Keer [31] i Rozenbajgier [58] rozważali zagadnienie belki spoczywającej na podłożu Winklera, obciążonej siłą skupioną [30], [31] oraz rozłożonym odcinkowo stałym obciążeniem [58]. W pracy [31] został uwzględniony wpływ sił osiowych. Belki półnieskończone i nieskończone, spoczywające na podłożu Winklera, rozpatrywał również Śniady [67].

Model typu półprzestrzeni sprężystej zastosowali Iabra [37], Filippow [18], Filippow, Kochmanjuk [19]. Założyli oni rozkład funkcji oporu podłoża równomiernie rozłożony w kierunku poprzecznym do toru. W wymienionych pracach belka była obciążona ruchomą siłą skupioną. Bardziej złożony typ obciążenia w postaci dwumasowych oscylatorów obciążonych siłą harmonicznie zmienną uwzględnili Szierientiejew, Filippow [69]. Zastosowanie modelu w postaci klasycznej półprzestrze-

ni sprężystej prowadziło w cytowanych pracach do rozwiązania w postaci podwójnych całek Fouriera. Otrzymanie wyników liczbowych było możliwe tylko przy zastosowaniu całkowania numerycznego, co w przypadku całek podwójnych nastrocza znaczne trudności.

Częściowe wyniki dotyczące przedstawionego w niniejszej pracy zagadnienia drgań belki są przedstawione w pracy autora [59]. Bogatą bibliografię dotyczącą zagadnień obciążeń ruchomych można znaleźć w monografii Fryby [21] oraz, w pracach [18] i [19].

Rozdział 2

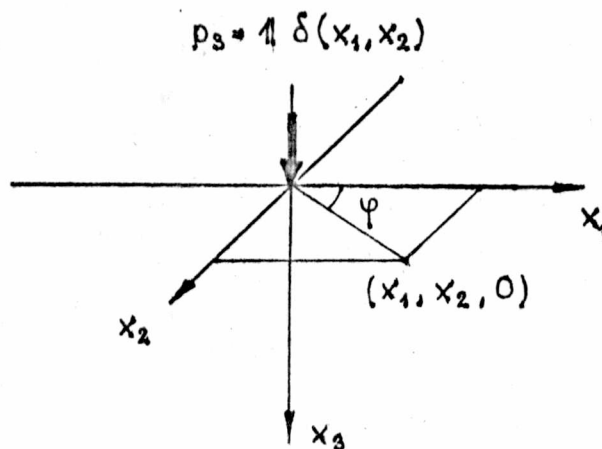
UPROSZCZONY MODEL INERCYJNEGO PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

2.1. Pewne własności przemieszczeniowych funkcji Greena dla statycznego zagadnienia półprzestrzeni

Punktem wyjścia do rozważań nad modelem podłoża sprężystego jest następujące spostrzeżenie: jeżeli półprzestrzeń sprężystą $x_3 \geq 0$, obciążymy na brzegu $x_3=0$ siłą skupioną $p_j = 1\delta(x_1, x_2)$, $p_1 = p_k = 0$, $j \neq i \neq k \neq j$, skierowaną w kierunku osi x_j , to wywołane nią pole przemieszczeń $U^j = [U_1^j, U_2^j, U_3^j]$ ma taką własność, że przemieszczenia U_k^j , $k \neq j$ w danym punkcie są kilkakrotnie mniejsze od przemieszczenia U_j^j . W celu ilustracji powyższej tezy rozpatrzmy następujące dwa przypadki:

Przypadek 1

Półprzestrzeń jest obciążona siłą skupioną $p_3 = 1\delta(x_1, x_2)$, $p_1 = p_2 = 0$ skierowaną wzdłuż osi x_3 , jak na rys.1, gdzie $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$.



Rys. 1

Odpowiednie funkcje przemieszczeń U_1^3, U_2^3, U_3^3 wyrażają się wtedy wzorami, [46] :

$$U_{\beta}^3 = \frac{x_{\beta}}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3}{R^3} - (1-2\nu) \frac{1}{R(R+x_3)} \right], \quad \beta=1,2, \quad (2.1)$$

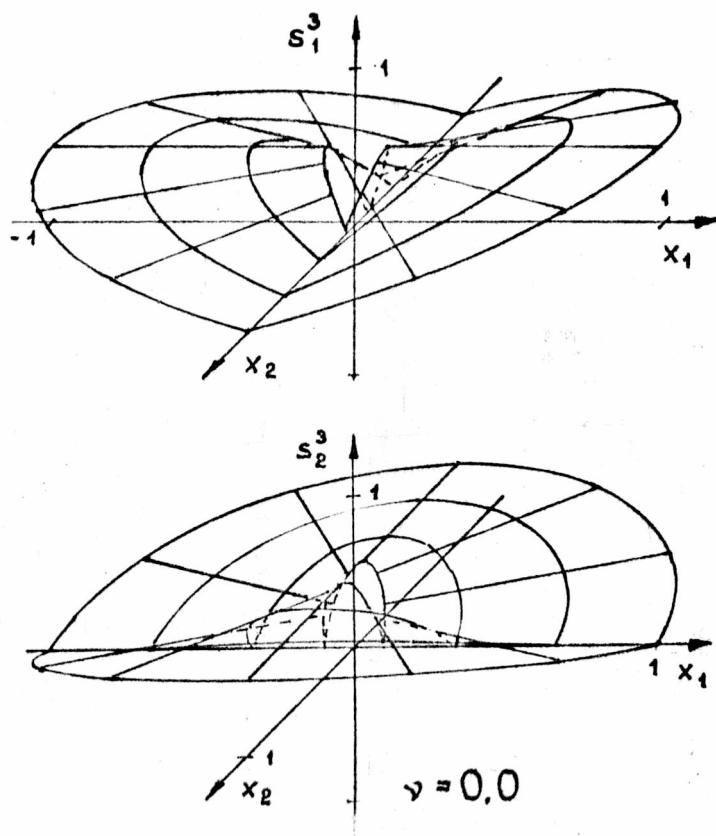
$$U_3^3 = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right],$$

gdzie $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ograniczając nasze rozważania do brzegu półprzestrzeni $x_3 = 0$ dostaniemy następujące zależności między przemieszczeniami U_1^3, U_2^3, U_3^3 :

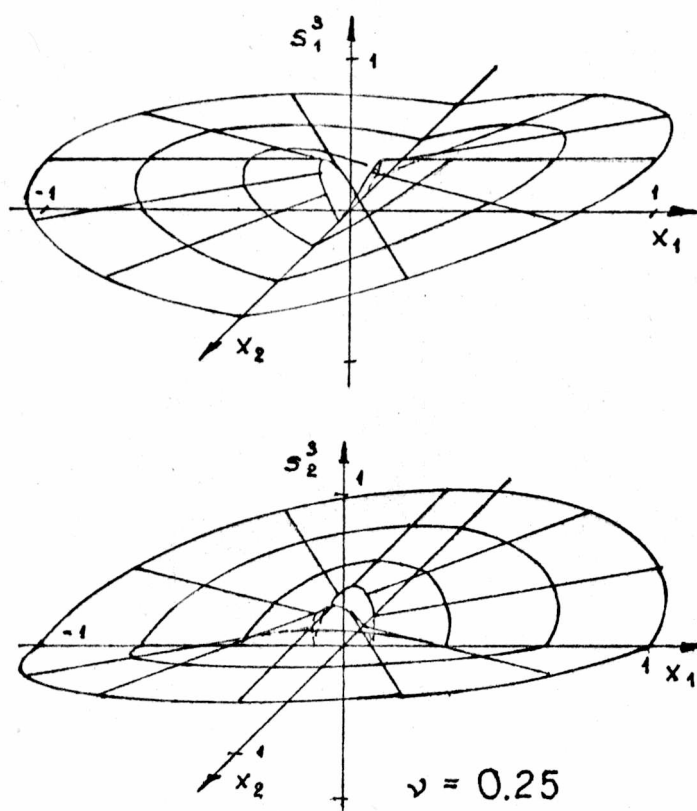
$$s_1^3(x_1, x_2, \nu) = \frac{U_1^3(x_1, x_2, 0)}{U_3^3(x_1, x_2, 0)} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cos \varphi \quad (2.2)$$

$$s_2^3(x_1, x_2, \nu) = \frac{U_2^3(x_1, x_2, 0)}{U_3^3(x_1, x_2, 0)} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sin \varphi$$

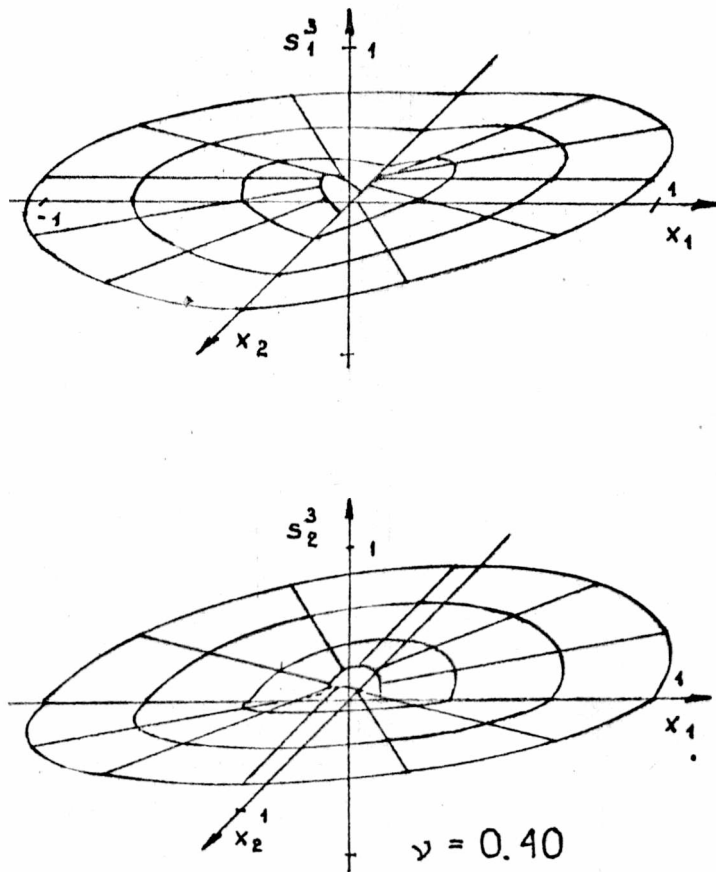
gdzie ν jest liczbą Poissona. Wykresy wprowadzonych funkcji s_1^3, s_2^3 dla wartości ν równych odpowiednio 0.0, 0.25, 0.40 zostały przedstawione na rys. 2, 3, 4.



Rys. 2



Rys. 3



Rys.4

Chcąc obliczyć wartości $s_1^3(x_1, x_2, v)$, $s_2^3(x_1, x_2, v)$ najmniej korzystne z punktu widzenia przyjętej tezy, wprowadzimy następujące funkcje zmiennej v :

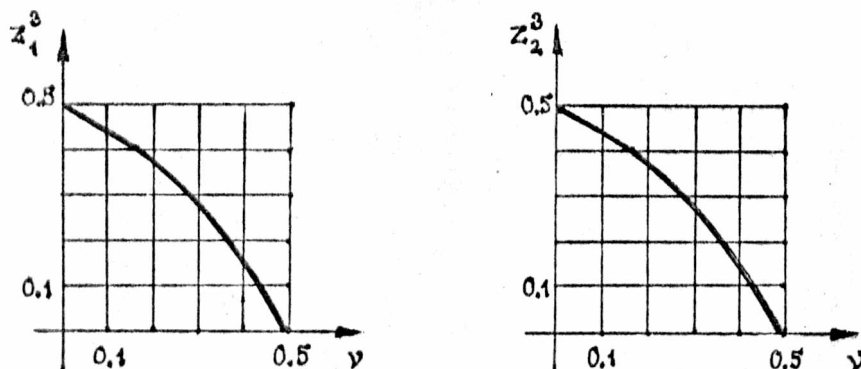
$$z_1^3(v) = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} |s_1^3(x_1, x_2, v)|, \quad (2.3)$$

$$z_2^3(v) = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} |s_2^3(x_1, x_2, v)|.$$

Wykorzystując wzory (2.2) opisujące funkcje s_1^3, s_2^3 otrzymamy zależności:

$$\begin{aligned} z_1^3(\nu) &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} , \\ z_2^3(\nu) &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} , \end{aligned} \quad (2.4)$$

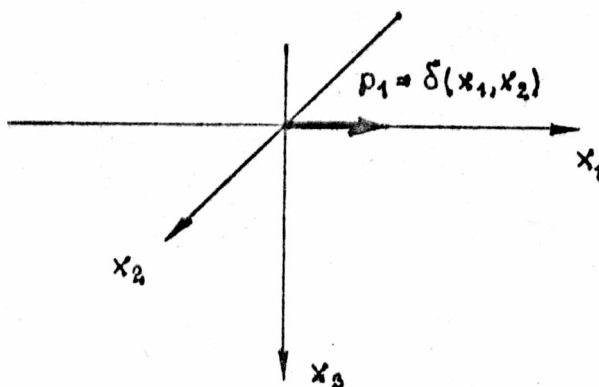
przedstawione w postaci wykresów na rys.5.



Rys.5

Przypadek 2

Półprzestrzeń sprężysta jest obciążona siłą styczną $p_1 = 1\delta(x_1, x_2)$, $p_2 = p_3 = 0$ skierowaną w kierunku osi x_1 , jak na rys.6.



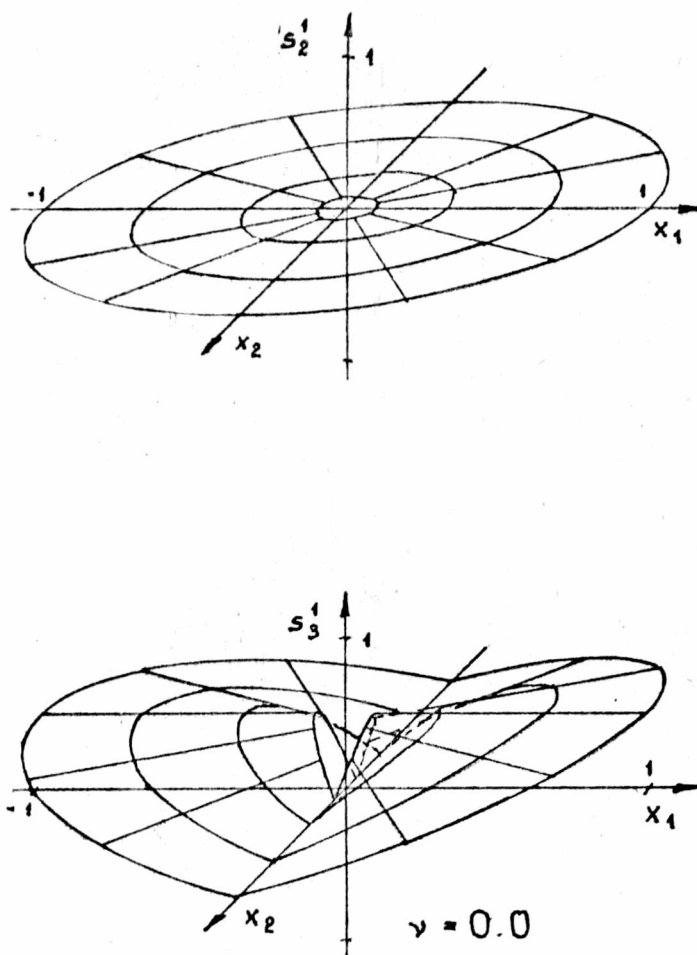
Rys.6

Podobnie jak w poprzednim przypadku rozważania ograniczymy do brzegu półprzestrzeni. Otrzymamy wtedy następujące funkcje opisujące zależności między przemieszczeniami U_1^1 , U_2^1 , U_3^1 , [46] :

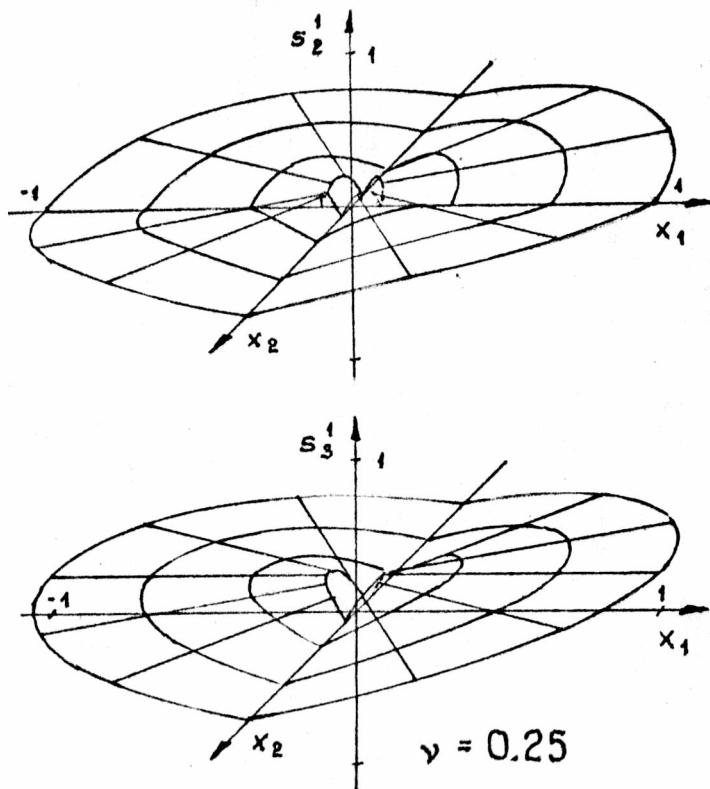
$$s_2^1(x_1, x_2, \nu) = \frac{U_2^1(x_1, x_2, 0)}{U_1^1(x_1, x_2, 0)} = \frac{2\nu \sin \varphi \cos \varphi}{2(1-\nu) + 2\nu \cos^2 \varphi}, \quad (2.5)$$

$$s_3^1(x_1, x_2, \nu) = \frac{U_3^1(x_1, x_2, 0)}{U_1^1(x_1, x_2, 0)} = \frac{(1-2\nu) \cos \varphi}{2(1-\nu) + 2\nu \cos^2 \varphi},$$

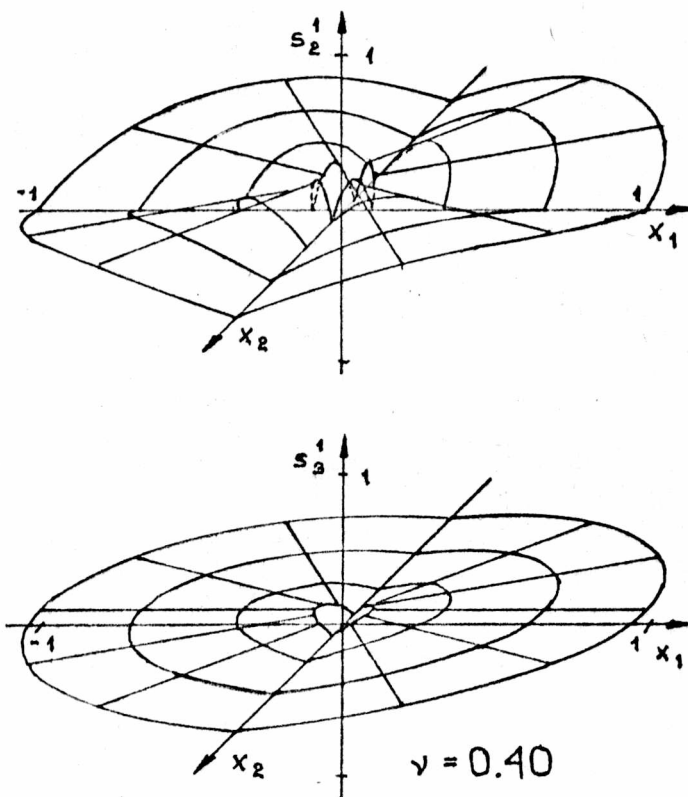
których przestrzenne wykresy zostały przedstawione na rys. 7, 8, 9.



Rys.7



Rys. 8



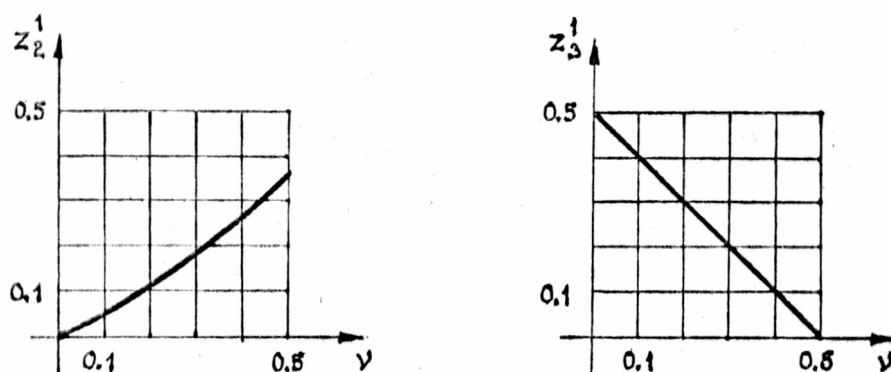
Rys. 9

Wprowadzimy również funkcje $z_2^1(\nu)$, $z_3^1(\nu)$ zdefiniowane wzorami

$$z_2^1(\nu) = \sup_{(x_1, x_2) \in R^2} |s_2^1(x_1, x_2, \nu)|, \quad (2.6)$$

$$z_3^1(\nu) = \sup_{(x_1, x_2) \in R^2} |s_3^1(x_1, x_2, \nu)|.$$

Ze względu na złożoną postać funkcji $s_2^1(x_1, x_2, \nu)$, $s_3^1(x_1, x_2, \nu)$ opisanych wzorem (2.5), wartości funkcji $z_2^1(\nu)$, $z_3^1(\nu)$ obliczono numerycznie. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys.10.



Rys.10

Analizując przedstawione na rys. 2-5, 7-10 wykresy widzimy, że potwierdzają one przyjętą na wstępie tezę.

Podobne rezultaty otrzymamy biorąc pod uwagę dowolne obciążenie $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$ rozłożone w obszarze Γ , dla którego $p_j \neq 0$, $p_k = 0$, $k \neq j$. Własność ta wynika stąd, że rozwiązanie odpowiadające temu obciążeniu jest jego splotem z funkcjami U_1^j , U_2^j , U_3^j :

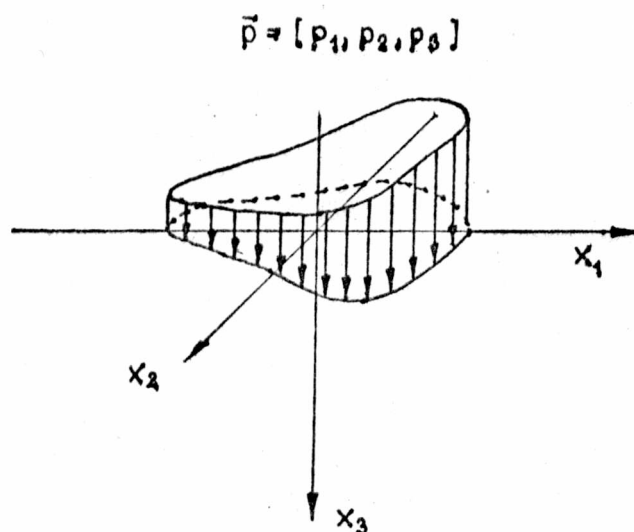
$$u_i^j(x_1, x_2, 0) = \iint_{\Gamma} p_j(\xi_1, \xi_2) u_i^j(x_1, x_2, 0, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.7)$$

gdzie $U_i^j(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia półprzestrzeni dla obciążenia $p_j = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$, $p_k = 0$, $k \neq j$.

Przedstawiona własność nasuwa pomysł założenia, że obciążenie $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$, $p_j \neq 0$, $p_k = 0$, $k \neq j$ działające w kierunku osi x_j wywołuje tylko przemieszczenia u_j , natomiast pozostałe funkcje przemieszczeń $u_k = 0$ dla $k \neq j$.

2.2. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia półprzestrzeni sprężystej - model podłoża sprężystego

Weźmy pod uwagę półprzestrzeń sprężystą, obciążoną na brzegu $x_3 = 0$ wektorem sił $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$, jak na rys. 11.



Rys. 11

Problem ten sprowadza się do rozwiązania w obszarze $x_3 > 0$ równań przemieszczeniowych elastokinetyki, [46], [47]

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \Theta + x_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \Theta + x_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \Theta + x_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

z warunkami brzegowymi

$$\epsilon_{31} = -p_1, \quad \epsilon_{32} = -p_2, \quad \epsilon_{33} = -p_3, \quad (2.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\ \Theta &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

λ, μ - stałe Lamego, δ_{ij} - delta Kroneckera.

Zagadnienie to możemy rozwiązać, rozkładając wektor obciążeń na składowe $\bar{p}_1 = [p_1, 0, 0]$, $\bar{p}_2 = [0, p_2, 0]$, $\bar{p}_3 = [0, 0, p_3]$ i znajdując (przez rozwiązanie układu (2.8) z nowymi warunkami brzegowymi) odpowiadające im pola przemieszczeń $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3$. Biorąc pod uwagę liniowość równań (2.8), rozwiązaniem tego układu z warunkami (2.9) będzie wtedy suma uzyskanych rozwiązań

$$\bar{u} = \bar{u}^1 + \bar{u}^2 + \bar{u}^3, \quad (2.10)$$

gdzie $\bar{u}^1 = [u_1^1, u_2^1, u_3^1]$, $\bar{u}^2 = [u_1^2, u_2^2, u_3^2]$, $\bar{u}^3 = [u_1^3, u_2^3, u_3^3]$ są rozwiązaniami odpowiadającymi odpowiednio obciążeniu $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$.

W dalszej części zajmiemy się zagadnieniem półprzestrzeni sprężystej, obciążonej wektorem sił $\bar{p}$ mającym postać jednej ze składowych $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ tzn. takim, że $p_j \neq 0$, $p_k = 0$ dla $k \neq j$.

W celu uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$L_1(w) = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \quad (2.11)$$

$$Q_1(u, v) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) , \quad 1 \neq j \neq k \neq 1, \quad j < k.$$

Wtedy układ równań (2.8) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} L_1(u_1) + X_1 &= Q_1(u_2, u_3) , \\ L_2(u_2) + X_2 &= Q_2(u_1, u_3) , \\ L_3(u_3) + X_3 &= Q_3(u_1, u_2) . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że obciążenie ma postać $\bar{p} = [0, 0, p_3]$. Na podstawie uzyskanych w punkcie 2.1 wyników stwierdzających, że przemieszczenia u_1^3, u_2^3 są kilkakrotnie mniejsze od przemieszczeń u_3^3 dla tego typu obciążenia założymy, że funkcje u_1^3, u_2^3 są równe zeru. Wtedy układ (2.12) redukuje się do jednego równania

$$L_3(u_3^3) + X_3 = 0 , \quad (2.13)$$

a odpowiedni warunek brzegowy przyjmie postać

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^3}{\partial x_3} = -p_3 . \quad (2.14)$$

Otrzymane równanie z warunkiem brzegowym (2.14) są równaniami opisującymi dla przyjętego typu obciążenia uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej.

Postępując analogicznie dla obciążeń $\bar{p} = [0, p_2, 0]$, $\bar{p} = [p_1, 0, 0]$, przyjmujemy odpowiednio $u_1^2, u_3^2 \equiv 0$ i $u_2^1, u_3^1 \equiv 0$. Otrzymamy wtedy

dalsze równania dla modelu uproszczonego:

$$\begin{aligned} L_2(u_2^2) + X_2 &= 0, & M \frac{\partial u_2^2}{\partial x_3} &= -p_2, \\ L_1(u_1^1) + X_1 &= 0, & M \frac{\partial u_1^1}{\partial x_3} &= -p_1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Równania te tworzą układ trzech niesprzężonych równań różniczkowych cząstkowych. Zakres ich wykorzystania zależy oczywiście od typu obciążenia. W przypadku gdy wektor $\bar{p} = [p_1, p_2, p_3]$ zawiera dwie składowe równe zeru, wykorzystujemy tylko jedno z równań, natomiast gdy $p_1, p_2, p_3 \neq 0$ bierzemy pod uwagę cały układ.

Wyprowadzonym równaniom (2.13)-(2.15) możemy nadać pewną ciekawą interpretację. W tym celu powróćmy do równań układu (2.12). Układ ten można byłoby rozwiązać metodą iteracji (przy założeniu zbieżności procesu iteracyjnego dla drugich pochodnych cząstkowych włącznie). Tak jak poprzednio dla ustalenia uwagi przyjmijmy $\bar{p} = [0, 0, p_3]$ i założymy, na podstawie rozważań z punktu 2.1, że $u_1^3, u_2^3 = 0$. Po podstawieniu tych wartości do trzeciego równania układu (2.12) możemy obliczyć przemieszczenia u_3^3 . Otrzymaną funkcję podstawimy do pierwszego równania tego układu i obliczymy u_1^3 (na tym etapie $u_2^3 \equiv 0$). Mając obliczone u_1^3, u_3^3 z drugiego równania układu obliczymy u_2^3 itd.

Wprowadzając oznaczenia $u_{j(n)}^k$, gdzie k jest wskaźnikiem typu obciążenia, j jest numerem składowej wektora przemieszczeń, a (n) określa krok iteracji, opisany algorytm możemy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u_{1(1)}^3 &= u_{2(1)}^3 = 0, \\ L_3(u_{3(n)}^3) + X_3 &= Q_3(u_{1(n)}^3, u_{2(n)}^3), \\ L_1(u_{1(n+1)}^3) + X_1 &= Q_1(u_{2(n)}^3, u_{3(n)}^3), \\ L_2(u_{2(n+1)}^3) + X_2 &= Q_2(u_{1(n+1)}^3, u_{3(n+1)}^3). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Procesowi iteracji podlegają również warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 -p_3 = \sigma_{33}^3(n) &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_3^3(n)}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1^3(n)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^3(n)}{\partial x_2} \right), \\
 -p_1 = \sigma_{31}^3(n+1) &= \mu \left(\frac{\partial u_1^3(n+1)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3(n)}{\partial x_1} \right), \\
 -p_2 = \sigma_{32}^3(n+1) &= \mu \left(\frac{\partial u_2^3(n+1)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3(n)}{\partial x_2} \right).
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Podobnie postępujemy w przypadku, gdy półprzestrzeń jest obciążona wektorem sił $\bar{p}_2 = [0, p_2, 0]$, $\bar{p}_1 = [p_1, 0, 0]$.

Opisany proces ma prostą interpretację fizyczną. W przypadku, gdy półprzestrzeń jest obciążona obciążeniem działającym w kierunku osi x_j , odbieramy punktom półprzestrzeni możliwość przemieszczeń w kierunkach x_i, x_k , gdzie $j \neq i \neq k \neq j$. Oczywiście przemieszczają się one wtedy tylko w kierunku x_j . Nakładamy teraz więzi uniemożliwiające zmianę otrzymanych przemieszczeń $u_{ij}^j(1)$ i pozwalamy na przemieszczenia punktów w kierunku x_i . W ten sposób otrzymamy funkcje przemieszczeń $u_{i1}^j(2)$. Następnie nakładamy więzi uniemożliwiające ruch punktów w kierunku osi x_k - otrzymamy wtedy $u_{k2}^j(2)$, itd. Jeżeli ograniczymy się do pierwszego kroku iteracji, otrzymamy następujące znane już równania:

$$\begin{aligned}
 L_1(u_1^1(1)) + X_1 &= 0, \quad \sigma_{31}^1(1) = \mu \frac{\partial u_1^1(1)}{\partial x_3} = -p_1, \\
 L_2(u_2^2(1)) + X_2 &= 0, \quad \sigma_{32}^2(1) = \frac{\partial u_2^2(1)}{\partial x_3} = -p_2, \\
 L_3(u_3^3(1)) + X_3 &= 0, \quad \sigma_{33}^3(1) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^3(1)}{\partial x_3} = -p_3,
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

opisujące uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Na podstawie przedstawionych rozważań widzimy, że równania te możemy traktować jako pierwsze przybliżenie otrzymane w wyniku iteracyjnego rozwiązywania równań elastokinetyki (2.8). Otrzymane dla uproszczo-

nego modelu równania (2.18) w pełnym zapisie mają następującą postać (dla uproszczenia opuścimy wskaźnik kroku iteracji i wskaźnik wyróżniający kierunek działającego obciążenia):

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + x_1 - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -p_1, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + x_2 - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -p_2, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + x_3 - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -p_3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Do podobnych wyników, ale na innej drodze doszli Świtka [68] i Murawski [44] - z tym, że otrzymali oni równania pozwalające na obliczenie tylko przemieszczeń pionowych u_3 . W niniejszej pracy uzyskaliśmy dwa dodatkowe równania umożliwiające obliczenie przemieszczeń poziomych u_1, u_2 , co znacznie rozszerza możliwości zastosowania uproszczonego modelu podłoża.

2.3. Wybrane własności rozwiązań równań opisujących uproszczony model podłoża

Rozwiązując równania opisujące model półprzestrzeni sprężystej dla danego typu obciążenia $\bar{p}_k = [p_1 \delta_{1k}, p_2 \delta_{2k}, p_3 \delta_{3k}]$, gdzie $k=1,2,3$, otrzymujemy pole funkcji przemieszczeń $u^k = [u_1^k, u_2^k, u_3^k]$. Obliczone na ich podstawie naprężenia dla $x_3=0$ spełniają następujące warunki:

1. Dla $k=1$, mamy $u_2^1, u_3^1 \equiv 0$. Stąd

$$\begin{aligned}\sigma_{32}^1 &= \mu \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial x_2} \right) \equiv 0, \\ \sigma_{33}^1 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^1}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^1}{\partial x_2} \right) = \lambda \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

W przedstawionych poniżej rozważaniach wykorzystamy wzór całkowy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\partial u_j^i}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0, \quad j=1,2,3, \quad i=1,2, \quad (2.21)$$

spełniony w przypadku gdy $u_j \rightarrow 0$ dla $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$.

Wykonajmy całkowanie funkcji naprężeń σ_{33}^1 na całej powierzchni brzegu $x_3 = 0$. Korzystając z warunku wypromieniowania $u_1^1 \rightarrow 0$ gdy $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$, otrzymamy na podstawie wzoru (2.21) zależność

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \sigma_{33}^1 dx_1 dx_2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0. \quad (2.22)$$

Warunek $\sigma_{33} = 0$ w przypadku klasycznej półprzestrzeni sprężystej opisanej równaniami (2.8) jest spełniony lokalnie. Natomiast dla modelu uproszczonego, który powstał z klasycznej półprzestrzeni przez wprowadzenie więzi uniemożliwiających ruch punktów w kierunku x_2, x_3 (dla rozważanego obciążenia) jest spełniony tylko globalnie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int \sigma_{33}^1 dx_1 dx_2 = 0. \quad (2.23)$$

2. W przypadku $k=2$, mamy $u_1^2, u_3^2 \equiv 0$, a odpowiednie funkcje naprężeń mają postać

$$\begin{aligned}\sigma_{31}^2 &= \mu \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^2}{\partial x_1} \right) \equiv 0, \\ \sigma_{33}^2 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3^2}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^2}{\partial x_2} \right) = \lambda \frac{\partial u_2^2}{\partial x_2}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Postępując podobnie jak dla $k=1$ otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{33}^2 dx_1 dx_2 = 0. \quad (2.25)$$

W tym przypadku warunek $\sigma_{33} = 0$ jest również spełniony globalnie.

3. Analogicznie dla $k=3$ mamy $u_1^3, u_2^3 = 0$, a odpowiednie naprężenia wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned}\sigma_{31}^3 &= \mu \left(\frac{\partial u_1^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{\partial u_3^3}{\partial x_1}, \\ \sigma_{32}^3 &= \mu \left(\frac{\partial u_2^3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^3}{\partial x_2} \right) = \mu \frac{\partial u_3^3}{\partial x_2}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

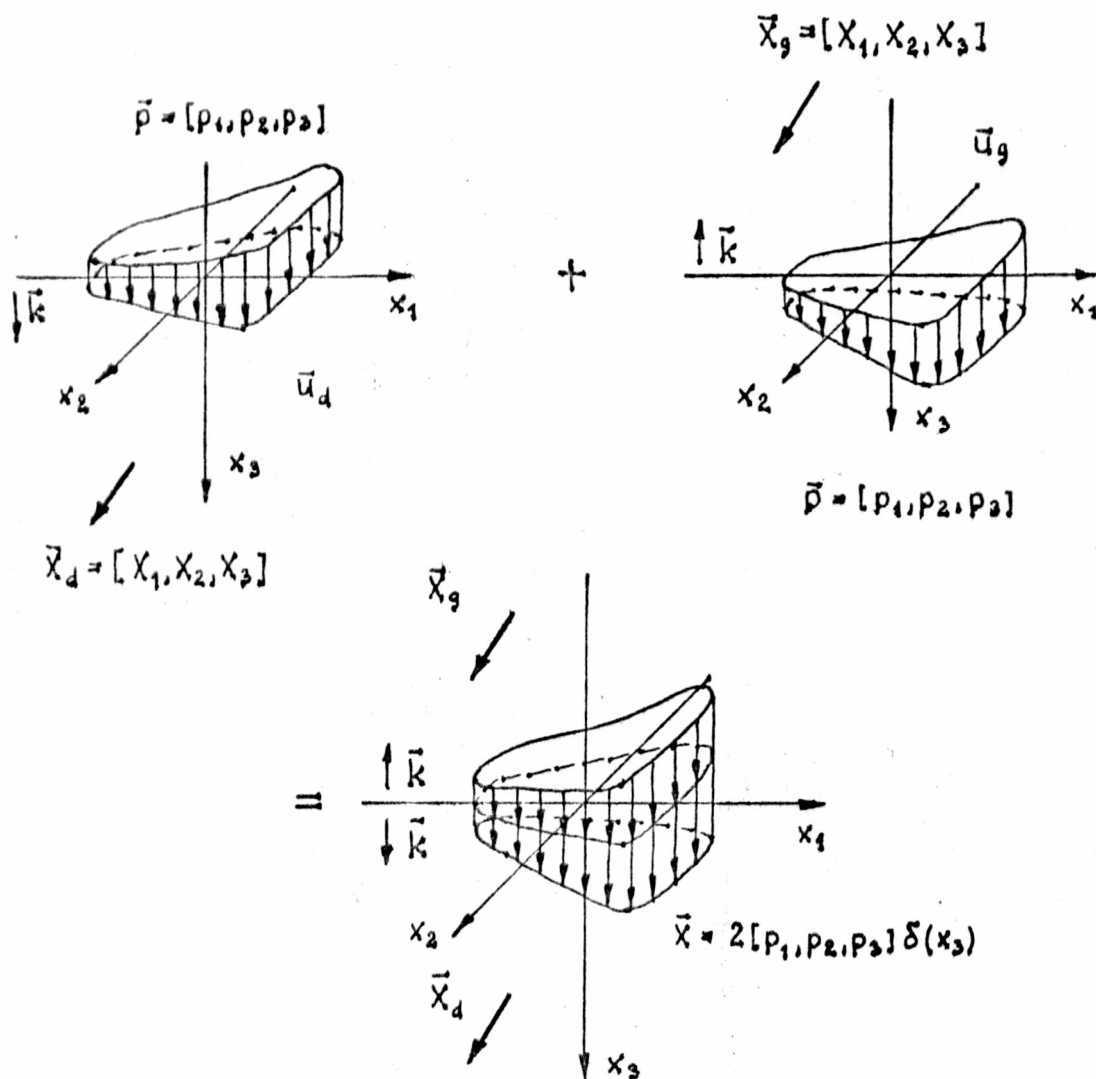
Stąd po wykorzystaniu wzoru (2.21) otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{31}^3 dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{32}^3 dx_1 dx_2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Niespełnianie przez funkcje naprężeń $\sigma_{33}^1, \sigma_{33}^2, \sigma_{31}^3, \sigma_{32}^3$ lokalnych warunków brzegowych wynika z nałożenia na punkty półprzestrzeni więzi odbierających im pewne stopnie swobody. Musi to prowadzić do powstania lokalnych naprężeń na brzegu, mimo braku działania na nim odpowiednich obciążeń zewnętrznych. Pokazaliśmy jednak, że warunki te

są globalnie spełnione.

Drugą ciekawą własnością rozwiązań równań, opisujących uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej jest to, że możemy je otrzymać rozważając zamiast zagadnienia półprzestrzeni z warunkami brzegowymi $\sigma_{33} = -p_3(x_1, x_2)$, $\sigma_{32} = -p_2(x_1, x_2)$, $\sigma_{31} = -p_1(x_1, x_2)$ i siłami masowymi $X_i = r_i(x_1, x_2) \delta(x_3 - h_i)$, $i=1,2,3$, zagadnienie przestrzeni sprężystej, zastępując powyższe warunki siłami masowymi $X_i = 2\delta(x_3) p_i(x_1, x_2) + r_i(x_1, x_2) \delta(x_3 - h_i) + r_i(x_1, x_2) \delta(x_3 + h_i)$. Możliwość takiego postępowania wynika z symetrii funkcji przemieszczeń $\bar{u}^d = [u_1^d, u_2^d, u_3^d]$, $\bar{u}^g = [u_1^g, u_2^g, u_3^g]$, wywołanych odpowiednio obciążeniem $\bar{p} + X_d$ i $\bar{p} + X_g$ przedstawionym na rys.12, gdzie przez $\bar{k}$ oznaczono kierunek rozciągania się półprzestrzeni względem płaszczyzny X_1X_2 .



Rys. 12

Własność tę możemy zweryfikować przez formalne rozwiązanie zagadnienia półprzestrzeni i przestrzeni sprężystej (mowa tu oczywiście o modelu uproszczonym) np. metodą transformacji Fouriera i porównanie otrzymanych wyników.

Przedstawiona własność pozwala, po uprzedniej zamianie zagadnienia półprzestrzeni zagadnieniem przestrzeni sprężystej, na całkowitą algebraizację procesu rozwiązywania w przypadku zastosowania metody transformacji Fouriera.

Własność tę wykorzystamy przy rozwiązywaniu niektórych przedstawionych w dalszej części pracy szczegółowych zagadnień mechaniki konstrukcji.

2.4. Związki modelu uproszczonego z innymi modelami podłoża sprężystego

Rozpatrzmy warstwę sprężystą o grubości H , opisaną równaniami (2.19). Założymy, że przemieszczenia u_i można przedstawić w postaci

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = v_i(x_1, x_2, t) z_i(x_3), \quad i=1,2,3, \quad (2.28)$$

gdzie $z_i(x_3)$ są pewnymi danymi funkcjami, mającymi własność $z_i(0) = 1, z_i(H) = 0$ dla $i=1,2,3$. Podstawiając związek (2.28) do równań opisujących model (2.19) i zakładając $X_i=0$ otrzymamy równania:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) z_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \mu z_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \mu v_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_3^2} - \rho z_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) z_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \mu z_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \mu v_2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_3^2} - \rho z_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= 0, \quad (2.29) \\ (\lambda + 2\mu) v_3 \frac{\partial^2 z_3}{\partial x_3^2} + \mu z_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \mu z_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} - \rho z_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned}\mu v_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_3} &= -p_1, \\ \mu v_2 \frac{\partial z_2}{\partial x_3} &= -p_2, \\ (\lambda + 2\mu) v_3 \frac{\partial z_3}{\partial x_3} &= -p_3.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Pomnóżmy równania (2.29) odpowiednio przez z_1, z_2, z_3 i scałkujmy je względem zmiennej x_3 w granicach $\langle 0, H \rangle$. Korzystając z zależności

$$\begin{aligned}\int_0^H \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_3^2} z_i dx_3 &= z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_3} \Big|_0^H - \int_0^H \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_3} \right)^2 dx_3 = \\ &= - \frac{\partial z_i}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} - \int_0^H \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_3} \right)^2 dx_3\end{aligned}\tag{2.31}$$

oraz warunków brzegowych (2.30) otrzymamy następujące równania:

$$\begin{aligned}- (\lambda + 2\mu) m_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - \mu m_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \mu k_1 v_1 + \gamma m_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= p_1, \\ - (\lambda + 2\mu) m_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} - \mu m_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \mu k_2 v_2 + \gamma m_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= p_2, \\ (\lambda + 2\mu) k_3 v_3 - \mu m_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} - \mu m_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \gamma m_3 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= p_3.\end{aligned}\tag{2.32}$$

gdzie

$$k_1 = \int_0^H \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_3} \right)^2 dx_3, \quad m_1 = \int_0^H z_1^2 dx_3, \quad i=1,2,3.$$

Równania (2.32) są podobne do równań otrzymanych przez Pasternaka [49] , [50] i Własowa, Lieontiejewa [73], opisujących podłoże dwuparametrowe. Różnica polega na tym, że równania (2.32) nie zawierają wyrazów sprzęgających.

Pomijając niektóre wyrazy w układzie (2.32), otrzymamy trójkierunkowy model Winklera

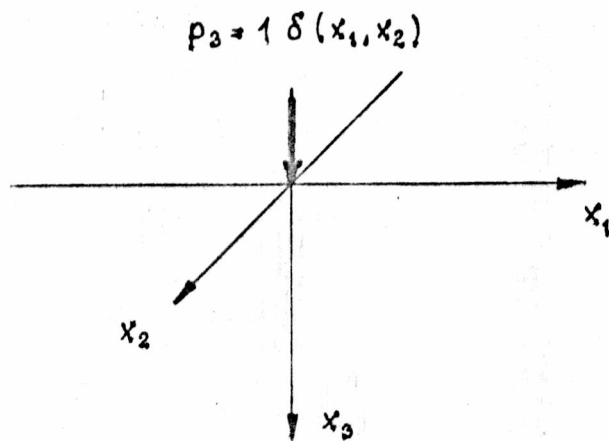
$$\begin{aligned}\mu^* k_1 v_1 &= p_1 , \\ \mu k_2 v_2 &= p_2 , \\ (\lambda + 2\mu) k_3 v_3 &= p_3 .\end{aligned}\tag{2.33}$$

Na podstawie powyższych rozważań widoczne jest, że wprowadzony model uproszczony półprzestrzeni sprężystej jest modelem pośrednim między klasyczną półprzestrzenią sprężystą, opisaną równaniami elastodynamiki, a modelem najprostszym - podłożem Winklera. Koresponduje on również ze znanym modelem dwuparametrowym. Jest on modelem znacznie bogatszym, jeżeli chodzi o uwzględnienie rzeczywistych procesów zachodzących w podłożu w porównaniu z modelem Winklera, a jednocześnie dającym możliwość efektywnego rozwiązania szeregu zagadnień technicznych. Rozwiązania tych zagadnień w przypadku zastosowania klasycznej półprzestrzeni sprężystej są tak skomplikowane, że nie pozwala to na ich wykorzystanie w praktyce inżynierskiej.

2.5. Przemieszczeniowe funkcje Greena dla uproszczonego modelu podłoża

W punkcie tym, ze względu na dalsze zastosowania, zajmiemy się rozwiązaniem kilku ważnych z punktu widzenia teorii sprężystości zagadnień, których wynikiem będą przemieszczeniowe funkcje Greena.

Rozważmy uproszczony model półprzestrzeni sprężystej obciążonej na brzegu siłą $p_3 = 1\delta(x_1, x_2)$, jak na rys.13.



Rys. 13

Problem ten sprowadza się do rozwiązania równania

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (2.34)$$

z warunkiem brzegowym

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -1\delta(x_1, x_2) , \quad (2.35)$$

$$u_3 \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty .$$

Zagadnienie to rozwiążemy metodą transformacji Fouriera. W tym celu wykonajmy na równaniu (2.34) i warunku brzegowym (2.35)₁ dwuwymiarową transformację Fouriera określoną wzorem

$$\bar{w}(\alpha_1, \alpha_2) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2. \quad (2.36)$$

Dostaniemy wtedy następujące związki:

$$-\mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \bar{u}_3 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_3^2} = 0, \quad (2.37)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}. \quad (2.38)$$

Rozwiązując równanie różniczkowe zwyczajne (2.37) i uwzględniając warunek wypromieniowania (2.35)₂ otrzymamy

$$\bar{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = A(\alpha_1, \alpha_2) e^{-\beta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}} x_3}, \quad (2.39)$$

gdzie $\beta^2 = \mu / \lambda + 2\mu$. Stąd po obustronnym zróżniczkowaniu równania (2.39) względem x_3 i uwzględnieniu warunku brzegowego (2.38) dostaniemy

$$\bar{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = [2\pi(\lambda + 2\mu)\beta]^{-1} \frac{e^{-\beta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}} x_3}}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.40)$$

Wykonajmy na równaniu (2.40) odwrotną dwuwymiarową transformację Fouriera:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}} x_3 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2}}{2\pi(\lambda + 2\mu)\beta(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (2.41)$$

Po wykorzystaniu wzorów całkowych ([47] str. 494, 496 oraz [14])

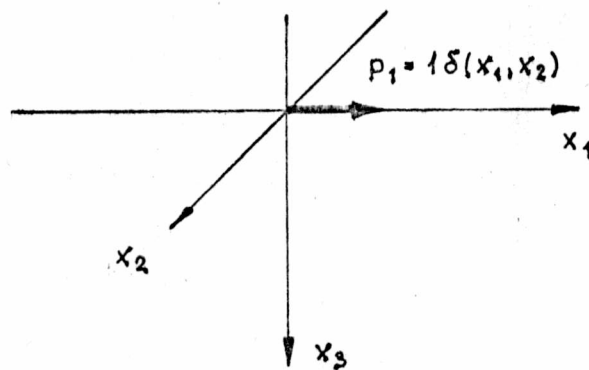
$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} a - 1 \alpha x}}{(\alpha^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_0(\eta(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}), \quad (2.42)$$

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|\omega| a) e^{-i\omega x} d\omega = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.43)$$

wynik końcowy ma postać

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\mu} \beta \frac{1}{R_3}, \quad R_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \beta^2. \quad (2.44)$$

Rozważmy z kolei przypadek działania na półprzestrzeń sprężystą stycznej siły skupionej $p_1 = 1\delta(x_1, x_2)$, jak na rys.14.



Rys. 14

Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania równania

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (2.45)$$

z warunkiem brzegowym

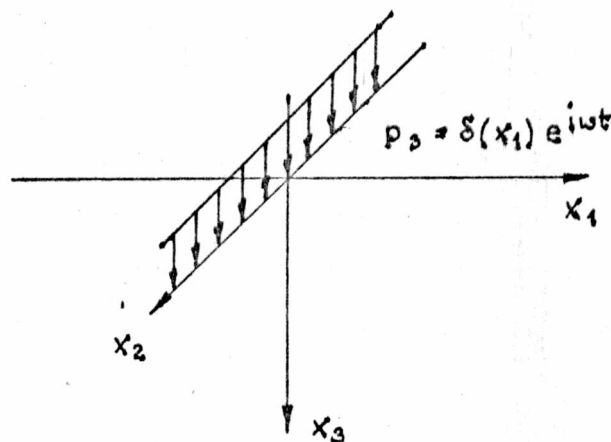
$$- p_1 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -1\delta(x_1, x_2). \quad (2.46)$$

Ponieważ tok postępowania przy rozwiązywaniu tego równania jest analogiczny do stosowanego w poprzednim zagadnieniu, ograniczymy się do podania wyniku końcowego

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\mu} \beta \frac{1}{R_1}, \quad R_1^2 = \beta^2 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (2.47)$$

Zajmiemy się teraz znalezieniem funkcji Greena dla stacjonarnych zagadnień dynamicznych mających swe odpowiedniki w klasycznej teorii sprężystości - znane pod nazwą zagadnień Lamba.

Weźmy pod uwagę uproszczony model półprzestrzeni obciążonej siłą harmonicznym zmienną $p_3 = \delta(x_1) e^{i\omega t}$, jak na rys.15.



Rys. 15

Ze względu na niezależność rozkładu obciążenia od zmiennej x_2 wykorzystywać będziemy następującą postać równania opisującego model:

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad (2.48)$$

oraz warunek brzegowy

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -1\delta(x_1) e^{i\omega t}, \quad (2.49)$$

$$u_3 \rightarrow 0 \text{ dla } x_1^2 + x_3^2 \rightarrow \infty.$$

Ograniczając nasze rozważania do zagadnienia stacjonarnego założymy funkcję przemieszczeń w postaci

$$u_3(x_1, x_3, t) = U_3(x_1, x_3) e^{i\omega t}. \quad (2.50)$$

Po podstawieniu wyrażenia (2.50) do równania (2.48) otrzymamy

$$c_2^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} + \omega^2 U_3 = 0, \quad (2.51)$$

gdzie $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, $c_2^2 = \mu / \rho$ są odpowiednio kwadratami prędkości rozchodzenia się fali podłużnej i poprzecznej. Nałożymy na powyższe równanie oraz warunek brzegowy

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = -1\delta(x_1), \quad (2.52)$$

jednowymiarową transformatę Fouriera zdefiniowaną wzorem

$$\bar{u}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1. \quad (2.53)$$

Wykonanie tej operacji prowadzi do związków:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial x_3^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} (\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}) \bar{U}_3, \quad (2.54)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.55)$$

W celu rozwiązania równania różniczkowego (2.54) przyjmujemy, że funkcja $\bar{U}_3(\alpha_1, x_3)$ ma postać

$$\bar{U}_3(\alpha_1, x_3) = A(\alpha_1) e^{\xi x_3}. \quad (2.56)$$

Po podstawieniu powyższej zależności do równania (2.54), wykonaniu prostych algebraicznych przekształceń i wykorzystaniu warunku wypromieniowania (2.49)₂ otrzymamy

$$\bar{U}_3(\alpha_1, x_3) = A(\alpha_1) e^{-\frac{c_2}{c_1} \left(\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} x_3}. \quad (2.57)$$

Zróżniczkujemy związek (2.57) względem x_3 . Po wykorzystaniu warunku brzegowego (2.55) i po prostych przekształceniach dostaniemy

$$\bar{U}_3(\alpha_1, x_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{c_1 c_2} \frac{e^{-\frac{c_2}{c_1} \left(\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} x_3}}{\left(\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.58)$$

Wykonajmy odwrotną transformację Fouriera

$$\bar{U}_3(x_1, x_3) = \frac{\beta}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{c_2}{c_1} \left(\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} x_3 - \alpha_1 x_1}}{\left(\alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_1. \quad (2.59)$$

Po wykorzystaniu wzoru (2.42) oraz zależności ([40] wz. 52.5, 52.6)

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{i\pi\nu/2} H_\nu^{(1)}(z e^{i\pi/2}),$$

$$\text{dla } -\pi < \arg z < \frac{1}{2} \pi,$$

(2.60)

$$K_\nu(z) = -\frac{1}{2} \pi i e^{-i\pi\nu/2} H_\nu^{(2)}(z e^{-i\pi/2}),$$

$$\text{dla } -\frac{1}{2} \pi < \arg z < \pi,$$

gdzie $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i N_\nu(z)$, $H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - i N_\nu(z)$ są funkcjami Hankela, otrzymamy dwa rozwiązania

$$U_3(x_1, x_3) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\mu} i H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2}\right), \\ -\frac{\beta}{2\mu} i H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2}\right), \end{cases} \quad (2.61)$$

gdzie $\beta = c_2/c_1$. Po uwzględnieniu wzoru (2.50) dostaniemy

$$u_3(x_1, x_3, t) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\mu} i H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2}\right) e^{i\omega t}, \\ -\frac{\beta}{2\mu} i H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2}\right) e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (2.62)$$

Istnienie dwóch niezależnych rozwiązań związane jest z niejednoznacznością całki (2.59). W celu wyboru odpowiedniego rozwiązania skorzystamy z fizycznej interpretacji uzyskanych wyników. Analizując rozwinięcia asymptotyczne otrzymanych funkcji (wzór (2.62)) zauważymy, że pierwsza z nich opisuje falę zbieżną w kierunku początku układu współrzędnych, a więc falę nie mającą fizycznej interpretacji (patrz [46], str. 561 - 564), druga natomiast falę rozbieżną istniejącą w rzeczywistości. Końcowy wynik ma zatem postać

$$u_3(x_1, x_3, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} \left(\pi N_0 \left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2} \right) + \right. \\ \left. + i \pi J_0 \left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_3^2} \right) \right) e^{i\omega t} \quad (2.63)$$

Ograniczając się do przypadku $x_3 = 0$ i wprowadzając oznaczenia

$$A_3(x_1) = -\beta \pi N_0 \left(\frac{\omega}{c_2} |x_1| \right), \quad (2.64)$$

$$B_3(x_1) = -\beta \pi J_0 \left(\frac{\omega}{c_2} |x_1| \right)$$

możemy napisać

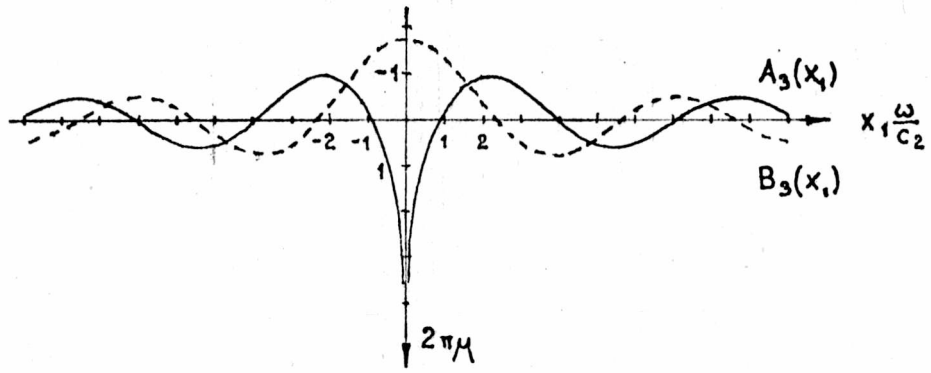
$$u_3(x_1, 0, t) = \frac{1}{2\pi\mu} (A_3(x_1) + i B_3(x_1)) e^{i\omega t} = \\ = \frac{1}{2\pi\mu} V_3(x_1) e^{i(\omega t + \varphi_3(x_1))}, \quad (2.65)$$

gdzie

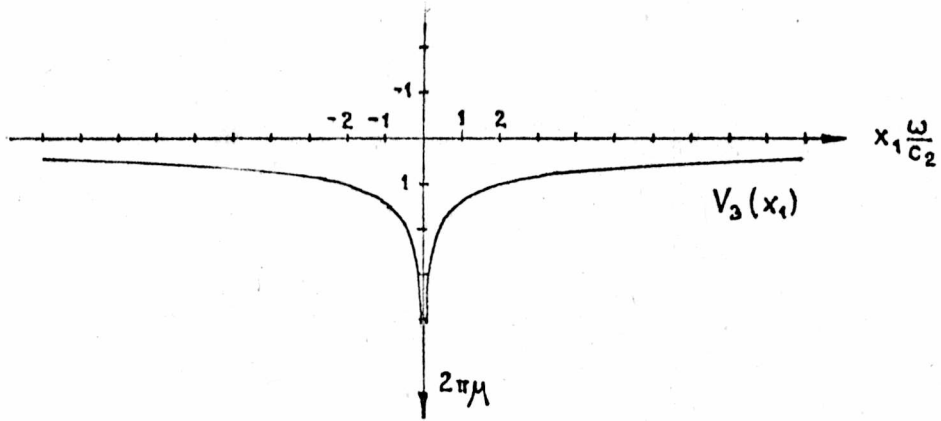
$$V_3^2(x_1) = A_3^2(x_1) + B_3^2(x_1),$$

$$\varphi_3(x_1) = \arctg [B_3(x_1) / A_3(x_1)].$$

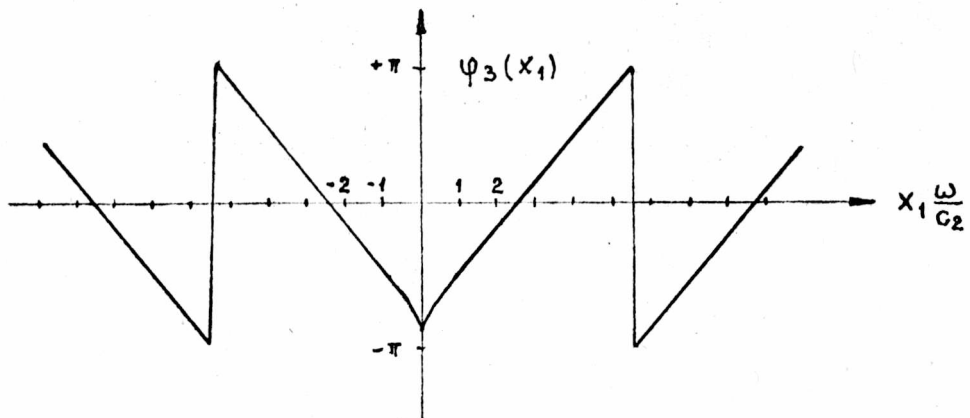
Wykresy wprowadzonych funkcji $A_3(x_1)$, $B_3(x_1)$, $V_3(x_1)$, $\varphi_3(x_1)$ dla $\nu = 0.25$ przedstawiono na rys. 16, 17, 18.



Rys. 16

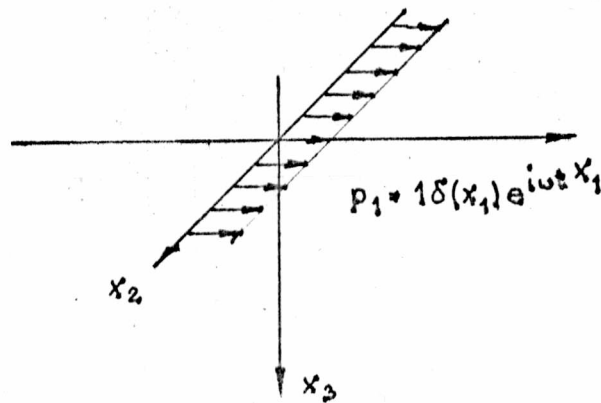


Rys. 17



Rys. 18

Postępując analogicznie znajdziemy rozwiązanie następnego zagadnienia. Rozważmy półprzestrzeń sprężystą obciążoną na brzegu styczną siłą harmonicznie zmienną $p_1 = 1\delta(x_1) e^{i\omega t}$, $p_2 = p_3 = 0$, jak na rys. 19.



Rys. 19

Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania następującego równania (podobnie jak poprzednio ograniczymy się do znalezienia rozwiązania stacjonarnego) :

$$c_2^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \omega^2 U_1 = 0 \quad (2.66)$$

z warunkiem brzegowym

$$\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = -1\delta(x_1) , \quad (2.67)$$

gdzie $U_1(x_1, x_3) e^{i\omega t} = u_1(x_1, x_3, t)$. Ze względu na analogiczny sposób rozwiązania tego i poprzedniego zagadnienia, ograniczymy się do podania rozwiązania

$$u_1(x_1, x_3, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} \left(\pi N_0 \left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{\beta^2 x_1^2 + x_3^2} \right) + \right. \\ \left. + i \pi J_0 \left(\frac{\omega}{c_2} \sqrt{\beta^2 x_1^2 + x_3^2} \right) \right) e^{i\omega t} . \quad (2.68)$$

Wykresy funkcji

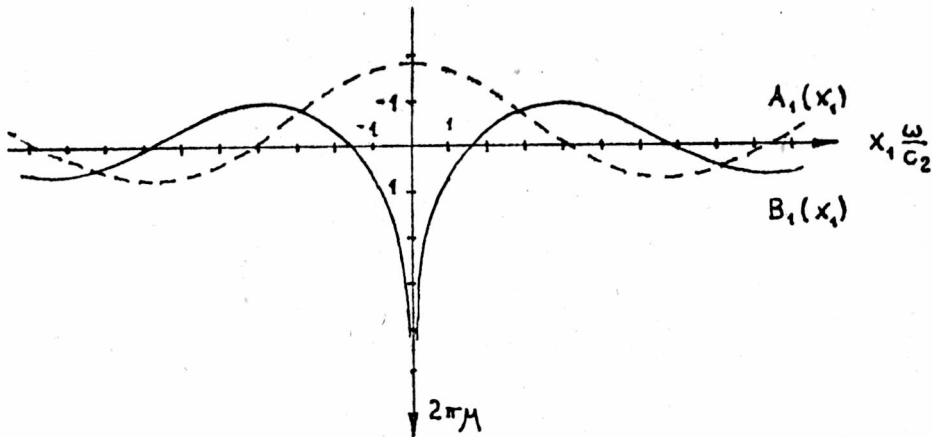
$$A_1(x_1) = -\beta \pi N_0 \left(\beta \frac{\omega}{c_2} |x_1| \right) ,$$

$$B_1(x_1) = -\beta \pi J_0 \left(\beta \frac{\omega}{c_2} |x_1| \right) ,$$

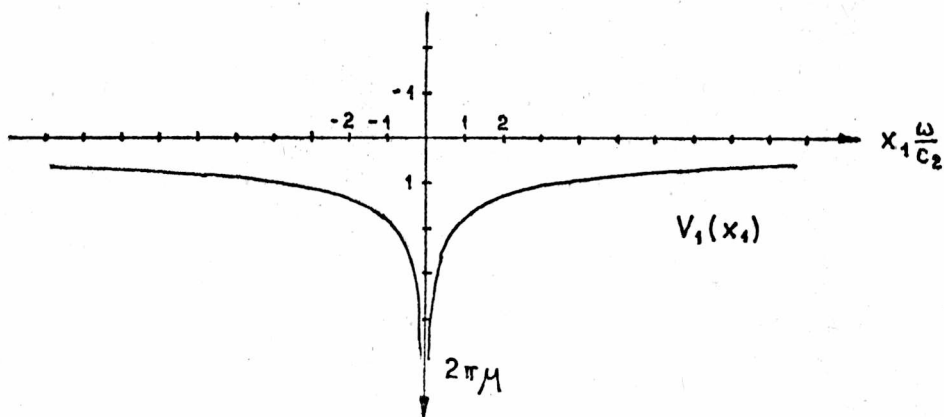
$$V_1(x_1) = \left[A_1^2(x_1) + B_1^2(x_1) \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (2.69)$$

$$\varphi_1(x_1) = \arctg [B_1(x_1)/A_1(x_1)] .$$

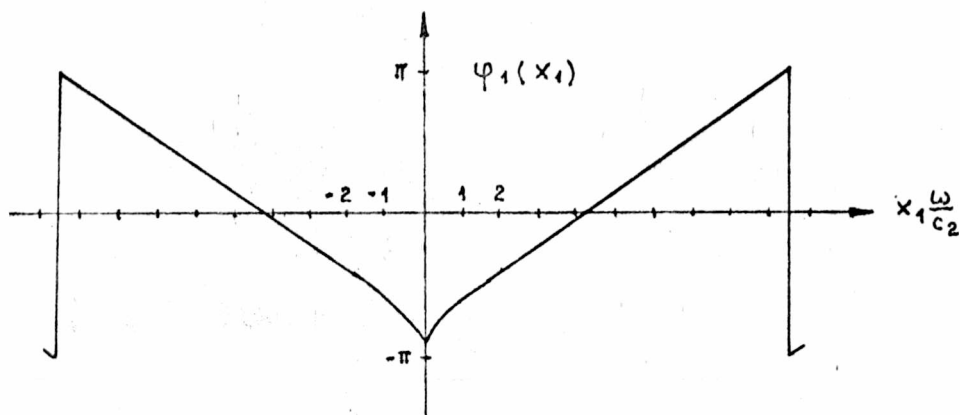
dla $\nu = 0.25$ przedstawione są na rys.20, 21, 22.



Rys.20

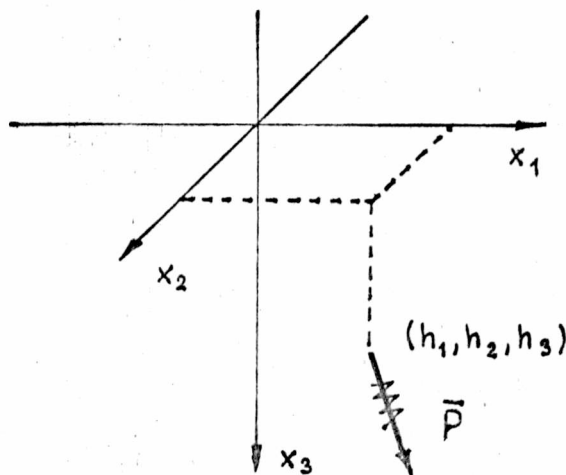


Rys.21



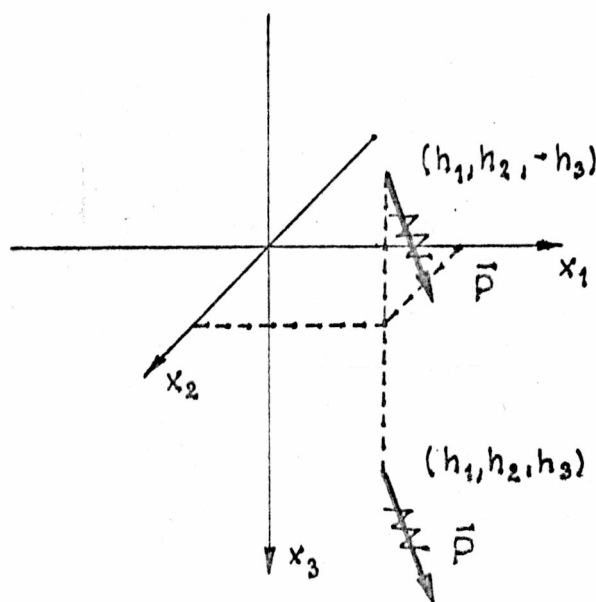
Rys.22

Na zakończenie tego punktu rozwiążemy zadanie będące odpowiednikiem przestrzennego zagadnienia Lamba [16], [46]. Rozważmy uproszczony model inercyjnej półprzestrzeni sprężystej obciążonej wektorem sił $\bar{p}(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{P} \delta(x_1 - h_1, x_2 - h_2, x_3 - h_3) e^{i\omega t}$ przyłożonych w dowolnym punkcie (h_1, h_2, h_3) półprzestrzeni $x_3 \gg 0$, jak na rys.23.



Rys.23

Zagadnienie to w myśl rozważań przeprowadzonych w punkcie 2.3 jest równoważne zagadnieniu przestrzeni sprężystej obciążonej symetryczną względem płaszczyzny $x_1 x_2$ parą sił $\bar{P} \delta(x_1 - h_1, x_2 - h_2, x_3 - h_3) \cdot e^{i\omega t}$, $\bar{P} \delta(x_1 - h_1, x_2 - h_2, x_3 + h_3) e^{i\omega t}$ przyłożonych odpowiednio w punktach (h_1, h_2, h_3) i $(h_1, h_2, -h_3)$, jak na rys.24.



Rys.24

Założmy, że przestrzeń sprężysta została obciążona siłą $\bar{P}\delta(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}$ przyłożoną w punkcie $(0,0,0)$. Ze względu na charakter obciążenia i poczynione założenia rozwiązania $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ poszukiwać będziemy w postaci

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad i=1,2,3. \quad (2.70)$$

Równania opisujące model przestrzeni sprężystej przyjmą wtedy postać

$$\begin{aligned} c_2^2 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} \right) + c_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{x_1}{\vartheta} + \omega^2 U_1 &= 0, \\ c_2^2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} \right) + c_1^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + \frac{x_2}{\vartheta} + \omega^2 U_2 &= 0, \\ c_2^2 \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) + c_1^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} + \frac{x_3}{\vartheta} + \omega^2 U_3 &= 0, \\ U_i \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \quad (2.71)$$

gdzie $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\varrho$, $c_2^2 = \mu/\varrho$. Po nałożeniu na równania (2.71) potrójnej transformaty Fouriera zdefiniowanej wzorem

$$\bar{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.72)$$

i po prostych przekształceniach, otrzymamy następujące wzory na transformaty funkcji U_i :

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{\bar{X}_1}{\varrho(c_2^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + c_1^2\alpha_1^2 - \omega^2)} , \\ \bar{U}_2 &= \frac{\bar{X}_2}{\varrho(c_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) + c_1^2\alpha_2^2 - \omega^2)} , \\ \bar{U}_3 &= \frac{\bar{X}_3}{\varrho(c_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + c_1^2\alpha_3^2 - \omega^2)} . \end{aligned} \quad (2.73)$$

W przypadku siły skupionej $X_i = P_i \delta(x_1, x_2, x_3)$ mamy

$$\bar{X}_i = P_i (2\pi)^{-\frac{3}{2}} , \quad i=1, 2, 3 , \quad (2.74)$$

stąd po podstawieniu powyższego wzoru do układu (2.73) i po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymamy wzór

$$U_i = \frac{P_i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \varrho} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}}{c_2^2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2) + c_1^2\alpha_i^2 - \omega^2} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 , \quad (2.75)$$

$i=1, 2, 3 , \quad i \neq j \neq k \neq i .$

Wykorzystując wzór całkowy, ([63] str. 337)

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \omega^2} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

gdzie

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

otrzymamy wzory na funkcje U_i w postaci zamkniętej

$$U_i = \frac{P_i}{4\pi \rho c_2^2 c_1} \frac{e^{-i\omega r_i}}{r_i}, \quad r_i^2 = \frac{x_j^2}{c_2^2} + \frac{x_k^2}{c_2^2} + \frac{x_l^2}{c_1^2},$$

$i=1,2,3, \quad i \neq j \neq k \neq l.$

Na podstawie związku (2.70) wzór na przemieszczenia u_i przyjmie postać

$$u_i = \frac{P_i}{4\pi \rho c_2^2 c_1} \frac{e^{i(\omega(t-r_i))}}{r_i},$$

gdzie r_i określone zostało we wzorze (2.77).

W przypadku, gdy punktem przyłożenia siły $\bar{P}$ jest dowolny punkt (h_1, h_2, h_3) , wielkości r_i wyrażają się wzorem

$$r_i^2 = \frac{(x_j - h_j)^2}{c_2^2} + \frac{(x_k - h_k)^2}{c_2^2} + \frac{(x_l - h_l)^2}{c_1^2},$$

$i=1,2,3, \quad i \neq j \neq k \neq l.$

Powróćmy teraz do zagadnienia obciążenia przestrzeni dwiema symetrycznymi względem płaszczyzny $X_1 X_2$ siłami. W myśl zasady superpozycji poszukiwane funkcje przemieszczeń będą opisane wzorami

$$u_i = \frac{P_i}{4\pi \rho c_2^2 c_1} \frac{e^{i\omega(t-r_{i1})}}{r_{i1}} + \frac{e^{i\omega(t-r_{i2})}}{r_{i2}}, \quad (2.80)$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_{1\ 1,2}^2 &= \frac{(x_1-h_1)^2}{c_1^2} + \frac{(x_2-h_2)^2}{c_2^2} + \frac{(x_3+h_3)^2}{c_2^2}, \\ r_{2\ 1,2}^2 &= \frac{(x_1-h_1)^2}{c_2^2} + \frac{(x_2-h_2)^2}{c_1^2} + \frac{(x_3+h_3)^2}{c_2^2}, \\ r_{3\ 1,2}^2 &= \frac{(x_1-h_1)^2}{c_2^2} + \frac{(x_2-h_2)^2}{c_2^2} + \frac{(x_3+h_3)^2}{c_1^2}. \end{aligned}$$

W tym miejscu zdefiniujemy funkcje obrotów, które wykorzystamy w drugiej części pracy. Obroty te są określone wzorami:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\ \psi_2 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

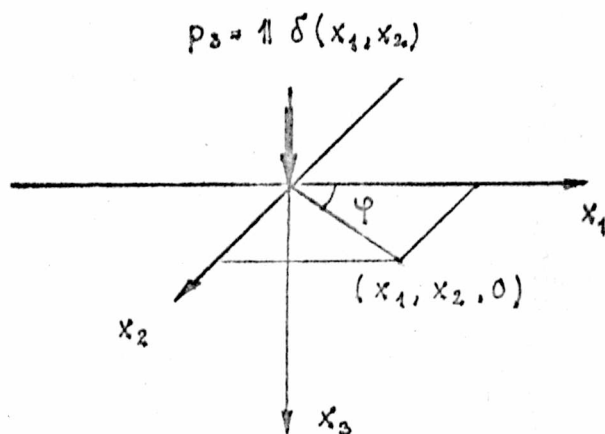
$$\psi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

2.6. Analiza porównawcza funkcji Greena

W celu potwierdzenia założeń przyjętych przy wyprowadzeniu równań opisujących uproszczony model półprzestrzeni sprężystej oraz w celu sprawdzenia przedstawionej koncepcji modelu, dokonamy porównania przemieszczeniowych funkcji Greena dla modelu i dla klasycznej półprzestrzeni. Jeżeli uda się pokazać, że różnica między nimi nie jest znaczna, uzasadniona będzie poprawność przedstawionego modelu oraz jego przydatność do analizy innych zagadnień teorii konstrukcji.

Wynika to stąd, że każde rozwiązanie, dla innych pod względem rozkładu typów obciążenia, uzyskujemy biorąc ich splot z odpowiednimi funkcjami Greena. Ponieważ ograniczymy się do porównania funkcji Greena w skończonym obszarze, wyniki będą szczególnie słuszne dla zagadnień, w których obciążenie jest rozłożone w ograniczonym obszarze (np. w zagadnieniach stempla). Rozważania ograniczymy do przypadku $x_3 = 0$, ważnego z punktu widzenia wzajemnych oddziaływań między półprzestrzenią a danym obiektem.

Rozpatrzmy przypadek statycznego obciążenia półprzestrzeni wektorem sił $\vec{p} = [0, 0, 1] \delta(x_1, x_2)$, jak na rys.25, gdzie $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $\varphi = \arctg[x_2/x_1]$.



Rys.25

Rozwiązanie dla klasycznej półprzestrzeni ma postać [46]:

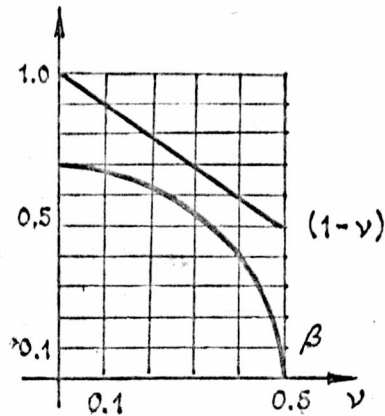
$$u_3^p(x_1, x_2, 0) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \frac{1}{r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (2.82)$$

natomiast dla modelu uproszczonego mamy (wzór (2.44))

$$u_3^m(x_1, x_2, 0) = \frac{\beta}{2\pi\mu} \frac{1}{r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (2.83)$$

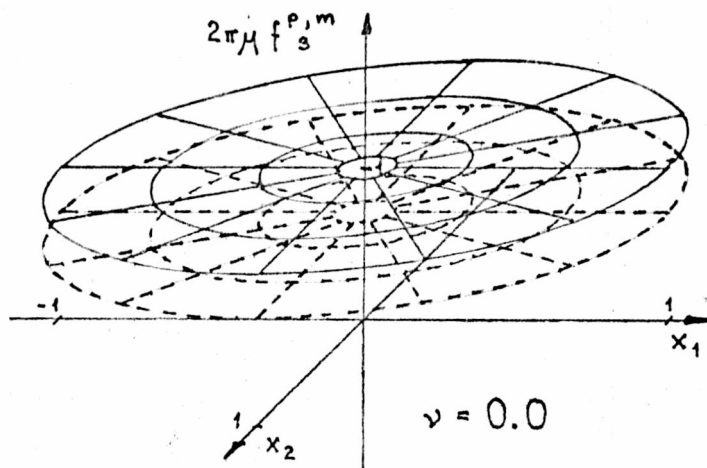
gdzie $\beta = c_2/c_1$ jest stosunkiem prędkości rozchodzenia się fali poprzecznej i podłużnej w rozpatrywanym ośrodku. Jak widzimy wzory (2.82) i (2.83) różnią się tylko stałymi współczynnikami zależnymi od liczby Poissona ν . Wartości ich dla różnych ν przedstawiono na

rys.26 .

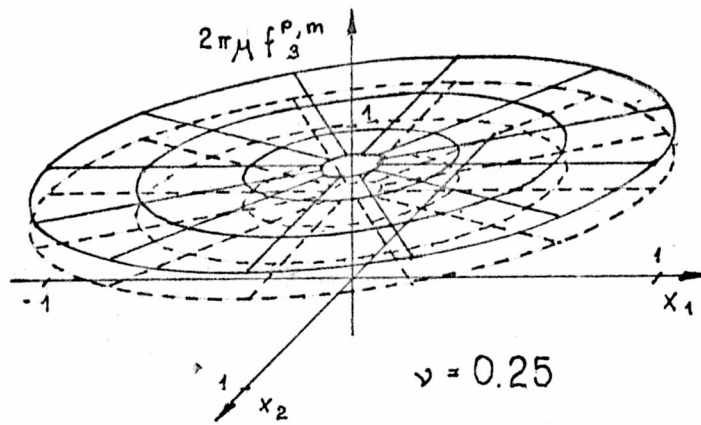


Rys.26

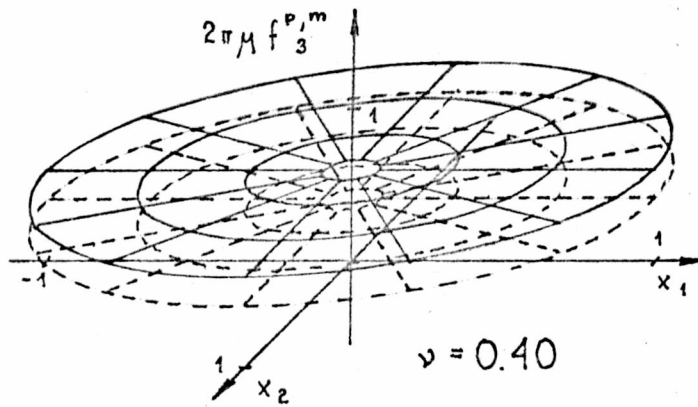
Ponieważ w ogólnym przypadku dla innych typów obciążenia (jak zobaczymy to w następnym zagadnieniu) współczynniki te mogą zależeć od kąta $\varphi = \arctg(x_2/x_1)$, przedstawimy również ich przestrzenne wykresy, jako funkcje zmiennych φ i r . Wykresy dla $\nu = 0.0, 0.25, 0.40$ zostały przedstawione odpowiednio na rys.27, 28, 29, gdzie linią ciągłą oznaczono wykresy funkcji $f_3^p(\varphi, r) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu}$, a przerywaną funkcji $f_3^m(\varphi, r) = \frac{\beta}{2\pi\mu}$.



Rys.27



Rys.28

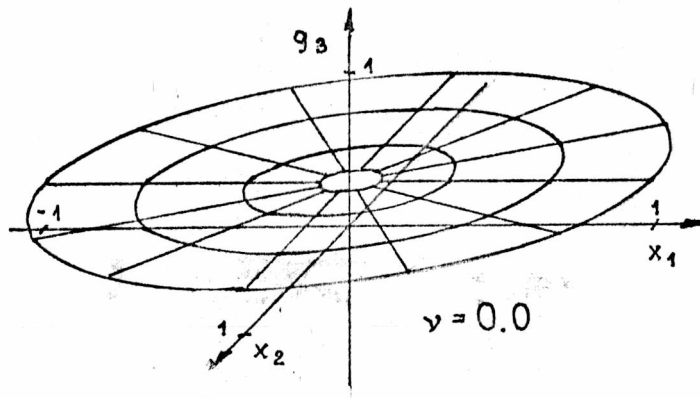


Rys.29

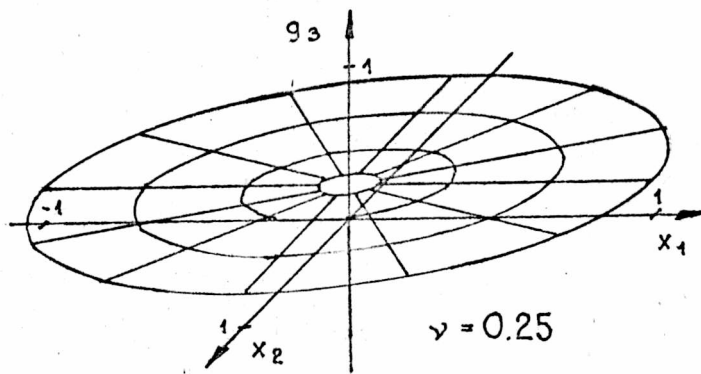
Dla tych samych wartości ν przedstawiono również wykresy funkcji

$$g_3(\varphi, r) = \left| \frac{u_3^p(x_1, x_2, 0) - u_3^m(x_1, x_2, 0)}{u_3^p(x_1, x_2, 0)} \right|, \quad (2.84)$$

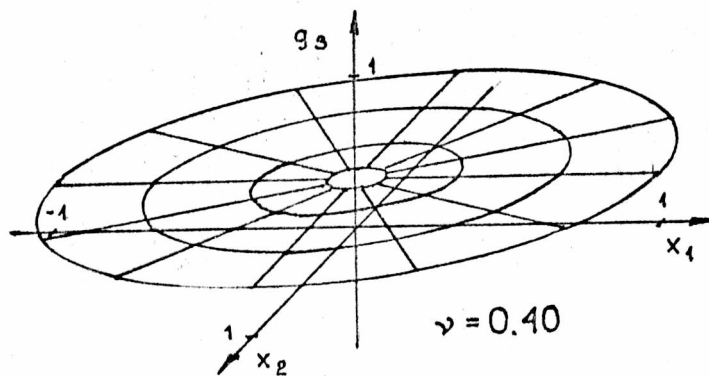
będącej funkcją względnego odchylenia rozwiązań dla uproszczonego modelu od rozwiązań dla klasycznej półprzestrzeni sprężystej. Wykresy te przedstawiono na rys.30, 31, 32.



Rys.30

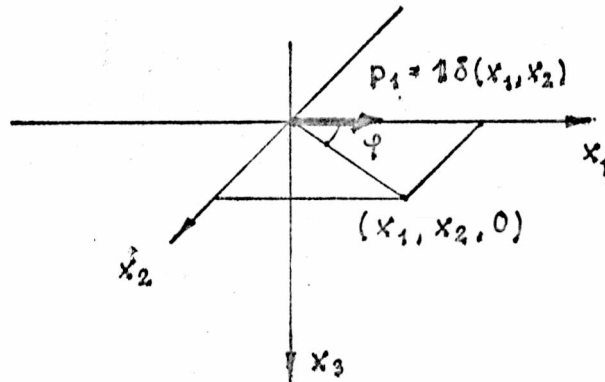


Rys.31



Rys.32

Zmieniając typ obciążenia półprzestrzeni na obciążenie o postaci $\bar{p} = [1, 0, 0] \delta(x_1, x_2)$, jak na rys.33 ,



Rys.33

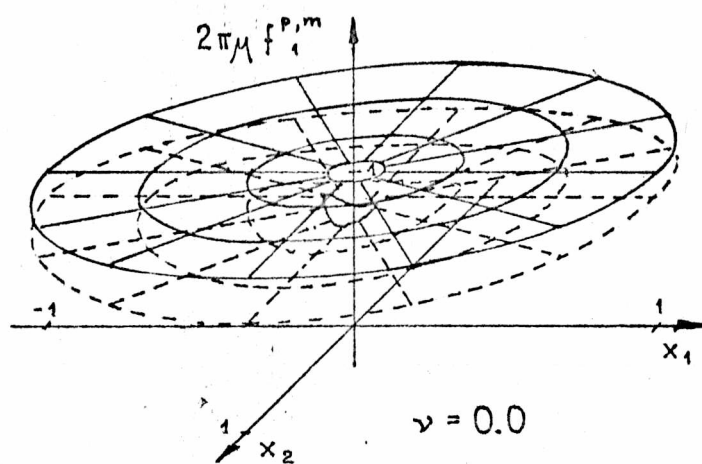
otrzymamy odpowiednio wzory: dla półprzestrzeni sprężystej [46]

$$\begin{aligned} u_1^p(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{2\pi\mu} \left((1-\nu) \frac{1}{r} + \nu \frac{x_1^2}{r^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \left((1-\nu) + \nu \cos^2 \varphi \right) \frac{1}{r} = f_1^p(\varphi) \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

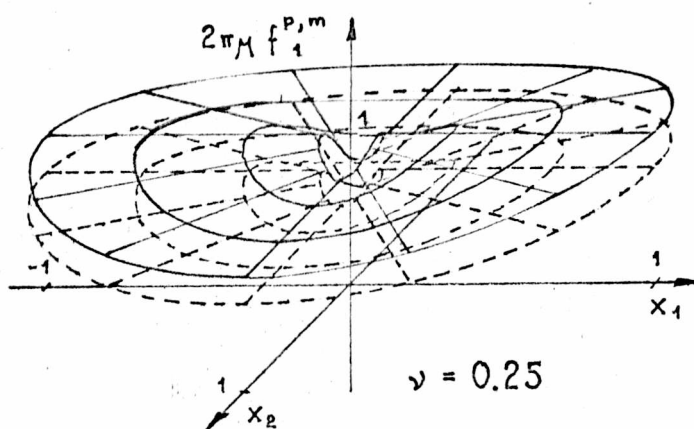
dla modelu podłoża (patrz (2.47))

$$\begin{aligned} u_1^m(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{2\pi\mu} \beta \frac{1}{R} = \frac{\beta}{2\pi\mu} \left(\frac{1}{\beta^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r} = f_1^m(\varphi) \frac{1}{r}, \\ R^2 &= \beta^2 x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \quad (2.86)$$

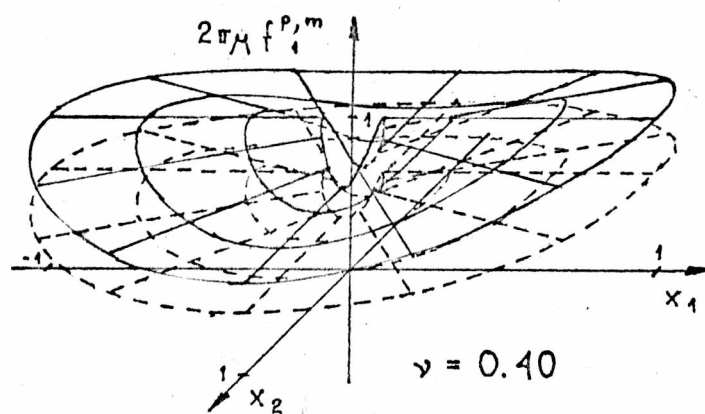
Wzory te różnią się mnożnikami $f_1^p(\varphi)$, $f_1^m(\varphi)$ będącymi funkcjami kąta φ . Wykresy ich dla wartości $\nu = 0.0, 0.25, 0.40$ zostały przedstawione na rys.34, 35, 36.



Rys. 34



Rys. 35

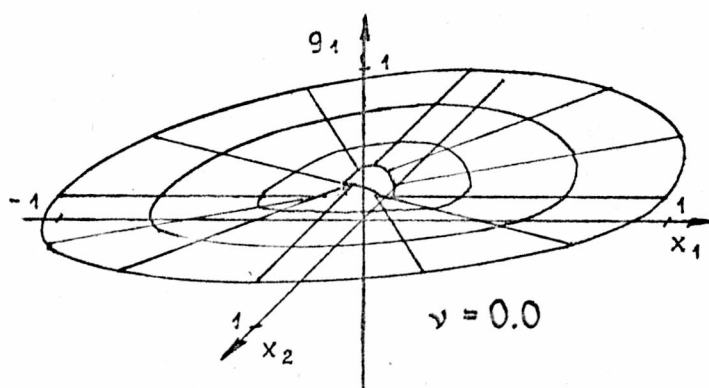


Rys. 36

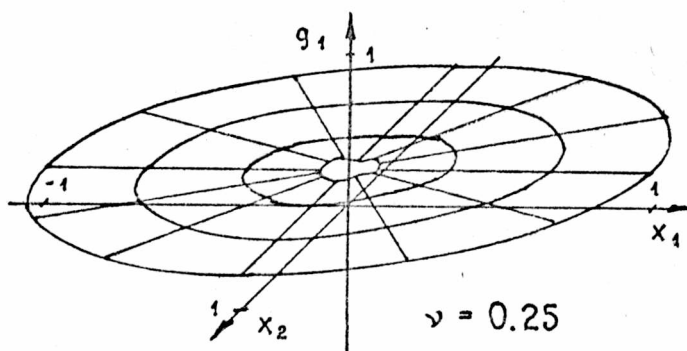
Podobnie jak poprzednio dla tych samych wartości liczby Poissona przedstawimy wykresy funkcji $g_1(\varphi, r)$:

$$g_1(\varphi, r) = \left| \frac{u_1^p(x_1, x_2, 0) - u_1^m(x_1, x_2, 0)}{u_1^p(x_1, x_2, 0)} \right| . \quad (2.87)$$

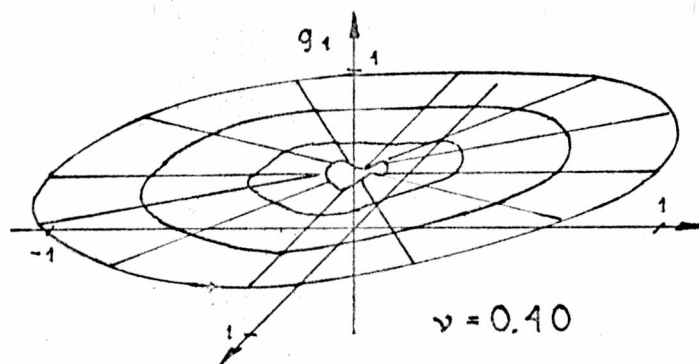
Wykresy te zostały przedstawione na rys.37, 38, 39.



Rys.37



Rys.38



Rys.39

Analizie poddano również przemieszczeniowe funkcje Greena dla stacjonarnych zagadnień dynamicznych.

Rozważmy półprzestrzeń sprężystą obciążoną siłą harmonicznie zmienną $\bar{p} = [0, 0, 1] \delta(x_1) e^{i\omega t}$, jak na rys.15. Rozwiązanie dla modelu określone jest wzorem (patrz (2.63))

$$u_3^m(x_1, 0, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} (\pi N_0(\alpha|x_1|) + i\pi J_0(\alpha|x_1|)) e^{i\omega t}, \quad (2.88)$$

gdzie $\alpha = \omega/c_2$. Ze względu na całkowitą postać rozwiązania dla półprzestrzeni sprężystej, [1], [46]

$$u_3^p(x_1, 0, t) = - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 \sqrt{\alpha_1^2 - k_1^2}}{N(\alpha_1)} e^{-\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad (2.89)$$

gdzie

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad N(\alpha_1) = (2\alpha_1^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha_1^2 \sqrt{\alpha_1^2 - k_1^2} \sqrt{\alpha_1^2 - k_2^2},$$

oba rozwiązania rozwinieśmy w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju, [5]:

$$\begin{aligned}
 u_3(x_1, 0, t) &= - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n}^3(\nu) + i B_{2n}^3(\nu)) T_{2n}(x_1) = \\
 &= - \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}^3(\nu) e^{i(\omega t + \varphi_{2n}^3)} T_{2n}(x_1), \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

gdzie $T_{2n}(x) = \cos(n \arccos x)$ są wielomianami Czebyszewa I rodzaju,

$$(U_{2n}^3(\nu))^2 = (A_{2n}^3(\nu))^2 + (B_{2n}^3(\nu))^2,$$

$$\varphi_{2n}^3(\nu) = \arctg (B_{2n}^3(\nu) / A_{2n}^3(\nu)).$$

Skorzystamy przy tym z bezwymiarowej postaci wzoru (2.89)

$$u_3^p(x_1, 0, t) = - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 - \beta^2} e^{-i\alpha u x_1} du}{(2u^2 - 1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{u^2 - \beta^2}}, \quad (2.91)$$

$$\beta^2 = c_2^2 / c_1^2 = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu),$$

uzyskanej przez wprowadzenie w (2.89) podstawienia $u = \alpha_1 \frac{c_2}{\omega}$. Problemy związane z otrzymaniem powyższych i występujących w następnym zagadnieniu rozwinięć przedstawimy w rozdziale 4.

Uzyskane wyniki dla $\nu = 0.0, 0.25, 0.40$ przedstawiono odpowiednio w tabelach 1, 2, 3, gdzie przez m, p oznaczono kolumny zawierające wyniki odpowiednio dla modelu uproszczonego i klasycznej półprzestrzeni sprężystej.

Tabela 1

$\nu = 0.0$

A_{2n}^3			B_{2n}^3		U_{2n}^3		φ_{2n}^3	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-0.927	-0.577	1.957	1.256	2.165	1.382	2.013	2.002
2	1.583	2.271	-0.261	-0.098	1.161	2.273	0.163	-0.043
3	-0.740	-1.123	0.004	0.001	0.740	1.123	3.136	3.148
4	0.480	0.626	0.000	0.000	0.480	0.626	0.000	0.000
5	-0.357	-0.573	0.000	0.000	0.357	0.573	3.142	3.142
6	0.284	0.379	0.000	0.000	0.284	0.379	0.000	0.000
7	-0.236	-0.276	0.000	0.000	0.236	0.276	3.142	3.142
8	0.203	0.367	0.000	0.000	0.203	0.367	0.000	0.000
9	-0.177	-0.321	0.000	0.000	0.177	0.321	3.142	3.142
10	0.157	0.133	0.000	0.000	0.157	0.133	0.000	0.000

Tabela 2

$\nu = 0.25$

A_{2n}^3			B_{2n}^3		U_{2n}^3		φ_{2n}^3	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-0.757	-0.580	1.597	1.106	1.768	1.249	2.013	2.053
2	1.293	1.694	-0.213	-0.096	1.311	1.696	-0.163	-0.057
3	-0.604	-0.835	0.003	0.001	0.604	0.835	3.136	3.140
4	0.391	0.463	0.000	0.000	0.391	0.463	0.000	0.000
5	-0.291	-0.443	0.000	0.000	0.291	0.443	3.142	3.142
6	0.232	0.282	0.000	0.000	0.232	0.282	0.000	0.000
7	-0.193	-0.203	0.000	0.000	0.193	0.203	3.142	3.142
8	0.165	0.279	0.000	0.000	0.165	0.279	0.000	0.000
9	-0.144	-0.245	0.000	0.000	0.144	0.245	3.142	3.142
10	0.129	0.094	0.000	0.000	0.129	0.094	0.000	0.000

Tabela 3

$\nu = 0.4$

A_{2n}^3			B_{2n}^3		U_{2n}^3		ψ_{2n}^3	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-0.535	-0.425	1.130	0.936	1.125	1.028	2.013	1.997
2	0.914	1.357	-0.151	-0.097	0.927	1.360	-0.163	-0.071
3	-0.427	-0.669	0.002	0.001	0.427	0.669	3.136	3.139
4	0.277	0.367	0.000	0.000	0.277	0.367	0.000	0.000
5	-0.206	-0.350	0.000	0.000	0.206	0.350	3.142	3.142
6	0.164	0.224	0.000	0.000	0.164	0.224	0.000	0.000
7	-0.137	-0.159	0.000	0.000	0.137	0.159	3.142	3.142
8	0.117	0.228	0.000	0.000	0.117	0.228	0.000	0.000
9	-0.102	-0.199	0.000	0.000	0.102	0.199	3.142	3.142
10	0.091	0.071	0.000	0.000	0.091	0.071	0.000	0.000

Analogicznie postąpimy porównując rozwiązania dla następującego zagadnienia: półprzestrzeń została obciążona siłą harmonicznie zmienną $\bar{p} = [1, 0, 0] \delta(x_1) e^{i\omega t}$, jak na rys.19. W tym przypadku odpowiednie wzory opisujące rozwiązania stacjonarne mają postać:

- dla modelu uproszczonego (patrz wzór (2.68))

$$u_1^m(x_1, 0, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} (\pi N_0(\beta x_1) + i\pi J_0(\beta x_1)) e^{i\omega t}, \quad (2.92)$$

- dla klasycznej półprzestrzeni sprężystej po sprowadzeniu do postaci bezwymiarowej [1], [46]

$$u_1^p(x_1, 0, t) = - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{u^2-1} e^{-i\beta u x_1} du}{(2u^2-1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2-1} \sqrt{u^2-\beta^2}}. \quad (2.93)$$

Po rozwinięciu obu rozwiązań w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju:

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, 0, t) &= - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n}^1(\nu) + i B_{2n}^1(\nu)) T_{2n}(\alpha x_1) = \\
 &= - \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} U_{2n}^1(\nu) e^{i(\omega t + \varphi_{2n}^1)} T_{2n}(\alpha x_1), \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(U_{2n}^1(\nu))^2 = (A_{2n}^1(\nu))^2 + (B_{2n}^1(\nu))^2,$$

$$\varphi_{2n}^1(\nu) = \arctg (B_{2n}^1(\nu)/A_{2n}^1(\nu))$$

otrzymamy odpowiednio dla $\nu = 0.0, 0.25, 0.40$ następujące wyniki przedstawione w tabelach 4, 5, 6.

Tabela 4

$\nu = 0.0$

A_{2n}^1			B_{2n}^1		U_{2n}^1		φ_{2n}^1	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-1.002	-1.197	2.086	1.901	2.814	2.246	2.019	2.133
2	1.533	2.218	-0.135	-0.124	1.539	2.221	-0.088	-0.056
3	-0.723	-1.099	0.001	0.001	0.723	1.099	3.140	3.140
4	0.475	0.620	0.000	0.000	0.475	0.620	0.000	0.000
5	-0.355	-0.571	0.000	0.000	0.355	0.571	3.142	3.142
6	0.284	0.378	0.000	0.000	0.284	0.378	0.000	0.000
7	-0.236	-0.275	0.000	0.000	0.236	0.275	-3.142	3.142
8	0.202	0.366	0.000	0.000	0.202	0.366	0.000	0.000
9	-0.177	-0.320	0.000	0.000	0.177	0.320	-3.142	3.142
10	0.157	0.133	0.000	0.000	0.157	0.133	0.000	0.000

Tabela 5

$\nu = 0.25$

A_{2n}^1			B_{2n}^1		U_{2n}^1		φ_{2n}^1	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-0.847	-1.365	1.739	1.736	1.935	2.208	2.024	2.237
2	1.230	1.627	-0.074	-0.084	1.232	1.629	-0.060	-0.052
3	-0.586	-0.811	0.000	0.001	0.586	0.811	3.141	3.140
4	0.387	0.458	0.000	0.000	0.387	0.458	0.000	0.000
5	-0.290	-0.431	0.000	0.000	0.290	0.431	3.142	3.142
6	0.231	0.281	0.000	0.000	0.231	0.281	0.000	0.000
7	-0.192	-0.202	0.000	0.000	0.192	0.202	-3.142	3.142
8	0.165	0.279	0.000	0.000	0.165	0.279	0.000	0.000
9	-0.144	-0.244	0.000	0.000	0.144	0.244	-3.142	3.142
10	0.128	0.094	0.000	0.000	0.128	0.094	0.000	0.000

Tabela 6

$\nu = 0.4$

A_{2n}^1			B_{2n}^1		U_{2n}^1		φ_{2n}^1	
	m	p	m	p	m	p	m	p
1	-0.623	-1.374	1.256	1.519	1.402	2.048	2.031	2.306
2	0.849	1.279	-0.026	-0.057	0.850	1.280	-0.031	-0.042
3	-0.411	-0.645	0.000	0.000	0.411	0.645	3.141	3.141
4	0.273	0.362	0.000	0.000	0.273	0.362	0.000	0.000
5	-0.204	-0.346	0.000	0.000	0.204	0.346	-3.142	3.142
6	0.163	0.223	0.000	0.000	0.163	0.223	0.000	0.000
7	-0.136	-0.160	0.000	0.000	0.136	0.160	-3.142	3.142
8	0.116	0.227	0.000	0.000	0.116	0.227	0.000	0.000
9	-0.102	-0.199	0.000	0.000	0.102	0.199	-3.142	3.142
10	0.090	0.071	0.000	0.000	0.090	0.071	0.000	0.000

Ostatnim rozpatrywanym zagadnieniem będzie osiowosymetryczne zagadnienie Lamba i jego odpowiednik dla modelu uproszczonego.

Rozpatrzmy półprzestrzeń sprężystą obciążoną siłą $\bar{p} = [0, 0, 1]$ · $\delta(x_1, x_2) e^{i\omega t}$. Wtedy rozwiązanie dla modelu uproszczonego zgodnie z wzorem (2.78) ma postać

$$u_3^m(r, 0, t) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \cdot \beta \frac{e^{-i\kappa r}}{r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (2.95)$$

natomiast dla półprzestrzeni klasycznej, tak jak to było w poprzednich przypadkach, jest opisany następującym wzorem całkowym (wzór w postaci bezwymiarowej) [1], [46]

$$u_3^p(r, 0, t) = - \frac{\kappa e^{i\omega t}}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{u \sqrt{u^2 - \beta^2} J_0(u\kappa r) du}{(2u^2 - 1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{u^2 - \beta^2}}. \quad (2.96)$$

W tym przypadku w celu ilustracji podobieństw między rozwiązaniami dla uproszczonego modelu i klasycznej półprzestrzeni sprężystej przedstawimy ich wykresy. Ograniczymy się do przypadku $\nu = 0.25$. Wykresy te uzyskano przez formalne obliczenie wartości funkcji u_3^m oraz numeryczne obliczenie całek Fouriera, określających funkcję przemieszczeń u_3^p dla dyskretnego zbioru wartości r . Oznaczając przez

$$A(r) = \text{Re} [2\pi\mu \kappa^{-1} e^{-i\omega t} u_3(r, 0, t)],$$

$$B(r) = \text{Im} [2\pi\mu \kappa^{-1} e^{-i\omega t} u_3(r, 0, t)],$$

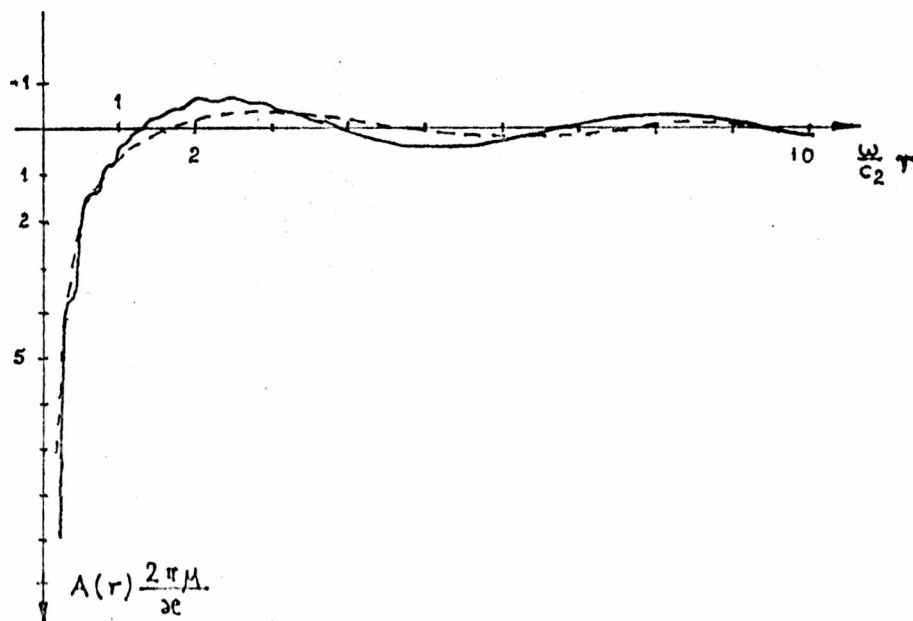
(2.97)

$$U^2(r) = A^2(r) + B^2(r),$$

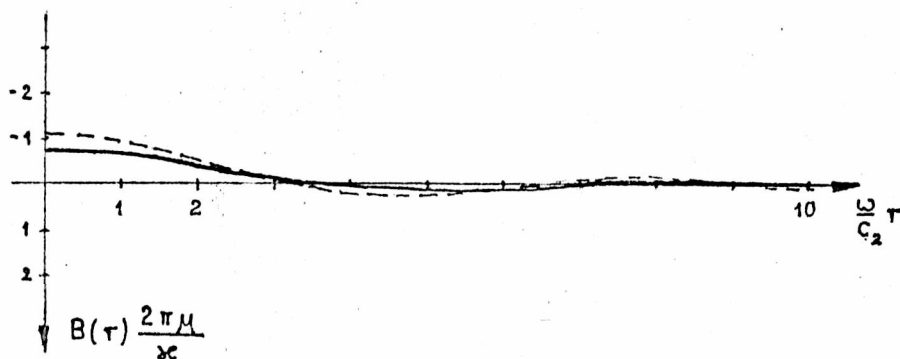
$$\varphi(r) = \text{arc tg} (B(r)/A(r)),$$

gdzie $U(r)$ jest amplitudą drgań brzegu półprzestrzeni, $\varphi(r)$ funk-

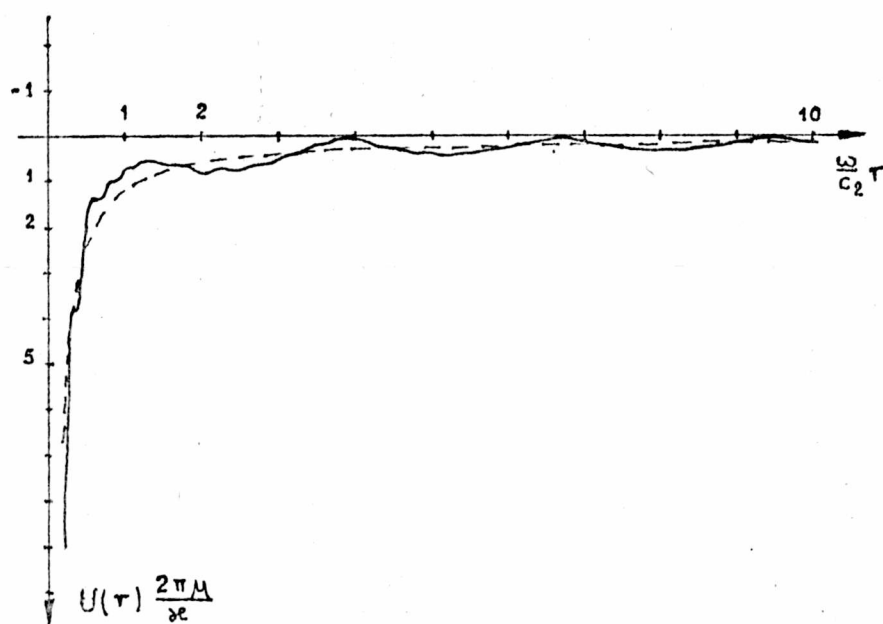
cją przesunięcia fazowego, przedstawiono wykresy wprowadzonych funkcji $A(r)$, $B(r)$, $U(r)$, $\varphi(r)$ odpowiednio na rys.40, 41, 42, 43. Linia ciągłą oznaczono wykresy dla klasycznej półprzestrzeni, a przerywaną dla modelu uproszczonego.



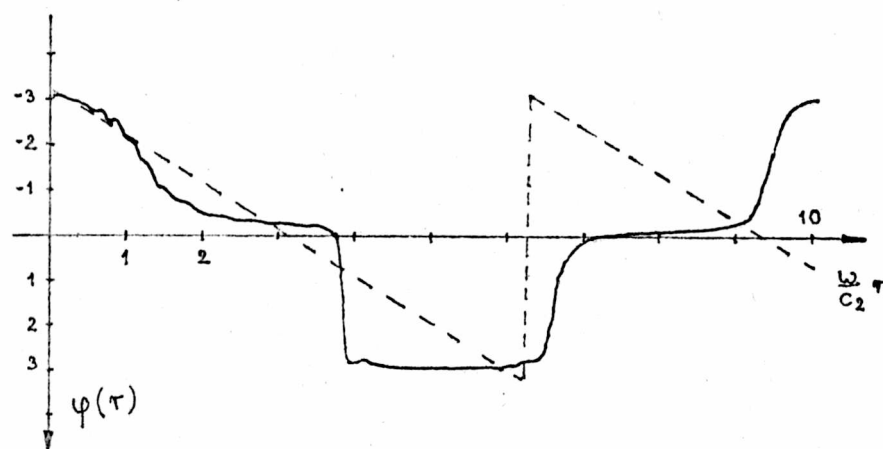
Rys.40



Rys.41



Rys.42



Rys.43

Analizując otrzymane wyniki, zamieszczone w tabelach 1-6 oraz przedstawione na rys. 40-43 wykresy funkcji związanych z funkcją przemieszczeń $u_3(r,t)$ widzimy, że różnice między nimi nie są znaczne. Dotyczy to zwłaszcza obszarów znajdujących się w niedużej odległości r .

W przypadku gdy odległość od punktu przyłożenia siły rośnie, różnice te zwiększają się i są wynikiem różnego stopnia tłumienia geometrycznego dla modelu uproszczonego i klasycznej półprzestrzeni. Widoczne jest to, gdy porównamy z sobą rozwinięcia asymptotyczne odpowiednich rozwiązań. Dla półprzestrzeni klasycznej mają one postać [16]:

- w zagadnieniu płaskim

$$u_3^p(x_1, 0, t) \sim - \frac{iK}{\mu} e^{i(\omega t - kx_1)} + O(x_1^{-\frac{3}{2}}), \quad (2.98)$$

- w zagadnieniu osiowosymetrycznym

$$u_3^p(r, 0, t) \sim \frac{kK}{\mu} (2\pi kr)^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - kr - \frac{\pi}{4})} + O(r^{-\frac{3}{2}}), \quad (2.99)$$

gdzie k - jest pierwiastkiem równania Rayleigha $N(\alpha) = 0$,
opisanym we wzorze (2.89), a $K = -k_2^2 \sqrt{k^2 - k_1^2} / N'(k)$,
 $k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$.

Odpowiednio dla modelu uproszczonego otrzymamy

$$u_3^m(x_1, 0, t) = - \frac{i\beta}{\mu} (2\pi k_2 x_1)^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - k_2 x_1 - \frac{\pi}{4})} + O(x_1^{-\frac{3}{2}}) \quad (2.100)$$

$$u_3^m(r, 0, t) = \frac{\beta}{2\pi\mu} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - k_2 r)}. \quad (2.101)$$

Wykorzystano przy tym następujące rozwinięcia asymptotyczne funkcji $J_\nu(x)$ i $N_\nu(x)$ ([40] wz. 56.7, 56.8):

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}}), \\ N_\nu(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Osobnym problemem jest sprawa identyfikacji parametrów występujących w wyprowadzonych wzorach. Może się bowiem okazać, że stosownie dobrane parametry zwiększą korelację modelu uproszczonego z rzeczywistością.

Warte podkreślenia jest również to, że przedział określoności rozwinięć (2.90), (2.94), równy $\langle -\kappa^{-1}, \kappa^{-1} \rangle$, jest wystarczający do rozwiązywania zagadnień praktycznych np. płaskich zagadnień stempla. Okazuje się bowiem, że współczynnik $\eta = \kappa a \leq 0.25$, gdzie $2a$ jest szerokością podstawy fundamentu (patrz [6]). Analizując równanie całkowe opisujące płaskie stacjonarne zagadnienie stempla, [8]:

$$\int_{-1}^1 q(\xi) u_3(a(x-\xi), 0, t) d\xi = \frac{2\pi\mu}{a} f(x) e^{i\omega t}, \quad (2.103)$$

gdzie w przypadku rozwinięć funkcja Greena u_3 określona jest wzorem (2.90) lub (2.94) stwierdzamy, że wystarczające jest, aby $\eta = \kappa a \leq 0.5$. Wtedy bowiem $\kappa a(x-\xi)$, gdzie $-2 \leq x-\xi \leq 2$, należy do przedziału określoności wielomianów Czebyszewa równego $\langle -1, 1 \rangle$.

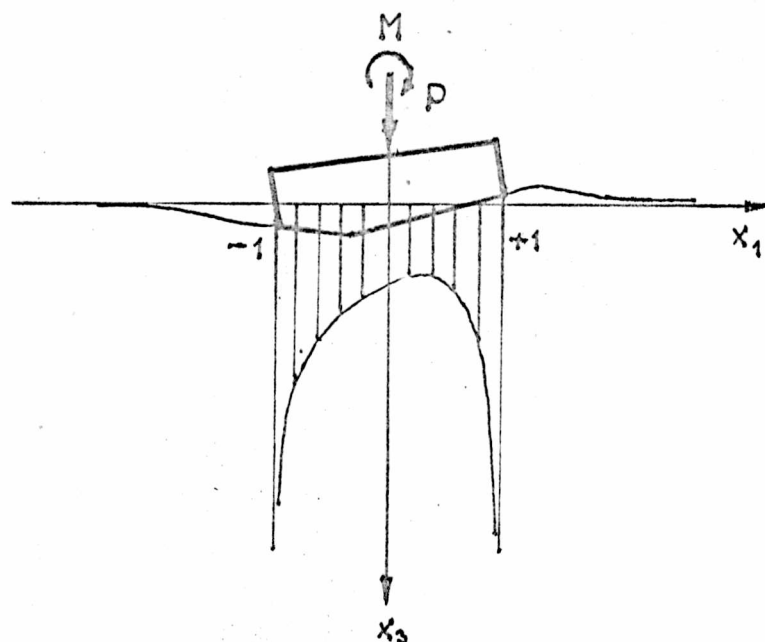
Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że wprowadzony model dostatecznie dokładnie opisuje podłoże sprężyste, aby wykorzystywać go do rozwiązywania zagadnień, w których konstrukcja ma kontakt z podłożem na ograniczonym obszarze (np. fundamenty).

Rozdział 3

WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI KONSTRUKCJI SPOCZYWAJĄCYCH NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

3.1. Płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe - zagadnienie stempla

Rozważmy działanie siły P i momentu M na uproszczony model podłoża sprężystego za pośrednictwem doskonale sztywnego stempla, którego kształt na linii kontaktu jest opisany funkcją $f(x_1)$, $|x_1| \leq 1$, jak na rys.44.



Rys.44

Jeżeli założymy, że kontakt między stemplem a półpłaszczyzną jest ciągły, to mamy do czynienia z zadaniem o następujących mieszanych warunkach brzegowych:

$$u_3(x_1, 0) = f(x_1) , \quad |x_1| \leq 1 , \quad (3.1)$$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) = 0 , \quad |x_1| > 1 .$$

Na wstępie wyprowadzimy wzory na funkcje przemieszczeń $u_3(x_1, x_3)$ i naprężeń $\sigma_{33}(x_1, x_3)$ dla przypadku, gdy półpłaszczyzna jest obciążona obciążeniem normalnym do brzegu $p_3(x_1)$. Równania opisujące model półpłaszczyzny mają postać

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0 , \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - p_3 , \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$u_3 \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad x_1^2 + x_3^2 \rightarrow \infty .$$

Stąd po nałożeniu na równanie $(3.2)_1$ i $(3.2)_2$ pojedynczej transformaty Fouriera określonej wzorem

$$\bar{u}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 \quad (3.3)$$

otrzymamy następujące związki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_3^2} &= \beta^2 \alpha_1^2 \bar{u}_3 , \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} &= - \bar{p}_3 , \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie $\beta^2 = \mu / (\lambda + 2\mu) = (1-2\nu)/2(1-\nu)$.

Rozwiązania równania różniczkowego $(3.4)_1$ poszukiwać będziemy w postaci

$$\bar{u}_3(\alpha_1, x_3) = A(\alpha_1) e^{\gamma x_3} . \quad (3.5)$$

Po podstawieniu tego wzoru do równania $(3.4)_1$ i po wykorzystaniu warunku wypromieniowania $(3.2)_3$ otrzymamy

$$\gamma = -\beta |\alpha_1| . \quad (3.6)$$

Stąd

$$\bar{u}_3(\alpha_1, x_3) = A(\alpha_1) e^{-\beta |\alpha_1| x_3} . \quad (3.7)$$

Wykorzystamy teraz równanie $(3.4)_2$. Po uwzględnieniu (3.7) i po prostych przekształceniach otrzymamy wzór na funkcję

$$A(\alpha_1) = \frac{1}{\mu} \beta \frac{\bar{p}_3}{|\alpha_1|} . \quad (3.8)$$

Ostatecznie transformaty funkcji przemieszczeń i naprężeń mają postać

$$\begin{aligned} \bar{u}_3(\alpha_1, x_3) &= \frac{1}{\mu} \beta \frac{\bar{p}_3}{|\alpha_1|} e^{-\beta |\alpha_1| x_3} , \\ \bar{\sigma}_{33}(\alpha_1, x_3) &= -\bar{p}_3 e^{-\beta |\alpha_1| x_3} . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymamy poszukiwane funkcje

$$\begin{aligned}
 u_3(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_3(\alpha_1)}{|\alpha_1|} e^{-\beta |\alpha_1| x_3 - \alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\
 \sigma_{33}(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) e^{-\beta |\alpha_1| x_3 - \alpha_1 x_1} d\alpha_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Ze względu na dalsze wykorzystanie wyprowadzonych funkcji rozważymy dwa przypadki:

1. $p(x_1)$ jest funkcją parzystą, wtedy

$$\begin{aligned}
 u_3(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_3(\alpha_1)}{|\alpha_1|} e^{-\beta |\alpha_1| x_3} \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1, \\
 \sigma_{33}(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) e^{-\beta |\alpha_1| x_3} \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

2. $p(x_1)$ jest funkcją nieparzystą, wtedy

$$\begin{aligned}
 u_3(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_3(\alpha_1)}{|\alpha_1|} e^{-\beta |\alpha_1| x_3} \sin \alpha_1 x_1 d\alpha_1, \\
 \sigma_{33}(x_1, x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) e^{-\beta |\alpha_1| x_3} \sin \alpha_1 x_1 d\alpha_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Przy rozwiązywaniu przedstawionego na wstępie zagadnienia korzystać będziemy z wielomianów Czebyszewa I i II rodzaju zdefiniowanych wzorami ([5], str.186) :

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad n \geq 1 \tag{3.13}_1$$

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m)!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad n \geq 0. \quad (3.13)_2$$

W dalszych rozważaniach przydatne będą następujące wzory określające te wielomiany ([25], wz.8.940)

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x) = \\ &= \frac{1}{2} [(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{1-x^2}} [(x+i\sqrt{1-x^2})^{n+1} - (x-i\sqrt{1-x^2})^{n+1}], \end{aligned}$$

Zagadnienie rozwiążemy dla szczególnego przypadku. Założymy mianowicie, że funkcja opisująca kształt stempla ma postać

$$f(x_1) = \sum_{m=0}^n a_m T_m x_1. \quad (3.15)$$

Wprowadzone ograniczenie jest ograniczeniem pozornym, ponieważ każdą funkcję ciągłą możemy aproksymować wielomianami $T_n(x)$ [28]. Rozwiązując to zagadnienie wyodrębnimy dwa przypadki:

1. Funkcja $f(x_1)$ jest parzysta $f(x_1) = f(-x_1)$, wtedy

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^m a_{2k} T_{2k}(x_1). \quad (3.16)$$

2. Funkcja $f(x_1)$ jest nieparzysta $f(x_1) = -f(-x_1)$, wtedy

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^l a_{2k+1} T_{2k+1}(x_1) . \quad (3.17)$$

Przypadek 1.

Funkcja $f(x_1)$ wyraża się wzorem (3.16), gdzie a_0 na tym etapie jest nieznaną stałą.

Wykorzystując równanie (3.11) warunki brzegowe (3.1) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} u_3 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_3(\alpha_1)}{|\alpha_1|} \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1 = f(x_1), \quad |x_1| \leq 1, \\ \sigma_{33} &= -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1 = 0, \quad |x_1| > 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ponieważ drugie równanie jest spełnione tożsamościowo, zajmiemy się równaniem pierwszym. Nieznanej funkcji odporu podłoża $p_3(x_1)$ poszukiwać będziemy w postaci

$$p_3(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{k=0}^m A_{2k} T_{2k}(x_1) . \quad (3.19)$$

Wykorzystując pierwszy z poniższych wzorów całkowych ([25] wz.7.355)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_{2n}(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cos ax dx &= (-1)^n \pi J_{2n}(|a|) , \\ \int_{-1}^1 T_{2n+1}(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sin ax dx &= (-1)^n \pi J_{2n+1}(|a|) \operatorname{sgn} a , \end{aligned} \quad (3.20)$$

gdzie

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1 & \text{dla } a > 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases} ,$$

otrzymamy transformatę funkcji $p_3(x_1)$

$$\bar{p}_3(\alpha_1) = (\pi/2)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^m (-1)^k A_{2k} J_{2k}(|\alpha_1|) . \quad (3.21)$$

Po podstawieniu jej do równania (3.18)₁ dostaniemy następujący związek:

$$\begin{aligned} u_3(x_1, 0) &= \frac{\beta}{\mu} \sum_{k=0}^m (-1)^k A_{2k} \int_0^{\infty} \frac{J_{2k}(\alpha_1)}{\alpha_1} \cos \alpha_1 x_1 d\alpha_1 = \\ &= \sum_{k=0}^m a_{2k} T_{2k}(x_1) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Różniczkując obustronnie względem x_1 wzór (3.22) otrzymamy

$$\begin{aligned} - \frac{\beta}{\mu} \sum_{k=0}^m (-1)^k A_{2k} \int_0^{\infty} J_{2k}(\alpha_1) \sin \alpha_1 x_1 d\alpha_1 = \\ = \sum_{k=0}^m 2k a_{2k} U_{2k-1}(x_1) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$U_{-1}(x_1) = 0 .$$

Postać prawej strony tego wzoru wynika z zależności $T_n(x) = n U_{n-1}(x)$ ([5] t.2, str.186).

Wykorzystamy obecnie następujący wzór całkowy ([25], wz.6.671)

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = \frac{\sin(\nu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1, \nu > -2. \quad (3.24)$$

W naszym przypadku mamy $\nu = 2k$, stąd równanie (3.23) przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 - \beta \sum_{k=0}^m (-1)^k A_{2k} \frac{\sin(2k \arcsin x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} &= \\
 &= \sum_{k=0}^m 2k a_{2k} U_{2k-1}(x_1) .
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Zajmiemy się obecnie przekształceniem wyrażenia $\frac{\sin(2k \arcsin x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}}$. Wykorzystamy przy tym wprowadzone wzory (3.14). Mamy

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(2k \arcsin x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} &= \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{\sin [((2k-1)+1) \arccos \sqrt{1-x_1^2}]}{\sin (\arccos \sqrt{1-x_1^2})} = \\
 &= \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} U_{2k-1}(\sqrt{1-x_1^2}) ,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 U_{2k-1}(\sqrt{1-x_1^2}) &= \frac{1}{2i|x_1|} [(\sqrt{1-x_1^2} + i|x_1|)^{2k} - (\sqrt{1-x_1^2} - i|x_1|)^{2k}] = \\
 &= \frac{1}{2i|x_1|} [(i)^{2k} (|x_1| - i\sqrt{1-x_1^2})^{2k} - (-i)^{2k} (|x_1| + i\sqrt{1-x_1^2})^{2k}] = \\
 &= \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{1-x_1^2}}{|x_1|} U_{2k-1}(|x_1|) .
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Podstawiając (3.27) do wzoru (3.26) otrzymamy tożsamość

$$\frac{\sin(2k \arcsin x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} = (-1)^{k+1} U_{2k-1}(x_1) . \tag{3.28}$$

Stąd równanie (3.25) przyjmie postać

$$\frac{\beta}{\mu} \sum_{k=1}^m A_{2k} U_{2k-1}(x_1) = \sum_{k=1}^m 2k a_{2k} U_{2k-1}(x_1) . \quad (3.29)$$

Porównując współczynniki przy wielomianach tego samego stopnia, otrzymamy proste związki między współczynnikami A_{2k} i a_{2k} :

$$A_{2k} = \frac{2k\mu}{\beta} a_{2k} , \quad k \geq 1 . \quad (3.30)$$

W celu obliczenia współczynnika A_0 , scałkujemy w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ wzór (3.19) :

$$\int_{-1}^1 p_3(x_1) dx_1 = \sum_{k=0}^m A_{2k} \int_{-1}^1 T_{2k}(x_1) \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} . \quad (3.31)$$

Wtedy na mocy ortogonalności wielomianów Czebyszewa otrzymamy

$$A_0 = \frac{P}{\pi} . \quad (3.32)$$

Na podstawie powyższych rozważań dostajemy końcowy wynik. Szukana funkcja $p_3(x_1)$ i jej transformata $\bar{p}_3(\lambda_1)$ mają odpowiednio postać

$$p_3(x_1) = \frac{P}{\pi \sqrt{1-x_1^2}} + \frac{2\mu}{\beta \sqrt{1-x_1^2}} \sum_{k=1}^m k a_{2k} T_{2k}(x_1) \quad (3.33)$$

oraz

$$\bar{p}_3(\lambda_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} J_0(\lambda_1) + (2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu}{\beta} \sum_{k=1}^m (-1)^k k a_{2k} J_{2k}(|\lambda_1|) . \quad (3.34)$$

Znając funkcję $p_3(x_1)$, możemy wyznaczyć funkcje przemieszczeń i naprężeń w półpłaszczyźnie sprężystej. Tutaj ograniczymy się do podania funkcji naprężeń. Wykorzystamy przy tym następujący wzór całkowy ([25], wz.6.611):

$$\int_0^{\infty} e^{-z\omega} J_\nu(\omega) d\omega = \frac{(\sqrt{z^2+1} - z)^\nu}{\sqrt{z^2+1}}, \quad (3.35)$$

$\nu > -1, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad z = x_3 + ix_1.$

Po podstawieniu wzoru (3.21), określającego $\bar{p}_3(\omega_1)$, do wzoru (3.11)₂ otrzymamy dla $x_3 > 0$

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^m (-1)^k A_{2k} \frac{(\sqrt{z^2+1} - z)^{2k}}{\sqrt{z^2+1}} \right], \quad (3.36)$$

gdzie $z = x_3 + ix_1$,

Przypadek 2.

Funkcja $f(x_1)$ jest nieparzysta

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^l a_{2k+1} T_{2k+1}(x_1), \quad (3.37)$$

gdzie a_1 jest kątem obrotu stempla i na tym etapie jest wartością nieznaną.

Metoda rozwiązywania jest analogiczna do metody stosowanej w pierwszym przypadku. Korzystając z równań (3.12), warunki brzegowe (3.1) napiszemy w postaci

$$u_3 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_3(\omega_1)}{|\omega_1|} \sin \omega_1 x_1 d\omega_1 = f(x_1), \quad x_1 \leq 1, \quad (3.38)$$

$$\sigma_{33} = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\omega_1) \sin \omega_1 x_1 d\omega_1 = 0, \quad x_1 > 1.$$

Założymy, że $p_3(x_1)$ ma postać

$$p_3(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{k=0}^l A_{2k+1} T_{2k+1}(x_1), \quad (3.39)$$

wtedy

$$\bar{p}_3(\omega_1) = (\pi/2)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^l (-1)^k A_{2k+1} J_{2k+1}(|\omega_1|) \operatorname{sgn} \omega_1. \quad (3.40)$$

Po podstawieniu powyższego wzoru do równania (3.38)₁ otrzymamy

$$\begin{aligned} u_3(x_1, 0) &= \beta_H \sum_{k=0}^l (-1)^k A_{2k+1} \int_0^{\infty} \frac{J_{2k+1}(\omega_1)}{\omega_1} \sin \omega_1 x_1 d\omega_1 = \\ &= \sum_{k=0}^l a_{2k+1} T_{2k+1}(x_1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Różniczkując obustronnie względem x_1 wzór (3.41) dostaniemy

$$\begin{aligned} \beta_H \sum_{k=0}^l (-1)^k A_{2k+1} \int_0^{\infty} J_{2k+1}(\omega_1) \cos \omega_1 x_1 d\omega_1 = \\ = \sum_{k=0}^l (2k+1) a_{2k+1} U_{2k}(x_1). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Po wykorzystaniu następującego wzoru całkowego ([25], wz.6.671)

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{\cos(\nu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \nu > -1, \quad x < 1 \quad (3.43)$$

i podobnych jak w przypadku pierwszym przekształceniach jego prawej strony, otrzymamy

$$\frac{\beta}{M} \sum_{k=0}^l A_{2k+1} U_{2k}(x_1) = \sum_{k=0}^l (2k+1) a_{2k+1} U_{2k}(x_1) . \quad (3.44)$$

Równanie to pozwala na obliczenie szukanych współczynników

$$A_{2k+1} = \frac{(2k+1)M}{\beta} a_{2k+1} . \quad (3.45)$$

W celu obliczenia stałej a_1 , scałkujemy iloczyn $x_1 p_3(x_1)$ względem zmiennej x_1 w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$

$$\int_{-1}^1 x_1 p_3(x_1) dx_1 = \sum_{k=0}^l A_{2k+1} \int_{-1}^1 x_1 T_{2k+1}(x_1) \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} . \quad (3.46)$$

Wykorzystując ortogonalność wielomianów Czebyszewa otrzymamy

$$A_1 = \frac{2}{\pi} M , \quad (3.47)$$

a stąd

$$a_1 = \frac{2\beta}{\pi M} M . \quad (3.48)$$

Funkcja $p_3(x_1)$ wyraża się zatem wzorem

$$p_3(x_1) = \frac{2 M x_1}{\pi \sqrt{1-x_1^2}} + \frac{M}{\beta \sqrt{1-x_1^2}} \sum_{k=1}^l (2k+1) a_{2k+1} T_{2k+1}(x_1) . \quad (3.49)$$

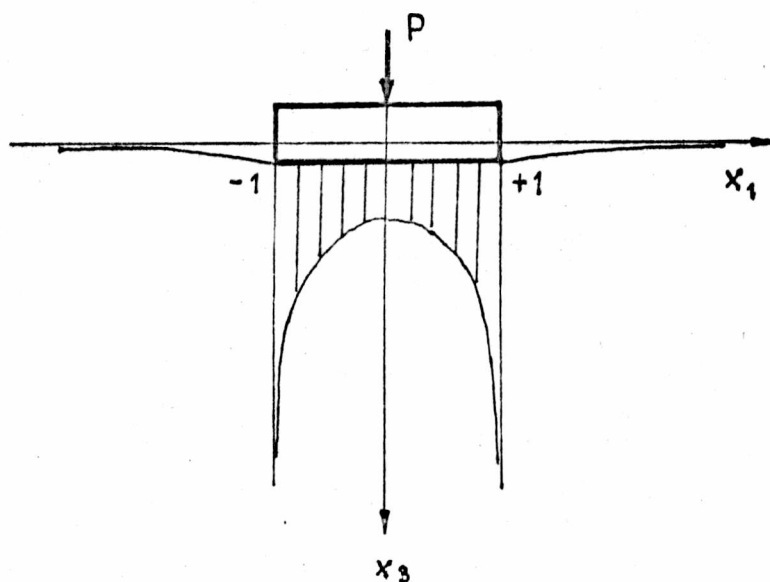
Po wykorzystaniu wzoru (3.40) na $\bar{p}_3$ i związku (3.35) otrzymamy dla $x_3 > 0$

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^l (-1)^k A_{2k+1} \frac{(\sqrt{z^2+1} - z)^{2k+1}}{\sqrt{z^2+1}} \right], \quad (3.50)$$

$$z = x_3 + ix_1.$$

W przypadku szczególnym, gdy $a_n = 0$ dla $n \geq 2$ mamy następujące rozkłady funkcji odporu podłoża $p_3(x_1)$:

1. $P \neq 0$, $M = 0$ (rys. 45)

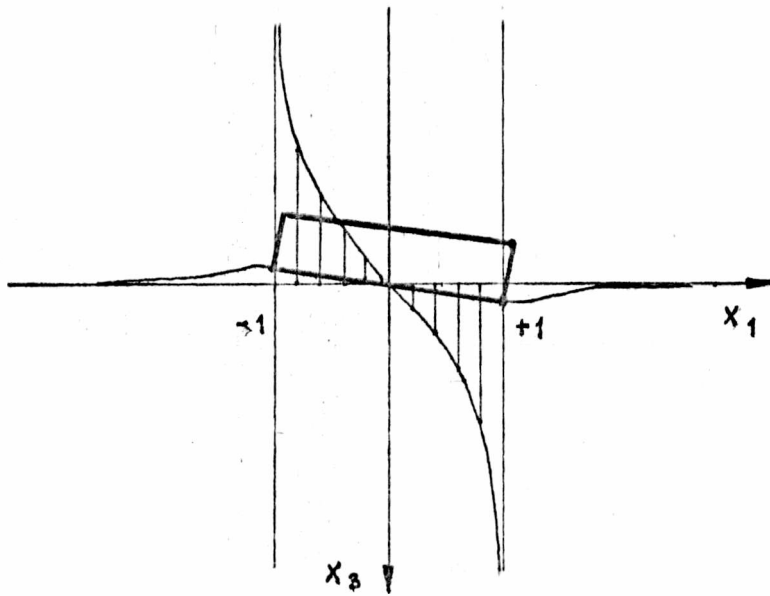


Rys. 45

$$p_3(x_1) = \frac{P}{\pi \sqrt{1-x_1^2}}, \quad (3.51)$$

2. $P = 0$, $M \neq 0$ (rys. 46)

$$p_3(x_1) = \frac{2 M x_1}{\pi \sqrt{1-x_1^2}}. \quad (3.52)$$

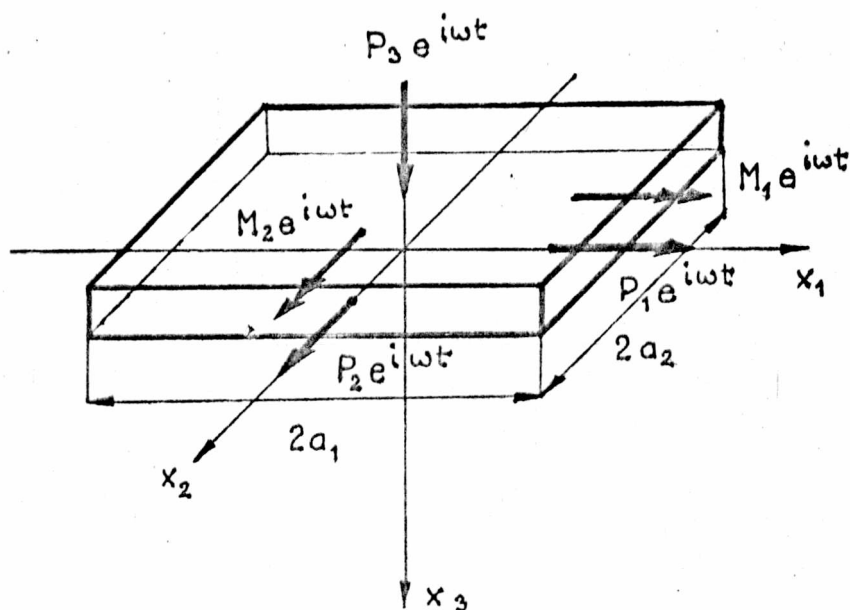


Rys.46

Powyższe wyniki wykorzystywać będziemy w dalszej części pracy przy rozwiązywaniu bardziej złożonych przestrzennych zagadnień kontaktowych.

3.2. Drgania fundamentu blokowego spoczywającego na inercyjnym podłożu sprężystym

Rozpatrzmy działanie harmonicznie zmiennego obciążenia na półprzestrzeń sprężystą, za pośrednictwem doskonale sztywnego fundamentu blokowego o podstawie prostokątnej, którego boki mają odpowiednio długość $2a_1$, $2a_2$, jak na rys.47.



Rys.47

Założmy, że $a_2 < a_1$. Obciążenie zredukowane do środka układu współrzędnych ma postać

$$P_i(t) = P_i e^{i\omega t}, \quad i=1,2,3, \quad (3.53)$$

$$M_j(t) = M_j e^{i\omega t}, \quad j=1,2,$$

gdzie P_i , M_j są amplitudami zespolonymi. Wprowadzenie amplitud zespolonych umożliwia uwzględnienie zróżnicowania fazowego uogólnionych sił zewnętrznych. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} P e^{i\omega t} &= (P_1 + iP_2) e^{i\omega t} = (P_1^2 + P_2^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \\ &= (P_1^2 + P_2^2)^{\frac{1}{2}} e^{i(\omega t + \varphi)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\varphi = \arctg \frac{P_2}{P_1}.$$

W początkowych rozważaniach pomijając będziemy siły bezwładności stempla.

Ze względu na charakter obciążenia przyjmiemy

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad i=1,2,3. \quad (3.55)$$

Wtedy równania opisujące uproszczony model półprzestrzeni sprężystej przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mu \nabla_1^2 U_1 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \omega^2 \rho U_1 &= 0, \\ \mu \nabla_2^2 U_2 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + \omega^2 \rho U_2 &= 0, \\ \mu \nabla_3^2 U_3 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} + \omega^2 \rho U_3 &= 0, \\ \nabla_i^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \end{aligned} \quad (3.56)$$

a odpowiednie warunki brzegowe będą opisane wzorami:

$$\begin{aligned} \sigma_{31}(x_1, x_2, 0, t) &= \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_3} e^{i\omega t} = -r_1(x_1, x_2) e^{i\omega t}, \\ \sigma_{32}(x_1, x_2, 0, t) &= \mu \frac{\partial U_2}{\partial x_3} e^{i\omega t} = -r_2(x_1, x_2) e^{i\omega t}, \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0, t) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial x_3} e^{i\omega t} = -r_3(x_1, x_2) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$U_i \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty,$$

gdzie $r_i(x_1, x_2)$ są poszukiwanymi funkcjami odporu podłoża.

Nałożmy na układ (3.56) podwójną transformatę Fouriera zdefiniowaną wzorem

$$\tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 . \quad (3.58)$$

Otrzymamy wtedy następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} c_2^2 \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx_3^2} &= (c_2^2 \alpha_2^2 + c_1^2 \alpha_1^2 - \omega^2) \bar{U}_1 , \\ c_2^2 \frac{d^2 \bar{U}_2}{dx_3^2} &= (c_2^2 \alpha_1^2 + c_1^2 \alpha_2^2 - \omega^2) \bar{U}_2 , \\ c_1^2 \frac{d^2 \bar{U}_3}{dx_3^2} &= (c_2^2 \alpha_1^2 + c_2^2 \alpha_2^2 - \omega^2) \bar{U}_3 , \end{aligned} \quad (3.59)$$

gdzie $c_1^2 = \lambda + 2\mu/\varrho$, $c_2^2 = \mu/\varrho$, pozwalające na obliczenie funkcji U_i , $i=1,2,3$. Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$\bar{U}_i(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = A_i(\alpha_1, \alpha_2) e^{\lambda_i x_3} . \quad (3.60)$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do równań (3.59), otrzymamy trzy równania charakterystyczne, z których obliczymy wielkości λ_1 , λ_2 , λ_3 . Wykorzystując warunek wypromieniowania $U_i \rightarrow 0$ dla $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} , \\ \lambda_2 &= - \left(\alpha_1^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2} \alpha_2^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} , \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\lambda_3 = - \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \alpha_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Funkcje $A_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $i=1,2,3$ wyznaczmy z warunków brzegowych (3.57) . W tym celu wykonamy na nich podwójną transformację Fouriera (3.58) . Wykorzystując następnie wzór (3.60) oraz wyniki (3.61) , po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1, \alpha_2) &= - \frac{\bar{r}_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\mu \lambda_1} , \\ A_2(\alpha_1, \alpha_2) &= - \frac{\bar{r}_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\mu \lambda_2} , \\ A_3(\alpha_1, \alpha_2) &= - \frac{\bar{r}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{(\lambda + 2\mu) \lambda_3} . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Po wykonaniu na $\bar{U}_i$ transformacji odwrotnej otrzymamy następujące wzory na funkcje U_i (ze względu na dalsze potrzeby ograniczymy się do podania wyników dla $x_3 = 0$) :

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{2\pi c_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{r}_1(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}}{(c_1^2 \alpha_1^2 + c_2^2 \alpha_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_1 d\alpha_2 , \\ U_2(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{2\pi c_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{r}_2(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}}{(c_2^2 \alpha_1^2 + c_1^2 \alpha_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_1 d\alpha_2 , \\ U_3(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{2\pi c_1^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{r}_3(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}}{(c_2^2 \alpha_1^2 + c_2^2 \alpha_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_1 d\alpha_2 . \end{aligned} \quad (3.63)$$

W rozważanym przez nas zagadnieniu funkcje odporu podłoża $r_i(x_1, x_2)$ $i=1,2,3$ są funkcjami nieznanymi. Znamy natomiast z dokładnością

do stałych funkcje przemieszczeń U_i , $i=1,2,3$ w obszarze $\langle -a_1, a_1 \rangle \times \langle -a_2, a_2 \rangle$. Rozwiązując to zagadnienie wykorzystywać będziemy następujące założenia upraszczające:

1. Założymy, że znamy z dokładnością do stałej rozkład funkcji odporu podłoża wzdłuż kierunku krótszego boku podstawy. Ma on taką postać jak w płaskim statycznym zagadnieniu stempla tzn. że reakcja podłoża wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} r_i(x_1, x_2) &= p_i(x_1) \frac{A_i^1 a_2 + A_i^2 x_2}{a_2(a_2^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= p_i(x_1) (A_i^1 T_0(\frac{x_2}{a_2}) + A_i^2 T_1(\frac{x_2}{a_2})) (a_2^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

gdzie $T_0(x)$, $T_1(x)$ - wielomiany Czebyszewa I rodzaju, A_i^1 , A_i^2 stałe zależne od rodzaju i kierunku działania obciążenia na fundament (np. $A_i^2 = 0$ dla $i=1,2$).

2. Osłabimy warunek ciągłego kontaktu, żądając jedynie zgodności przemieszczeń (obrotów) stempla i półprzestrzeni wzdłuż osi x_1 .

Zanim przystąpimy do rozwiązania, podamy wykorzystywane w dalszej części wzory całkowe ([25] wz. 7.355, 6.552):

$$\int_{-a}^a \frac{T_{2n}(\frac{x}{a})}{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{ix\alpha} dx = (-1)^n J_{2n}(a|\alpha|), \quad (3.65)$$

$$\int_{-a}^a \frac{T_{2n+1}(\frac{x}{a})}{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{ix\alpha} dx = (-1)^n J_{2n+1}(a|\alpha|) \operatorname{sgn} \alpha, \quad (3.66)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_\nu(b|x|)}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = 2 I_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{2}ab) K_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{2}ab), \quad (3.67)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(b|x|)}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} i \pi J_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{2} ab) H_{\frac{1}{2}\nu}^{(2)}(\frac{1}{2} ab) \\ \frac{1}{2} i \pi J_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{2} ab) H_{\frac{1}{2}\nu}^{(1)}(\frac{1}{2} ab) \end{cases}, \quad (3.68)$$

gdzie $T_n(x)$ - wielomiany Czebyszewa I rodzaju,
 $J_{\nu}(x)$ - funkcja Bessla ν - tego rzędu,
 $I_{\nu}(x)$ - zmodyfikowana funkcja Bessla pierwszego rodzaju,
 $K_{\nu}(x)$ - zmodyfikowana funkcja Bessla drugiego rodzaju,
 $H_{\nu}^{(i)}(x)$ - funkcja Hankela i - tego rodzaju ($i=1,2$) ν - tego rzędu.

Postać wzoru (3.68) wynika z niejednoznaczności funkcji podcałkowej. Znając związki między $J_{\nu}(x)$, $H_{\nu}^{(1)}(x)$, $H_{\nu}^{(2)}(x)$, a $I_{\nu}(x)$, $K_{\nu}(x)$ ([40], wz. 52.4 - 52.6)

$$I_{\nu}(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(ze^{i\pi/2}), \quad (3.69)$$

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{i\pi\nu/2} H_{\nu}^{(1)}(ze^{i\pi/2}),$$

$$\text{dla } -\pi < \arg z < \frac{1}{2} \pi,$$

$$I_{\nu}(z) = e^{i\pi\nu/2} J_{\nu}(ze^{-i\pi/2}), \quad (3.70)$$

$$K_{\nu}(z) = -\frac{1}{2} \pi i e^{-i\pi\nu/2} H_{\nu}^{(2)}(ze^{-i\pi/2}),$$

dla $-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \pi$, możemy ograniczyć się do wzoru (3.67). Wzór (3.68) wynika bowiem z poprzedniego, gdy w miejsce a podstawimy odpowiednio wartości ia lub $-ia$.

Wykonajmy na funkcjach $r_1(x_1, x_2)$ mających postać (3.64) podwójną transformację Fouriera. Wtedy po wykorzystaniu wzorów (3.65) i (3.66) otrzymamy

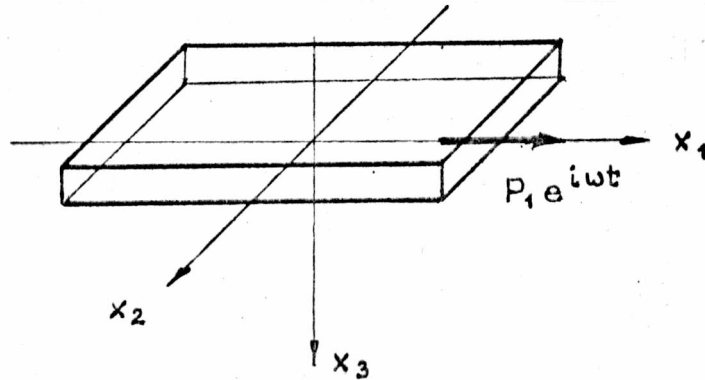
$$\begin{aligned} \bar{r}_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{p}_1(\alpha_1) [A_1^1 J_0(|\alpha_2| a_2) + \\ &+ i A_1^2 J_1(|\alpha_2| a_2) \operatorname{sgn} \alpha_2] . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Podstawmy powyższe wyrażenie do wzorów na amplitudy funkcji przemieszczeń U_i (wzór (3.63)). Po wykorzystaniu zależności całkowych (3.67), otrzymamy równania określające amplitudy przemieszczeń punktów osi x_1 :

$$\begin{aligned} U_1(x_1, 0, 0) &= \frac{A_1^1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_1(\alpha_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ &\cdot K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 , \\ U_2(x_1, 0, 0) &= \frac{A_2^1 \beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_2(\alpha_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ &\cdot K_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 , \\ U_3(x_1, 0, 0) &= \frac{A_3^1 \beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ &\cdot K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 + \\ &+ \frac{A_3^2 \beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\alpha_1) I_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ &\cdot K_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 , \end{aligned} \quad (3.72)$$

gdzie $\rho = c_2/c_1$. Korzystając z warunku ciągłego kontaktu stempla i półprzestrzeni wzdłuż osi x_1 oraz z faktu, że naprężenia normalne σ_{33} dla $x_3 = 0$ w obszarze $\Omega = R^2 - \langle -a_1, a_1 \rangle \times \langle -a_2, a_2 \rangle$ są równe zero, otrzymamy dla poszczególnych typów - przedstawionych na rysunkach obciążeń, następujące układy równań całkowych:

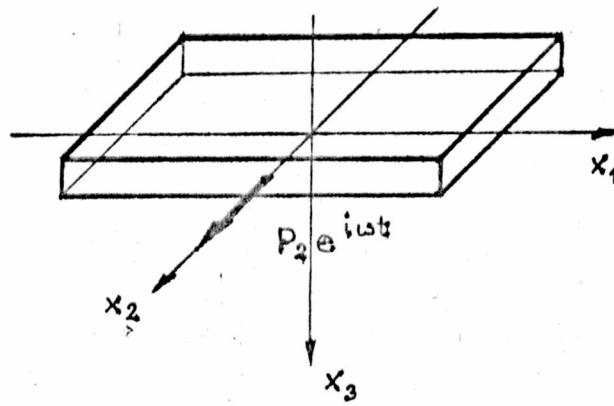
1. Dla obciążenia działającego wzdłuż osi x_1



Rys.48

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2\pi)^2 \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_1(\omega_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \omega_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \omega_1^2 - \omega^2}\right) \cdot e^{-i\omega_1 x_1} d\omega_1 = b_1, \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_1(\omega_1) e^{-i\omega_1 x_1} d\omega_1 = 0, \quad \text{dla } |x_1| > a_1. \end{array} \right. \quad (3.73)$$

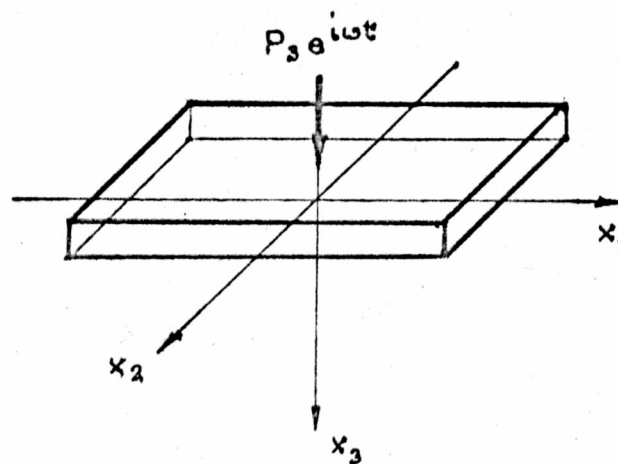
2. Dla obciążenia działającego wzdłuż osi x_2



Rys.49

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_2(\alpha_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ & \quad \cdot e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 = b_2, \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1, \quad (3.74) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_2(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 = 0, \quad \text{dla } |x_1| > a_1. \end{aligned} \right.$$

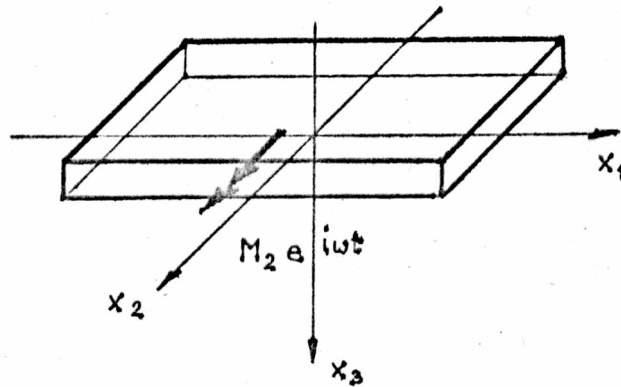
3. Dla obciążenia działającego wzdłuż osi x_3



Rys.50

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta}{(2\pi)^2 \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ & \quad \cdot e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = b_3, \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1, \quad (3.75) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3(\lambda_1) e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = 0, \quad \text{dla } |x_1| > a_1. \end{aligned} \right.$$

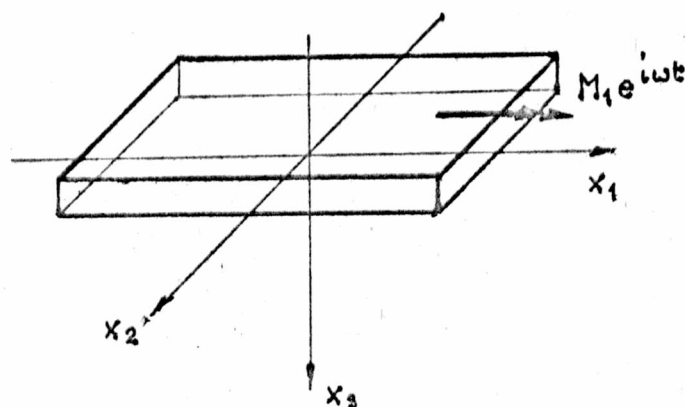
4. Dla momentu działającego w płaszczyźnie $x_1 x_3$



Rys.51

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta}{(2\pi)^2 \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^2(\lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \\ & \quad \cdot e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = b_3^2 x_2, \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1, \quad (3.76) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^2(\lambda_1) e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = 0, \quad \text{dla } |x_1| > a_1. \end{aligned} \right.$$

5. Innego typu układ otrzymamy dla przedstawionego na rys.52 przypadku.



Ryb.52

Różnice te wynikają z faktu zerowania się wartości funkcji przemieszczeń $u_3(x_1, 0, 0)$ wzdłuż linii kontaktu stempla i półprzestrzeni. Uniemożliwia to wykorzystanie dotychczasowych rozważań, w których wykorzystywaliśmy zgodność przemieszczeń bloku i podłoża. W celu rozwiązania tego przypadku przyjmijmy dodatkowo, że funkcja obrotu $\psi(x_1, x_2, 0) = \partial u_3(x_1, x_2, 0) / \partial x_2$ dla punktów osi x_1 , takich że $|x_1| \leq a_1$ jest stała

$$\left. \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_2=0 \\ x_3=0}} = \text{const}, \quad |x_1| \leq a_1. \quad (3.77)$$

Po wykorzystaniu wzoru (3.71), w którym ze względu na charakter obciążenia przyjmijmy $A_3^1 = 0$, oraz po uwzględnieniu równania (3.63) otrzymamy

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_2=0 \\ x_3=0}} = \frac{1}{(8\pi)^{\frac{1}{2}} c_{13}} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^1(\omega_1) \frac{\omega_2 J_1(a_2 |\omega_2|) \text{sgn}(\omega_2)}{(c_2^2 \omega_1^2 + c_2^2 \omega_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-i\omega_1 x_1} d\omega_1 d\omega_2 = b_3^1, \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1. \quad (3.78)$$

Przy obliczeniu tej całki skorzystamy z następujących tożsamości ([25] wz. 8.486, 8.473):

$$|\alpha| K_1(a|\alpha|) = - \frac{\partial}{\partial a} K_0(a|\alpha|) ,$$

$$|\alpha| I_1(a|\alpha|) = \frac{\partial}{\partial a} I_0(a|\alpha|) , \quad (3.79)$$

$$|\alpha| J_1(a|\alpha|) = - \frac{\partial}{\partial a} J_0(a|\alpha|) .$$

Po podstawieniu do równania (3.78) relacji (3.79)₃ i po wyjściu z różniczkowaniem względem a_2 przed znak całki (względem α_2), co jest możliwe na mocy odpowiednich twierdzeń (patrz np. [17]) oraz po skorzystaniu z wzoru całkowego (3.67) otrzymamy

$$\left. \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_2=0 \\ x_3=0}} = - \frac{\beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^1(\alpha_1) \frac{\partial}{\partial a_2} \left[I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \cdot \right. \quad (3.80)$$

$$\left. K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \right] e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 = b_3^1 , \quad |x_1| \leq a_1 .$$

Stąd po wykonaniu różniczkowania względem a_2 oraz wykorzystaniu poczynionych założeń otrzymamy układ równań całkowych

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} 2c_2 \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^1(\alpha_1) \left[I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) K_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) - \right. \\ & \quad \left. - I_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2}\right) \right] \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{c_2^2 \alpha_1^2 - \omega^2} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 = b_3^1 , \quad \text{dla } |x_1| \leq a_1 , \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_3^1(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 = 0 , \quad \text{dla } |x_1| > a_1 . \end{aligned} \right. \quad (3.81)$$

Rozwiązań opisanych wzorami (3.73) - (3.76), (3.81) układów równań całkowych poszukiwać będziemy w postaci

$$\begin{aligned}
 p_i(x_1) &= \varepsilon b_i (a_1^2 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^i T_{2n}\left(\frac{x_1}{a_1}\right), \quad i=1,2,3, \\
 p_3^1(x_1) &= \varepsilon b_3^1 (a_1^2 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n}^1 T_{2n}\left(\frac{x_1}{a_1}\right), \\
 p_3^2(x_1) &= \varepsilon b_3^2 (a_1^2 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n+1}^2 T_{2n+1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right),
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

gdzie

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x_1| \leq a_1 \\ 0 & \text{dla } |x_1| > a_1 \end{cases}.$$

Ograniczymy się do przykładowego rozwiązania układów opisanych wzorami (3.75), (3.76), (3.81). Metoda rozwiązywania pozostałych układów równań całkowych jest analogiczna do przedstawionej w przykładach.

Nałożmy na funkcje p_3 , p_3^1 , p_3^2 jednowymiarową transformatę Fouriera. Po wykorzystaniu wzorów (3.65), (3.66) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_3(\omega_1) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} b_3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^3 J_{2n}(a_1 |\omega_1|), \\
 \bar{p}_3^1(\omega_1) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} b_3^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n}^1 J_{2n}(a_1 |\omega_1|), \\
 \bar{p}_3^2(\omega_1) &= i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} b_3^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n+1}^2 J_{2n+1}(a_1 |\omega_1|) \operatorname{sgn} \omega_1.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do odpowiednich układów dostaniemy równania

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^3 \frac{\beta}{\mu} \int_0^{\infty} J_{2n}(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot$$

$$K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cos \lambda_1 x_1 d\lambda_1 = 1, \text{ dla } |x_1| \leq a_1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n}^1 \frac{\beta}{2c_2 \mu} \int_0^{\infty} J_{2n}(a_1 \lambda_1) \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2} \cdot$$

$$\left[I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) - \right. \quad (3.84)$$

$$\left. - I_1\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \right] \cos \lambda_1 x_1 d\lambda_1 = 1, |x_1| \leq a_1,$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n+1}^2 \frac{\beta}{\mu} \int_0^{\infty} J_{2n+1}(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot$$

$$K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \sin \lambda_1 x_1 = x_1, \text{ dla } |x_1| \leq a_1.$$

Ze względu na postać funkcji p_3 , p_3^1 , p_3^2 , drugie równania rozwiązy-
wanych układów są spełnione tożsamościowo. Biorąc pod uwagę związek
([25], wz. 8.511)

$$e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x =$$

$$= J_0(\lambda a) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\lambda a) T_{2m}\left(\frac{x}{a}\right) + \quad (3.85)$$

$$+ 2i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(\lambda a) T_{2m+1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad 0 < |x| < a,$$

wyrażający funkcje $\cos \lambda x$ i $\sin \lambda x$ w postaci szeregu, po podsta-
wieniu go do wzorów (3.84) i wykonaniu prostych przekształceń
otrzymamy równania

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^3 C_{0n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^3 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m C_{mn} T_{2m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right) &= 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n}^1 D_{0n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n}^1 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m D_{mn} T_{2m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right) &= 1, \quad (3.86) \\ -2 \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n+1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m E_{mn} T_{2m+1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right) &= x_1, \end{aligned}$$

gdzie stałe C_{mn} , D_{mn} , E_{mn} określone są wzorami:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{(-1)^n \beta}{\mu} \int_0^{\infty} J_{2n}(a_1 \omega_1) J_{2m}(a_1 \omega_1) I_0(z) K_0(z) d\omega_1, \\ D_{mn} &= \frac{(-1)^n \beta}{a_2 \mu} \int_0^{\infty} J_{2n}(a_1 \omega_1) J_{2m}(a_1 \omega_1) z \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$[I_0(z) K_1(z) - I_1(z) K_0(z)] d\omega_1,$$

$$E_{mn} = \frac{(-1)^n \beta}{\mu} \int_0^{\infty} J_{2n+1}(a_1 \omega_1) J_{2m+1}(a_1 \omega_1) I_0(z) K_0(z) d\omega_1,$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie dla skrócenia zapisu oznaczono $z = \frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \omega_1^2 - \omega^2}$.

Rozwińmy prawe strony równań (3.86) w szereg względem wielomianów Czebyszewa:

$$x_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} T_{2m+1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right), \quad (3.88)$$

gdzie $c_1 = a_1$, $c_{2m+1} = 0$ dla $m=1, 2, 3, \dots$,

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} T_{2m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right), \quad (3.89)$$

gdzie $c_0 = 1$, $c_{2m} = 0$ dla $m=1, 2, 3, \dots$.

Po porównaniu współczynników przy wielomianach tego samego stopnia otrzymamy trzy nieskończone układy równań

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} B_{2n}^3 &= \delta_{om} \quad , \quad m=0,1,2, \dots \quad , \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} H_{2n}^1 &= \delta_{om} \quad , \quad m=0,1,2, \dots \quad , \\ \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} H_{2n+1}^2 &= \frac{a_1}{2} \delta_{om} \quad , \quad m=0,1,2, \dots \quad , \end{aligned} \quad (3.90)$$

gdzie δ_{mn} jest deltą Kroneckera, pozwalające na obliczenie współczynników rozwinięcia funkcji p_3, p_3^1, p_3^2 równych odpowiednio $B_{2n}^3, H_{2n}^1, H_{2n+1}^2, n=0,1,2, \dots$. Należy tutaj podkreślić, że wielkości te są liczbami zespolonymi ze względu na zespolony charakter współczynników C_{mn}, D_{mn}, E_{mn} . Po obliczeniu stałych $B_{2n}^3, H_{2n}^1, H_{2n+1}^2, n=0,1,2, \dots$ otrzymamy poszukiwane funkcje reakcji podłoża dla rozważanych przypadków obciążenia ($r_3(x_1, x_2)$ w poniższym wzorze nie jest równe $r_3(x_1, x_2)$ ze wzoru (3.64)) :

$$\begin{aligned} r_3(x_1, x_2) &= b_3 \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^3 \frac{T_{2n}(\frac{x_1}{a_1})}{\sqrt{a_1^2 - x_1^2} \sqrt{a_2^2 - x_2^2}} \quad , \\ r_3^1(x_1, x_2) &= b_3^1 \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n}^1 \frac{T_{2n}(\frac{x_1}{a_1}) x_2}{a_2 \sqrt{a_1^2 - x_1^2} \sqrt{a_2^2 - x_2^2}} \quad , \quad (3.91) \\ r_3^2(x_1, x_2) &= b_3^2 \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n+1}^2 \frac{T_{2n+1}(\frac{x_1}{a_1})}{\sqrt{a_1^2 - x_1^2} \sqrt{a_2^2 - x_2^2}} \quad . \end{aligned}$$

W celu obliczenia stałych b_3, b_3^1, b_3^2 będących amplitudami odpowiednio przemieszczenia i obrotów, scałkujemy wyrażenia

$$\begin{aligned}
 & \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} r_3(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = P_3, \\
 & \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} x_2 r_3^1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = M_1, \\
 & \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} x_1 r_3^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = M_2.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Po podstawieniu wzorów (3.91) do równań (3.92) i wykorzystaniu ortogonalności wielomianów Czebyszewa otrzymamy odpowiednio

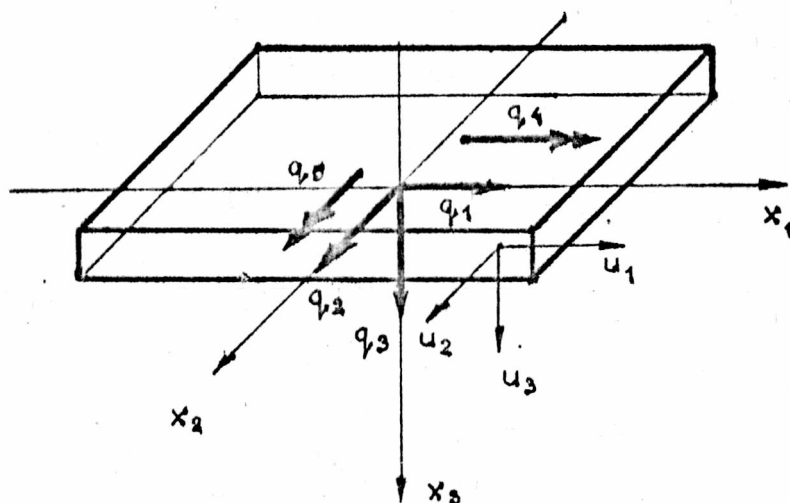
$$b_3 = \frac{P_3}{\pi^2 B_0^3}, \quad b_3^1 = \frac{2M_1}{\pi^2 a_2 H_0^1}, \quad b_3^2 = \frac{2M_2}{\pi^2 a_1 H_1^2}. \tag{3.93}$$

Postępując analogicznie dostaniemy

$$b_1 = \frac{P_1}{\pi^2 B_0^1}, \quad b_2 = \frac{P_2}{\pi^2 B_0^2}. \tag{3.94}$$

W dotychczasowych rozważaniach pomijaliśmy siły bezwładności bloku fundamentowego, których udział w opisanym problemie jest znaczny. Uwzględnimy je obecnie.

Rozpocznijmy od wyprowadzenia macierzy bezwładności fundamentu. Opierać będziemy się na wynikach przedstawionych w pracach [33], [39]. Transformacja współrzędnych uogólnionych $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_5]^T$, opisujących ruch fundamentu na współrzędne lokalne związane z każdym punktem bloku (rys.53)



Rys. 53

ma postać

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = A_m \bar{q} . \quad (3.95)$$

Energia kinetyczna układu jest opisana wzorem

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_V (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dm = \frac{1}{2} \int_V \dot{\bar{u}}^T \dot{\bar{u}} dm = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \left(\int_V A_m^T A_m dm \right) \dot{\bar{q}} , \end{aligned} \quad (3.96)$$

gdzie

$$A_m^T A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 \\ 0 & -x_3 & x_2 & x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 & -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Stąd macierz bezwładności ma postać

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & S_{13} \\ 0 & m & 0 & -S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & m & S_{13} & -S_{23} \\ 0 & -S_{12} & S_{13} & J_1 & -D_3 \\ S_{13} & 0 & -S_{23} & -D_3 & J_2 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

gdzie m - masa fundamentu blokowego,

S_{1j} - moment statyczny masy bloku względem płaszczyzny $x_1 x_j$,

J_j - masowy moment bezwładności bloku względem osi x_j ,

D_j - moment dewiacji masy bryły względem płaszczyzn przecinających się wzdłuż osi x_j .

Uwzględniając charakter obciążenia i wprowadzone dotychczas oznaczenia, mamy następujące związki:

$$\bar{q} = [b_1, b_2, b_3, b_3^1, b_3^2]^T e^{i\omega t} = \bar{b} e^{i\omega t}. \quad (3.99)$$

Oznaczmy przez $\bar{Q} = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_3^1, Q_3^2]^T e^{i\omega t}$ wypadkowy wektor reakcji podłoża, a przez $\bar{P} = [P_1, P_2, P_3, M_1, M_2]^T e^{i\omega t}$ wektor obciążeń zewnętrznych. Wtedy równanie równowagi opisujące drgania fundamentu przyjmie postać

$$\bar{Q} - \omega^2 M \bar{b} = \bar{P}. \quad (3.100)$$

Wykorzystując wzory (3.93) , (3.94) możemy napisać

$$\begin{aligned} Q_1 &= b_1 \pi^2 B_0^1 = c_1 b_1 , \\ Q_2 &= b_2 \pi^2 B_0^2 = c_2 b_2 , \\ Q_3 &= b_3 \pi^2 B_0^3 = c_3 b_3 , \\ Q_4 &= \frac{1}{2} b_3^1 \pi^2 a_2 H_0^1 = c_3^1 b_3^1 , \\ Q_5 &= \frac{1}{2} b_3^2 \pi^2 a_1 H_1^2 = c_3^2 b_3^2 , \end{aligned} \quad (3.101)$$

czyli

$$\bar{Q} = \{c\} \bar{b} , \quad (3.102)$$

gdzie $\{c\} = \text{diag} (c_1, c_2, c_3, c_3^1, c_3^2)$. Po podstawieniu powyższego wzoru do równania (3.100) i prostych algebraicznych przekształceniach, otrzymamy wzór na amplitudy funkcji przemieszczeń i obrotów fundamentu

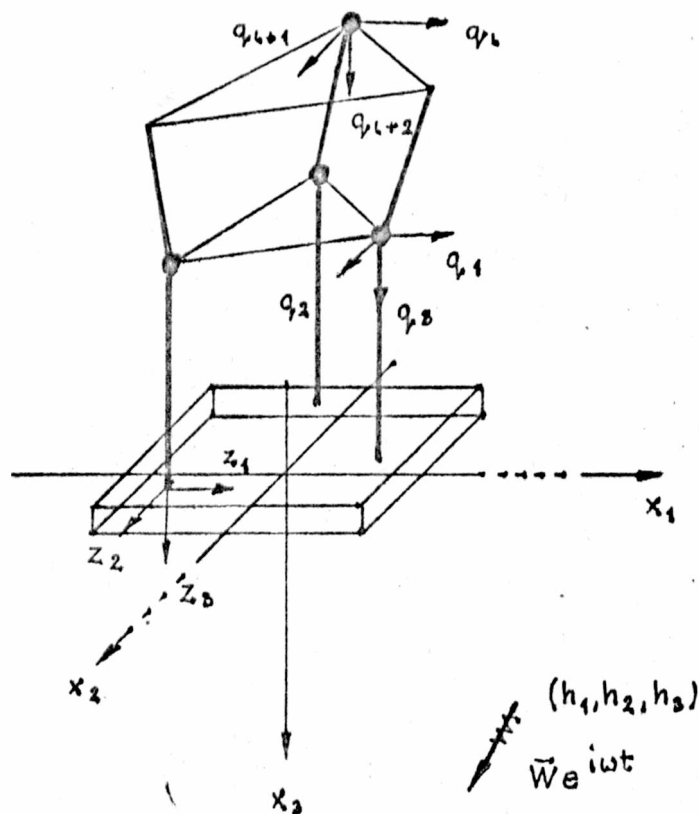
$$\bar{b} = [\{c\} - \omega^2 M]^{-1} \bar{P} . \quad (3.103)$$

W przypadku szczególnym, gdy fundament jest sztywnym prostopadłością (znikają wtedy elementy sprzęgające w macierzy M) mamy

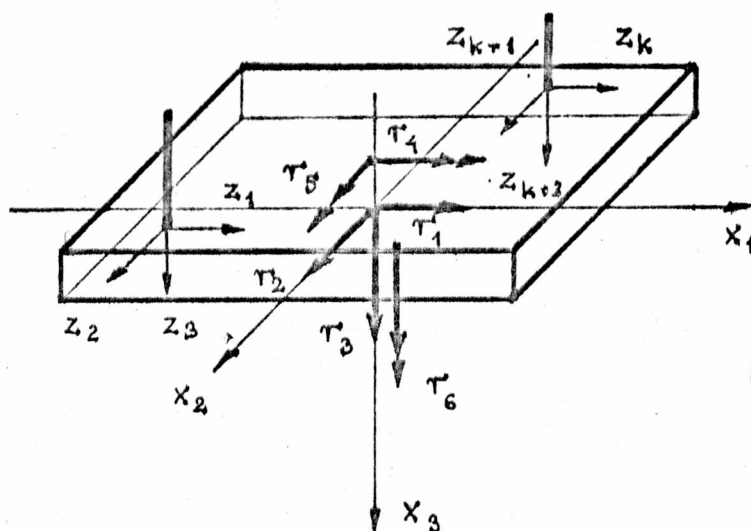
$$\begin{aligned} b_i &= (c_i - \omega^2 m)^{-1} P_i , \quad i=1,2,3 , \\ b_3^j &= (c_3^j - \omega^2 J_j)^{-1} M_j , \quad j=1,2 . \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.3. Interakcja konstrukcji z podłożem inercyjnym - zagadnienie parasejsmiczne

Wyniki uzyskane w punktach 3.2 i 2.5 dotyczące dynamiki fundamentu na podłożu inercyjnym oraz drgań półprzestrzeni wywołanych obciążeniem $\bar{W} e^{i\omega t}$ wykorzystamy w niniejszym punkcie. Rozwiążemy następujące zagadnienie: na półprzestrzeni sprężystej spoczywa sztywny blok fundamentowy o podstawie prostokątnej, będący ostoją obiektu, którego ruch możemy opisać skończonym zbiorem współrzędnych uogólnionych $\bar{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. W pewnym punkcie (h_1, h_2, h_3) półprzestrzeni przyłożona jest siła wymuszająca $\bar{W} e^{i\omega t}$, powodująca ruch układu półprzestrzeni - fundament i za jego pośrednictwem spoczywającego na nim obiektu. Założymy, że oprócz tego wymuszenia na obiekt nie działają żadne siły zewnętrzne. Wprowadzimy dodatkowy wektor współrzędnych uogólnionych $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$, opisujących ruch elementów bezpośrednio połączonych z fundamentem (rys.54, 55)



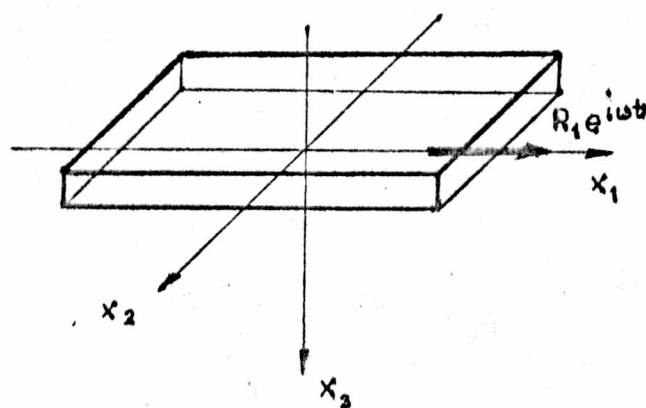
Rys.54



Rys.55

Rozwiązując to zagadnienie korzystać będziemy z założeń upraszczających. Przyjmiemy, że funkcje odporu podłoża dla poszczególnych obciążeń mają postać:

1. Dla obciążenia stycznego działającego wzdłuż osi x_1



Rys.56

$$P_1(x_1, x_2, t) = p_1(x_1, x_2) e^{i\omega t},$$

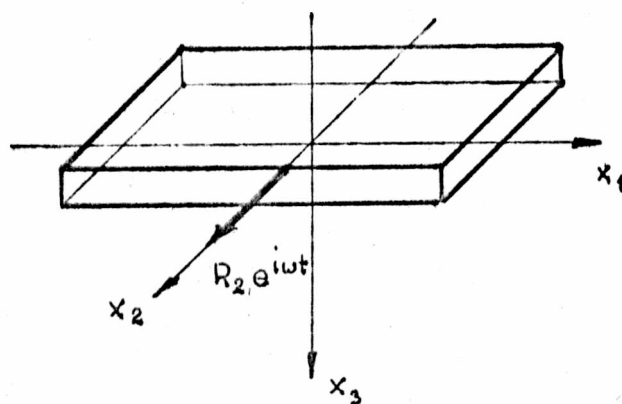
$$p_1(x_1, x_2) = \frac{R_1}{\pi^2} [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

(3.105)

Stąd po wykorzystaniu wzoru (3.65) otrzymamy transformatę funkcji $p_1(x_1, x_2)$

$$\bar{p}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_1}{2\pi} J_0(a_1|\alpha_1|) J_0(a_2|\alpha_2|) . \quad (3.106)$$

2. Dla obciążenia stycznego działającego wzdłuż osi x_2



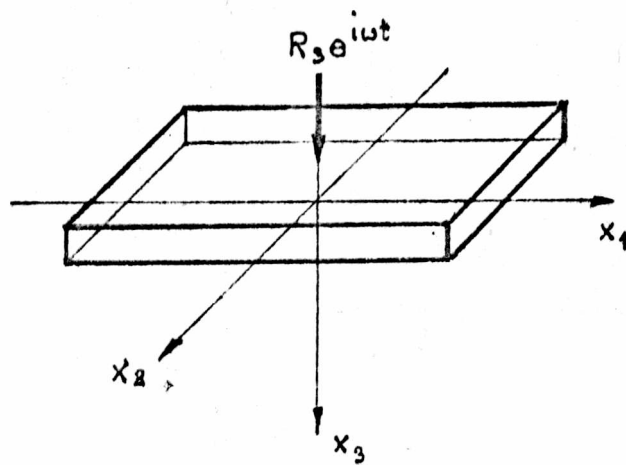
Rys. 57

$$p_2(x_1, x_2, t) = p_2(x_1, x_2) e^{i\omega t} ,$$

$$p_2(x_1, x_2) = \frac{R_2}{\pi^2} [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}} , \quad (3.107)$$

$$\bar{p}_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{R_2}{2\pi} J_0(a_1|\alpha_1|) J_0(a_2|\alpha_2|) .$$

3. Dla obciążenia normalnego działającego wzdłuż osi x_3



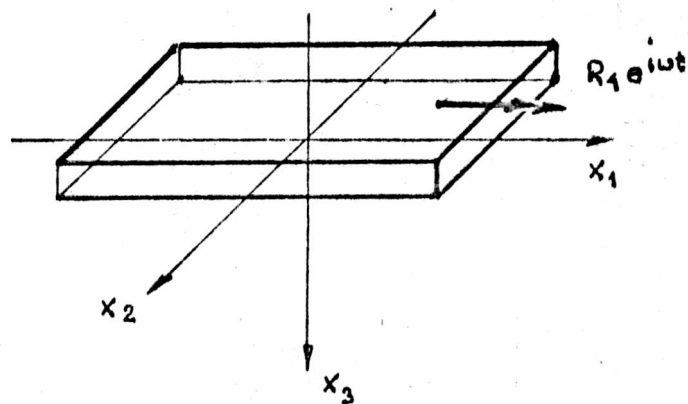
Rys. 58

$$p_3(x_1, x_2, t) = p_3(x_1, x_2) e^{i\omega t} ,$$

$$p_3(x_1, x_2) = \frac{R_3}{\pi^2} [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}} , \quad (3.108)$$

$$\bar{p}_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{R_3}{2\pi} J_0(a_1 |\omega_1|) J_0(a_2 |\omega_2|) .$$

4. Dla momentu działającego w płaszczyźnie $x_2 x_3$



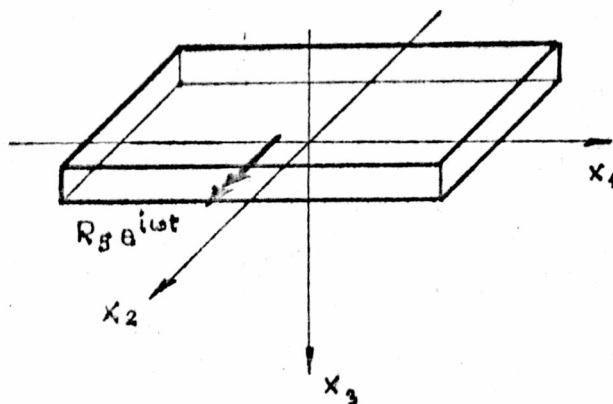
Rys. 59

$$P_4(x_1, x_2, t) = p_4(x_1, x_2) e^{i\omega t} ,$$

$$p_4(x_1, x_2) = \frac{2R_4 x_2}{\pi^2 a_2^2} [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}} , \quad (3.109)$$

$$\bar{p}_4(\lambda_1, \lambda_2) = i \frac{R_4}{\pi a_2} J_0(a_1 |\lambda_1|) J_1(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_2 .$$

5. Dla momentu działającego w płaszczyźnie $x_1 x_3$



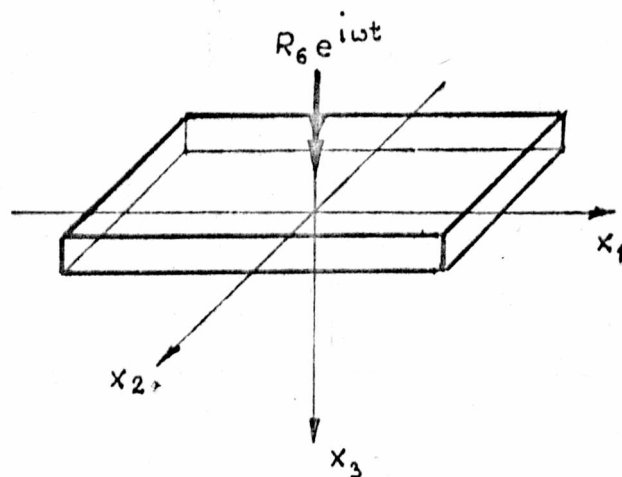
Rys. 60

$$P_5(x_1, x_2, t) = p_5(x_1, x_2) e^{i\omega t} ,$$

$$p_5(x_1, x_2) = \frac{2R_5 x_1}{\pi^2 a_1^2} [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}} , \quad (3.110)$$

$$\bar{p}_5(\lambda_1, \lambda_2) = i \frac{R_5}{\pi a_1} J_1(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_1 .$$

6. Dla momentu działającego w płaszczyźnie $x_1 x_2$



Rys. 61

$$p_6(x_1, x_2, t) = p_6(x_1, x_2) e^{i\omega t},$$

$$p_6(x_1, x_2) = \left[\frac{2R_6 x_1}{\pi^2 a_1^2} \xi + \frac{2R_6 x_2}{\pi^2 a_2^2} (1-\xi) \right] \cdot [(a_1^2 - x_1^2)(a_2^2 - x_2^2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.111)$$

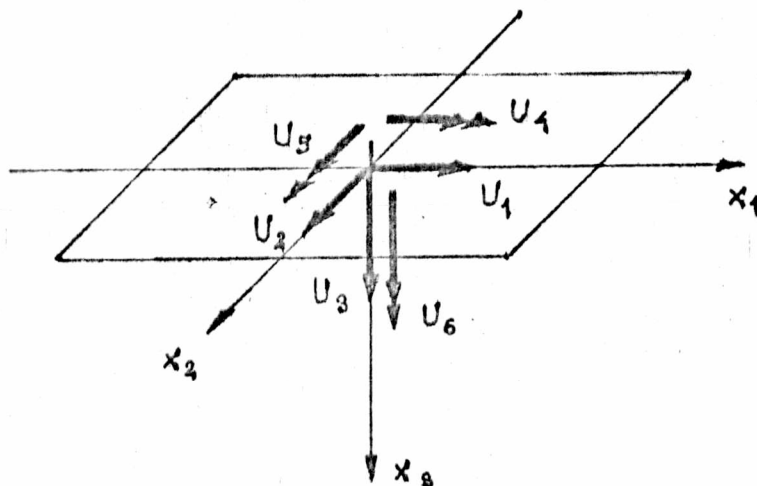
$$\begin{aligned} \bar{p}_6(\alpha_1, \alpha_2) = & i \frac{R_6}{\pi a_1} \xi J_1(a_1 |\alpha_1|) J_0(a_2 |\alpha_2|) \operatorname{sgn} \alpha_1 + \\ & + i \frac{R_6}{\pi a_2} (1-\xi) J_0(a_1 |\alpha_1|) J_1(a_2 |\alpha_2|) \operatorname{sgn} \alpha_2, \end{aligned}$$

gdzie ξ jest rozdzielnikiem momentu R_6 (wzór na jego wartość podamy w dalszej części).

Warunek ciągłego kontaktu płyty z podłożem osłabimy, żądając tylko zgodności przemieszczeń i obrotów w punkcie będącym środkiem podstawy fundamentu.

Rozwiązanie zagadnienia rozpoczniemy od znalezienia pola przemieszczeń i obrotów powstałego w wyniku działania na model półprzestrzeni obciążenia opisanego wzorami (3.105) - (3.111). Ze względu na poczynione założenia i dalsze potrzeby ograniczymy się do znalezienia przemieszczeń i obrotów w punkcie $(0, 0, 0)$. Oznaczmy przez

$\bar{U} = [U_1, U_2, \dots, U_6]^T$ wektor amplitud funkcji przemieszczeń i obrotów w punkcie $(0, 0, 0)$, jak na rys.62



Rys.62

Wykorzystując metody i wzory przedstawione w punkcie 3.2 opisującym stacjonarne drgania fundamentu, otrzymamy dla przedstawionych na rysunkach 56 - 61 przypadków obciążenia następujące wzory:

1.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{R_1}{4\pi^2 c_2 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|)}{(c_1^2 \lambda_1^2 + c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\
 &= \frac{R_1}{\pi^2 \mu} \int_0^{\infty} J_0(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) d\lambda_1 = \\
 &= R_1 k_1(a_1, a_2, c_1, c_2, \rho, \omega) ,
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

2.

$$U_2 = \frac{R_2}{4\pi^2 c_2 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|)}{(c_2^2 \lambda_1^2 + c_1^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R_2}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty J_0(a_2 \lambda_2) I_0\left(\frac{a_1}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_1}{2c_2} \sqrt{c_1^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) d\lambda_2 = \\
 &\quad (3.113) \\
 &= R_2 k_2(a_1, a_2, c_1, c_2, \rho, \omega) ,
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 U_3 &= \frac{R_3}{4\pi^2 c_1 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|)}{(c_2^2 \lambda_1^2 + c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\
 &\quad (3.114) \\
 &= \frac{R_3 \beta}{\pi^2 \mu} \int_0^\infty J_0(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) d\lambda_1 = \\
 &= R_3 k_3(a_1, a_2, c_1, c_2, \rho, \omega) , \quad \beta = c_2/c_1 ,
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 U_4 &= \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \frac{R_4}{2\pi^2 c_1 a_2 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_2 J_0(a_1 |\lambda_1|) J_1(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_2}{(c_2^2 \lambda_1^2 + c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 = \\
 &= \frac{2R_4 \beta}{\pi a_2 \mu} \int_0^\infty \lambda_2 J_1(a_2 \lambda_2) I_0\left(\frac{a_1}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot K_0\left(\frac{a_1}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) d\lambda_2 = R_4 k_4(a_1, a_2, c_1, c_2, \rho, \omega) , \\
 &\quad (3.115)
 \end{aligned}$$

5.

$$U_5 = \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{R_5}{2\pi^2 c_1 a_1 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1 J_1(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_1}{(c_2^2 \lambda_1^2 + c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \frac{2R_5\beta}{\pi^2 a_1 \mu} \int_0^{\infty} \lambda_1 J_1(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot$$

(3.116)

$$\cdot K_0\left(\frac{a_2}{2c_2} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) d\lambda_1 = R_5 k_5(a_1, a_2, c_1, c_2, \vartheta, \omega) ,$$

6.

$$U_6 = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{R_6(1-\xi)}{2\pi^2 c_2 a_2 \vartheta} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_2 J_0(a_1 |\lambda_1|) J_1(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_2}{(c_1^2 \lambda_1^2 + c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= R_6 \frac{2(1-\xi)\beta}{\pi^2 a_2 \mu} \int_0^{\infty} \lambda_2 J_1(a_2 \lambda_2) I_0\left(\frac{a_1}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) \cdot$$

(3.117)

$$\cdot K_0\left(\frac{a_1}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \lambda_2^2 - \omega^2}\right) d\lambda_2 = R_6(1-\xi) k_6^1(a_1, a_2, c_1, c_2, \vartheta, \omega) =$$

$$= R_6 k_6(a_1, a_2, c_1, c_2, \vartheta, \omega) ,$$

lub

$$U_6 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \frac{R_6 \xi}{2\pi^2 c_2 a_1 \vartheta} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1 J_1(a_1 |\lambda_1|) J_0(a_2 |\lambda_2|) \operatorname{sgn} \lambda_1}{(c_2^2 \lambda_1^2 + c_1^2 \lambda_2^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= R_6 \frac{2\xi\beta}{\pi^2 a_1 \mu} \int_0^{\infty} \lambda_1 J_1(a_1 \lambda_1) I_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) \cdot$$

(3.118)

$$\cdot K_0\left(\frac{a_2}{2c_1} \sqrt{c_2^2 \lambda_1^2 - \omega^2}\right) d\lambda_1 = R_6 \xi k_6^2(a_1, a_2, c_1, c_2, \vartheta, \omega) =$$

$$= R_6 k_6(a_1, a_2, c_1, c_2, \vartheta, \omega) .$$

Dzieląc stronami wyrażenia (3.117) i (3.118) , po prostych przekształceniach otrzymamy wzór na współczynnik ξ

$$\xi = \frac{k_6^1(a_1, a_2, c_1, c_2, \varphi, \omega)}{k_6^1(a_1, a_2, c_1, c_2, \varphi, \omega) + k_6^2(a_1, a_2, c_1, c_2, \varphi, \omega)} \quad (3.119)$$

Obciążenie $[R_1, R_2, \dots, R_6]^T e^{i\omega t} = \bar{R} e^{i\omega t}$ powstaje w wyniku wzajemnego oddziaływania półprzestrzeni z układem fundament - obiekt i jest wypadkową reakcji podłoża. Oznaczmy przez $\bar{U}^W = [U_1^W, U_2^W, \dots, U_6^W]^T$ znany wektor amplitud przemieszczeń i obrotów półprzestrzeni wywołanych obciążeniem $\bar{W} = [W_1, W_2, W_3]^T \delta(x_1 - h_1) \cdot \delta(x_2 - h_2) \delta(x_3 - h_3) e^{i\omega t}$ (patrz wzory (2.80), (2.81)), a przez $\bar{r} = [r_1, r_2, \dots, r_6]^T$ wektor amplitud funkcji przemieszczeń i obrotów całego układu półprzestrzeni - fundament - obiekt w punkcie $(0, 0, 0)$, jak na rys.55. Stosując zasadę superpozycji otrzymamy

$$\bar{r} = \{k\} \bar{R} + \bar{U}^W, \quad (3.120)$$

gdzie $\{k\} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_6)$. Nie znamy jednak wektora $\bar{R}$. W celu jego wyznaczenia, zajmijmy się układem fundament - obiekt.

Założmy, że ruch fundamentu opisany wektorem $\bar{r}$ jest znany. Znamy jest wtedy również zbiór współrzędnych $\bar{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m6} \end{bmatrix} \bar{r} = A \bar{r} \quad (3.121)$$

gdzie A jest daną macierzą transformacji współrzędnych $\bar{r}$ na $\bar{z}$. Ze względu na charakter obciążenia rozwiązania szukać będziemy w postaci $\bar{q}(t) = \bar{q} e^{i\omega t}$. Oznaczmy przez K, B odpowiednio macierz sztywności i bezwładności dla obiektu. Równanie opisujące jego ruch będzie miało następującą postać, [39]:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} B_{qq} & B_{qz} \\ B_{zq} & B_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qz} \\ K_{zq} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

gdzie $\bar{Z}$ jest nieznanym wektorem sił pojawiających się w miejscach połączenia obiektu z fundamentem. Stąd po prostych przekształceniach otrzymamy związki

$$[K_{qq} - \omega^2 B_{qq}] \bar{q} = - [K_{qz} - \omega^2 B_{qz}] \bar{z}, \quad (3.123)$$

$$\bar{Z} = [K_{zq} - \omega^2 B_{zq}] \bar{q} + [K_{zz} - \omega^2 B_{zz}] \bar{z}.$$

Zakładając, że $\det [K_{qq} - \omega^2 B_{qq}] \neq 0$ (w przypadku gdy wyznacznik równa się zeru mamy stan rezonansowy), możemy napisać

$$\bar{q} = - [K_{qq} - \omega^2 B_{qq}]^{-1} [K_{qz} - \omega^2 B_{qz}] \bar{z}. \quad (3.124)$$

Po podstawieniu $\bar{q}$ z powyższego wzoru do równania (3.123)₂ otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= ([K_{zz} - \omega^2 B_{zz}] - [K_{zq} - \omega^2 B_{zq}][K_{qq} - \omega^2 B_{qq}]^{-1} \\ &\quad \cdot [K_{qz} - \omega^2 B_{qz}]) \bar{z} = G \bar{z}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Oznaczmy przez $\bar{Q} e^{i\omega t}$ wypadkowy wektor sił uogólnionych $\bar{Z}$ sprowadzony do środka podstawy fundamentu. Wykorzystując wzory (3.121) i (3.125) dostaniemy zależność

$$\bar{Q} = A^T \bar{Z} = A^T G \bar{z} = A^T G A \bar{r}. \quad (3.126)$$

Równanie równowagi fundamentu ma postać

$$\bar{R} e^{i\omega t} - \omega^2 M \bar{R} e^{i\omega t} = \bar{Q} e^{i\omega t}, \quad (3.127)$$

gdzie M jest macierzą bezwładności dla fundamentu opisaną wzorem (3.98). Wykorzystując równania (3.126) i (3.120), po prostych algebraicznych przekształceniach otrzymamy poszukiwany wektor

$$\begin{aligned} \bar{R} &= [I - \omega^2 M \{k\} - A^T G A \{k\}]^{-1} \\ &\cdot [A^T G A + \omega^2 M] \bar{U}^w, \end{aligned} \quad (3.128)$$

gdzie $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Znając wektor $\bar{R}$ możemy obliczyć pozostałe wielkości - wektory $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{q}$, $\bar{z}$, $\bar{Q}$. I tak ze wzorów (3.120) i (3.128) mamy

$$\begin{aligned} \bar{r} &= [\{k\} + I] [I - \omega^2 M \{k\} - A^T G A \{k\}]^{-1} \\ &\cdot [A^T G A + \omega^2 M] \bar{U}^w. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Biorąc pod uwagę zależności (3.121) i (3.124) otrzymamy

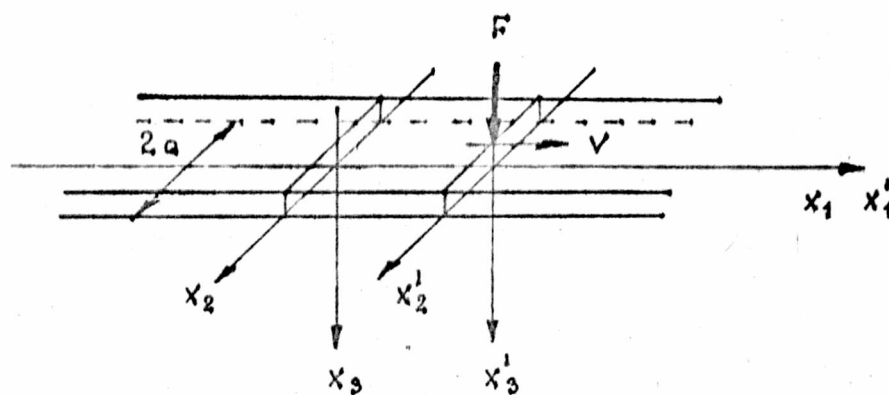
$$\begin{aligned} \bar{z} &= A \bar{r} = A [\{k\} + I] [I - \omega^2 M \{k\} - A^T G A \{k\}]^{-1} \\ &\cdot [A^T G A + \omega^2 M] \bar{U}^w, \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \bar{q} &= - [K_{qq} - \omega^2 B_{qq}]^{-1} [K_{qz} - \omega^2 B_{qz}] \cdot \\ &\cdot A [\{k\} + I] [I - \omega^2 M \{k\} - A^T G A \{k\}]^{-1} \\ &\cdot [A^T G A + \omega^2 M] \bar{U}^w. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Wykorzystując wzory (3.125), (3.130) oraz (3.126), (3.129) znajdziemy odpowiednio wyrażenia na $\bar{Z}$ i $\bar{Q}$.

3.4. Drgania belki spoczywającej na inercyjnym podłożu sprężystym, obciążonej siłą ruchomą

Rozważać będziemy zagadnienie drgań belki nieskończonej spoczywającej na sprężystym podłożu, obciążonej przesuwającą się ze stałą prędkością siłą skupioną $F = P\delta(x_1 - vt)\delta(x_2)$, jak na rys.63.



Rys.63

Wykorzystamy następujące znane równanie belki:

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + \rho_b \frac{d^2 W}{dt^2} = q(x_1, t) . \quad (3.132)$$

Podłoże w przypadku występowania tylko obciążenia normalnego opisane jest równaniami

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \rho \frac{d^2 u_3}{dt^2} = 0 , \quad (3.133)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - p_3 ,$$

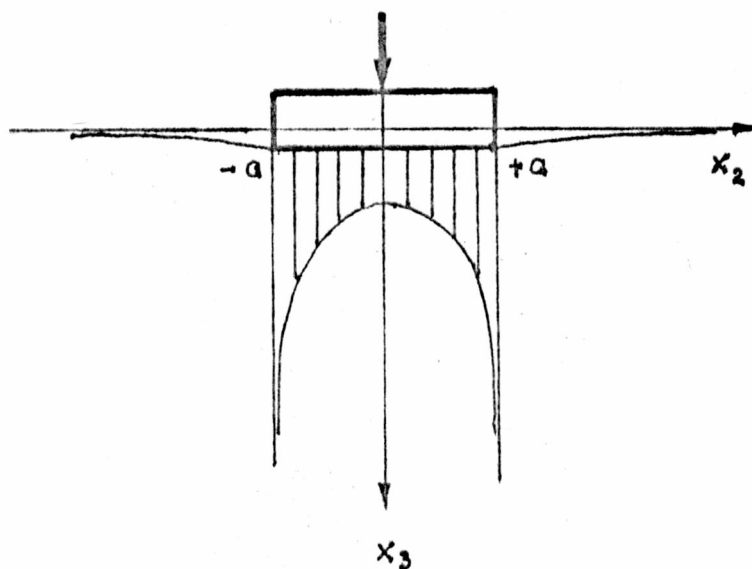
gdzie $(3.133)_2$ jest naprężeniowym warunkiem brzegowym.

W celu uproszczenia rozważań, zagadnienie półprzestrzeni z danymi warunkami brzegowymi sprowadzimy do zagadnienia przestrzeni sprężystej, zastępując warunek brzegowy $(3.133)_2$ siłą masową $X_3 = 2p_3(x_1, x_2) \delta(x_3)$. Możliwość takiego postępowania wynika z rozważań przedstawionych w punkcie 2.3. Przyjmijmy również, że funkcja odporu podłoża ma postać (rys.64).

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} P r(x_1, t) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases}, \quad (3.134)$$

stąd

$$X_3 = \begin{cases} 2P r(x_1, t) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases}, \quad (3.135)$$



Rys.64

(czynniki $(a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}}$ jest identyczny jak w płaskim statycznym zagadnieniu kontaktowym rozważanym w punkcie 3.1).

Jednocześnie osłabimy warunek ciągłego kontaktu belki z podłożem, zakładając zgodność przemieszczeń tylko wzdłuż osi x_1 . Rozważania ograniczymy do przypadku zagadnienia stacjonarnego.

Wykorzystując przedstawione założenia otrzymamy równania

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + \rho_b \frac{d^2 W}{dt^2} = q(x_1, t) \quad , \quad (3.136)$$

gdzie

$$\begin{aligned} q(x_1, t) &= \int_{-a}^a (P\delta(x_1 - vt)\delta(x_3) - Pr(x_1, t)(a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}}) dx_2 = \\ &= P\delta(x_1 - vt) - \pi r(x_1, t) \quad , \end{aligned}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \rho \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{2P\delta(x_3)}{(a^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (3.137)$$

Wprowadzimy nowy układ współrzędnych, związany z poruszającym się obciążeniem, jak na rys.63

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{a} \quad , \quad x'_2 = \frac{x_2}{a} \quad , \quad x'_3 = \frac{x_3}{a} \quad . \quad (3.138)$$

Wtedy człony inercyjne w równaniach (3.136), (3.137) wyrażają się wzorem

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{v^2}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1'^2} - 2 \frac{v}{a} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1' \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad , \quad (3.139)$$

gdzie U równe jest odpowiednio W i u_3 . Po wykorzystaniu poczynionych założeń i ograniczeniu się do rozwiązania stacjonarnego, równania (3.136) i (3.137) przyjmą odpowiednio postać :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x_1'^4} + b^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1'^2} = \frac{Pa^3}{EJ} - \pi \frac{Pa^3}{EJ} r'(x_1', t) , \quad (3.140)$$

$$(c_2^2 - v^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1'^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2'^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3'^2} + \frac{a^2 x_3'}{\rho} = 0 , \quad (3.141)$$

gdzie $b^2 = \rho_b v^2 a^2 / EJ$, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, $c_2^2 = \mu / \rho$,

$$r'(x_1', t) = ar(x_1, t) , \quad X_3' = 2Pr'(x_1, t) \delta(x_3') / a^3 (1 - x_2'^2)^{\frac{1}{2}} .$$

W dalszej części dla uproszczenia zapisu pomijając będziemy primy.

Ze względu na zastosowaną metodę transformacji Fouriera przydatny będzie następujący wzór całkowy ([47], str.494)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 + a^2)^{-1} e^{-i\lambda x} d\lambda = \pi a^{-1} e^{-ax} , \quad (3.142)$$

oraz wzory (3.65) - (3.68).

Rozwiązanie zagadnienia rozpoczniemy od równania ruchu belki (3.140). W tym celu nałożymy na nie jednowymiarową transformatę Fouriera zdefiniowaną wzorem

$$\bar{u}(\lambda_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1) e^{i\lambda_1 x_1} dx_1 , \quad (3.143)$$

co prowadzi do wyniku

$$\bar{W}(\lambda_1) = \frac{Pa^3}{EJ} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi \bar{r}(\lambda_1)}{(\lambda_1^4 - b^2 \lambda_1^2)} . \quad (3.144)$$

Chcąc rozwiązać równanie (3.141), nałożymy na nie potrójną transformację Fouriera określoną wzorem

$$\tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.145)$$

Po wykorzystaniu wzoru (3.65) i wykonaniu przekształceń dostaniemy związek

$$\tilde{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{P}{a g} \frac{J_0(|\alpha_2|) \bar{r}(\alpha_1)}{(c_2^2 - v^2)\alpha_1^2 + c_2^2 \alpha_2^2 + c_1^2 \alpha_3^2}, \quad (3.146)$$

pozwalający na obliczenie funkcji $u_3(x_1, x_2, x_3)$. Wykonując na powyższym równaniu odwrotną jednowymiarową transformację Fouriera względem α_3 (wzór (3.142)) otrzymamy

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{P}{2\pi g c_1 c_2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) \bar{r}(\alpha_1)}{(c^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} (c^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}} |x_3| + i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\right)\right] d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (3.147)$$

gdzie $c^2 = 1 - v^2 / c_2^2$. Dla $x_3 = 0$ mamy

$$u_3(x_1, x_2, 0) = \frac{P}{2\pi g c_1 c_2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) \bar{r}(\alpha_1)}{(c^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (3.148)$$

Wykorzystamy teraz warunek kontaktu belki z podłożem $u_3(x_1, 0, 0) = W(x_1)$ równoważny warunkowi $\tilde{u}_3(\alpha_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_3=0}} = \bar{W}(\alpha_1)$ (rozważania ograniczymy na razie do przypadku $v < c_2$, przypadek $v > c_2$ rozważymy później)

Korzystając ze wzorów (3.144) i (3.148) warunek ten możemy napisać w postaci

$$\frac{P}{2a\varrho c_1 c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) \bar{r}(\alpha_1)}{(c^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 = \frac{Pa^3}{EJ} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi \bar{r}(\alpha_1)}{\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2} . \quad (3.149)$$

Całkę występującą po lewej stronie powyższego równania możemy przedstawić w postaci zamkniętej korzystając z wzoru całkowego (3.67).

Otrzymamy wtedy następujący związek:

$$\frac{P}{a\varrho c_1 c_2} I_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) \bar{r}(\alpha_1) = \frac{Pa^3}{EJ} \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi \bar{r}(\alpha_1)}{\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2} , \quad (3.150)$$

pozwalający na obliczenie funkcji

$$\bar{r}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{EJ}{a^4 \varrho c_1 c_2} I_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + \pi \right]^{-1} . \quad (3.151)$$

Podstawiając ten wynik do wzoru określającego funkcję przemieszczeń u_3 (wzór (3.147)) i powtórnie wykorzystując wzór całkowy (3.67), otrzymamy końcowy wynik

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{1}{2}c\alpha_1\right) K_0\left(\frac{1}{2}c\alpha_1\right) e^{-i\alpha_1 x_1}}{I_0\left(\frac{1}{2}c\alpha_1\right) K_0\left(\frac{1}{2}c\alpha_1\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + f} d\alpha_1 , \quad (3.152)$$

gdzie

$$f = \pi a^3 \varrho c_1 c_2 / EJ = \pi a^3 \mu / \beta EJ , \quad \beta^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu) .$$

Rozważmy teraz przypadek $v > c_2$. Przypadek ten rozwiązuje się analogicznie jak przypadek $v < c_2$ do wzoru (3.149) włącznie.

Jedyną różnicą jest to, że w miejsce stałej c^2 mamy teraz stałą $-d^2$, gdzie $d^2 = v^2/c_2^2 - 1$. Rozwiązanie rozpoczniemy od odpowiednika równania (3.149)

$$\frac{P}{2a_0 c_1 c_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) \bar{r}(\alpha_1)}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 = \frac{Pa^3 (2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \pi \bar{r}(\alpha_1)}{EJ (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2)} . \quad (3.153)$$

Ze wzoru tego możemy obliczyć transformatę funkcji reakcji podłoża $\bar{r}(\alpha_1)$. Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\bar{r}(\alpha_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{EJ}{2a_0^4 c_1 c_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 \right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + \pi \right]^{-1} . \quad (3.154)$$

Jak pokazano w punkcie 3.2, całkę występującą w tym równaniu możemy przedstawić w postaci zamkniętej (patrz wzór (3.68)), z tym że całka ta jest wieloznaczna. W celu wybrania odpowiedniej gałęzi, skorzystamy z fizycznej interpretacji funkcji $r(x_1)$. Funkcja ta jako reakcja podłoża jest funkcją rzeczywistą. W związku z tym jej transformata Fouriera musi mieć postać

$$\bar{r}(\alpha_1) = \bar{r}_p(\alpha_1) + i \bar{r}_n(\alpha_1) , \quad (3.155)$$

gdzie

$\bar{r}_p(\alpha_1)$ - parzysta funkcja rzeczywista,

$\bar{r}_n(\alpha_1)$ - nieparzysta funkcja rzeczywista.

Aby był spełniony powyższy warunek, funkcja występująca we wzorze (3.154) określona całką

$$c(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|)}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\alpha_2 , \quad (3.156)$$

musi być tego samego typu co funkcja $\bar{r}(\alpha_1)$ tzn.

$$C(\alpha_1) = C_p(\alpha_1) + i C_n(\alpha_1) \quad . \quad (3.157)$$

Biorąc pod uwagę wzory (3.68) i (3.157) widzimy, że całka (3.156) musi przyjąć jedną z dwóch postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) d\alpha_2}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} -\pi i J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(2)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) & \text{dla } \alpha_1 < 0, \\ \pi i J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(1)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) & \text{dla } \alpha_1 > 0, \end{cases} \quad (3.158)$$

lub

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(|\alpha_2|) d\alpha_2}{(\alpha_2^2 - d^2 \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \pi i J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(1)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) & \text{dla } \alpha_1 < 0, \\ -\pi i J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(2)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) & \text{dla } \alpha_1 > 0. \end{cases} \quad (3.159)$$

Stąd na podstawie wzoru (3.154) otrzymamy dwie sprzężone transformaty funkcji odporu podłoża

$$\bar{r}_1(\alpha_1) = \begin{cases} -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2a^4 \rho c_1 c_2} J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(2)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) - \pi \right]^{-1} & \text{dla } \alpha_1 < 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2a^4 \rho c_1 c_2} J_0(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) H_0^{(1)}(\frac{1}{2}d|\alpha_1|) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + \pi \right]^{-1} & \text{dla } \alpha_1 > 0 \end{cases} \quad (3.160)$$

oraz

$$\bar{r}_2(\alpha_1) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2a^4 \rho c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2}d|\alpha_1|\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}d|\alpha_1|\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + \pi \right]^{-1} \\ \text{dla } \alpha_1 < 0, \\ \\ -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{i\pi EJ}{2a^4 \rho c_1 c_2} J_0\left(\frac{1}{2}d|\alpha_1|\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}d|\alpha_1|\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) - \pi \right]^{-1} \\ \text{dla } \alpha_1 > 0. \end{cases} \quad (3.161)$$

Po podstawieniu tych wyników do wzoru określającego funkcję przemieszczeń u_3 i po powtórnym wykorzystaniu wzorów (3.158) i (3.159) otrzymamy poszukiwane rozwiązania, odpowiadające obliczonym transformatom funkcji odporu podłoża:

$$u_3^1(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) e^{-\alpha_1 x_1 i}}{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) - g} d\alpha_1, \quad (3.162)$$

$$u_3^2(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) e^{-\alpha_1 x_1 i}}{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + g} d\alpha_1,$$

gdzie

$$g = 2ia^3 \rho c_1 c_2 / EJ = 2ia^3 / \beta EJ. \quad (3.163)$$

Należy podkreślić, że tylko jedno z rozwiązań ma sens fizyczny. Przed dokonaniem wyboru pokażemy związek łączący otrzymane rozwiązania.

Oznaczmy przez

$$\bar{v}_{1,2}(\alpha_1) = \operatorname{Re} \left[\frac{Pa^3}{\pi EJ} \frac{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(1),(2)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right)}{J_0\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) H_0^{(1),(2)}\left(\frac{1}{2}d\alpha_1\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) \mp g} \right], \quad (3.164)$$

$$\bar{w}_{1,2}(\lambda_1) = \text{Im} \left[\frac{\text{Pa}^3}{\pi E J} \frac{J_0\left(\frac{1}{2}d\lambda_1\right) H_0^{(1),(2)}\left(\frac{1}{2}d\lambda_1\right)}{J_0\left(\frac{1}{2}d\lambda_1\right) H_0^{(1),(2)}\left(\frac{1}{2}d\lambda_1\right) (\lambda_1^4 - b^2 \lambda_1^2) \mp g} \right]. \quad (3.165)$$

Okazuje się, że funkcje podcałkowe (bez czynnika $e^{-i\lambda_1 x_1}$) występujące we wzorach (3.162), (3.163) różnią się tylko znakiem części urojonej. Mamy zatem

$$\bar{v}_1(\lambda_1) = \bar{v}_2(\lambda_1), \quad \bar{w}_1(\lambda_1) = -\bar{w}_2(\lambda_1). \quad (3.166)$$

Wykorzystując wprowadzone oznaczenia oraz związki (3.166), wzory (3.162) i (3.163) przedstawimy w następującej postaci

$$\begin{aligned} u_3^1(x_1, 0, 0) &= \text{Re} \int_0^\infty [\bar{v}_1(\lambda_1) + i \bar{w}_1(\lambda_1)] e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = \\ &= v_1(x_1) + w_1(x_1), \\ u_3^2(x_1, 0, 0) &= \text{Re} \int_0^\infty [\bar{v}_1(\lambda_1) - i \bar{w}_1(\lambda_1)] e^{-i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = \\ &= v_1(x_1) - w_1(x_1), \end{aligned} \quad (3.167)$$

gdzie

$v_1(x_1)$ jest częścią parzystą funkcji $u_3^1(x_1, 0, 0)$,
 $w_1(x_1)$ jest częścią nieparzystą funkcji $u_3^1(x_1, 0, 0)$.

Ze wzorów (3.167) wynika, że funkcje u_3^1 , u_3^2 związane są ze sobą równaniem

$$u_3^1(x_1, 0, 0) = u_3^2(-x_1, 0, 0) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \quad (3.168)$$

Przedstawimy teraz własność jaką musi spełniać rozwiązanie posiadające sens fizyczny. Opierając się na wynikach uzyskanych w pracach [30], [58], [46] (str. 583 - 590) żądamy, aby rozwiązanie to przyjmowało maksymalną wartość (maksymalne przemieszczenie) za poruszającą się siłą tzn. w przedziale $(-\infty, 0)$. Ze względu na złożoną postać rozwiązania wyboru możemy dokonać po wykonaniu obliczeń numerycznych. Mając obliczone funkcje $v_1(x_1)$, $w_1(x_1)$ łatwo znajdziemy poszukiwane rozwiązanie.

Powróćmy jeszcze raz do założeń poczynionych na wstępie. Założyliśmy wtedy, między innymi, że funkcja oporu podłoża ma postać

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} P r(x_1, t) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases} \quad (3.169)$$

Warunek ten możemy znacznie uogólnić. Założymy mianowicie, że funkcja ta wyraża się wzorem

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} P r(x_1, t) g(x_2) & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases} \quad (3.170)$$

gdzie $g(x_2)$ jest pewną całkowalną z kwadratem, ciągłą, przedziałami gładką funkcją parzystą określoną w przedziale $\langle -a, a \rangle$. Wtedy również funkcja $f(x_2) = g(x_2) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}}$ będzie tego samego typu co funkcja $g(x_2)$. Wykorzystując odpowiednie twierdzenia o rozwijaniu funkcji w uogólnione szeregi Fouriera (patrz np. [40]), otrzymamy rozwinięcie względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju:

$$f(x_2) = g(x_2) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right), \quad (3.171)$$

gdzie

$$a_{2n} = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-a}^a g(x_2) T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right) dx_2, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \\ 2 & \text{dla } n \neq 0 \end{cases}.$$

Szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale domkniętym $\langle -a_1, a_1 \rangle \subset (-a, a)$, tzn. jest zbieżny w przedziale $(-a, a)$ nieomal jednostajnie. Ze wzoru (3.171) otrzymamy

$$g(x_2) = (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right). \quad (3.172)$$

Funkcja odporu podłoża przyjmie zatem postać

$$R(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \Pr(x_1, t) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right) & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases}, \quad (3.173)$$

a odpowiadająca jej siła masowa X_3 ma postać

$$X_3 = \begin{cases} 2P r(x_1, t) \delta(x_3) (a^2 - x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_2}{a}\right) & \text{dla } |x_2| \leq a \\ 0 & \text{dla } |x_2| > a \end{cases}, \quad (3.174)$$

Dokonując zamiany zmiennych określonej wzorem (3.138) otrzymamy

$$X_3 = \begin{cases} 2P a^{-3} r'(x'_1, t) \delta(x'_3) (1 - x_2'^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}(x'_2) & \text{dla } |x'_2| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x'_2| > 1 \end{cases} \quad (3.175)$$

Wykorzystując wzór całkowy (3.65) i wykonując całkowanie wyraz po wyrazie, które jest zagwarantowane nieomal jednostajną zbieżnością szeregu (3.175) otrzymamy (w celu skrócenia zapisu pominiemy primy)

$$\tilde{X}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = Pa^{-3} r(\alpha_1, t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} J_{2n}(|\alpha_2|) \cdot (3.176)$$

Dalszy tok postępowania jest podobny jak dla obciążenia (3.134), (3.135). Biorąc pod uwagę skończoną liczbę wyrazów szeregu otrzymamy końcowe rozwiązanie

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^m (-1)^n a_{2n} I_n(\frac{1}{2}c\alpha_1) K_n(\frac{1}{2}c\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1}{\sum_{n=0}^m (-1)^n a_{2n} I_n(\frac{1}{2}c\alpha_1) K_n(\frac{1}{2}c\alpha_1) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + f} d\alpha_1$$

dla $v < c_2$, (3.177)

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^m (-1)^n a_{2n} J_n(\frac{1}{2}d\alpha_1) H_n^{(1),(2)}(\frac{1}{2}d\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1}{\sum_{n=0}^m (-1)^n a_{2n} J_n(\frac{1}{2}d\alpha_1) H_n^{(1),(2)}(\frac{1}{2}d\alpha_1) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + g} d\alpha_1$$

dla $v > c_2$, (3.178)

gdzie stałe f i g są zdefiniowane we wzorach (3.152) i (3.163).

Dla przedstawionego zagadnienia, ograniczając się do przypadku $v < c_2$, wykonano obliczenia numeryczne. Uzyskano je rozwijając funkcję przemieszczeń $u_3(x_1, 0, 0)$ w szereg

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_1}{l}\right) \right) , \quad |x_1| < l \cdot (3.179)$$

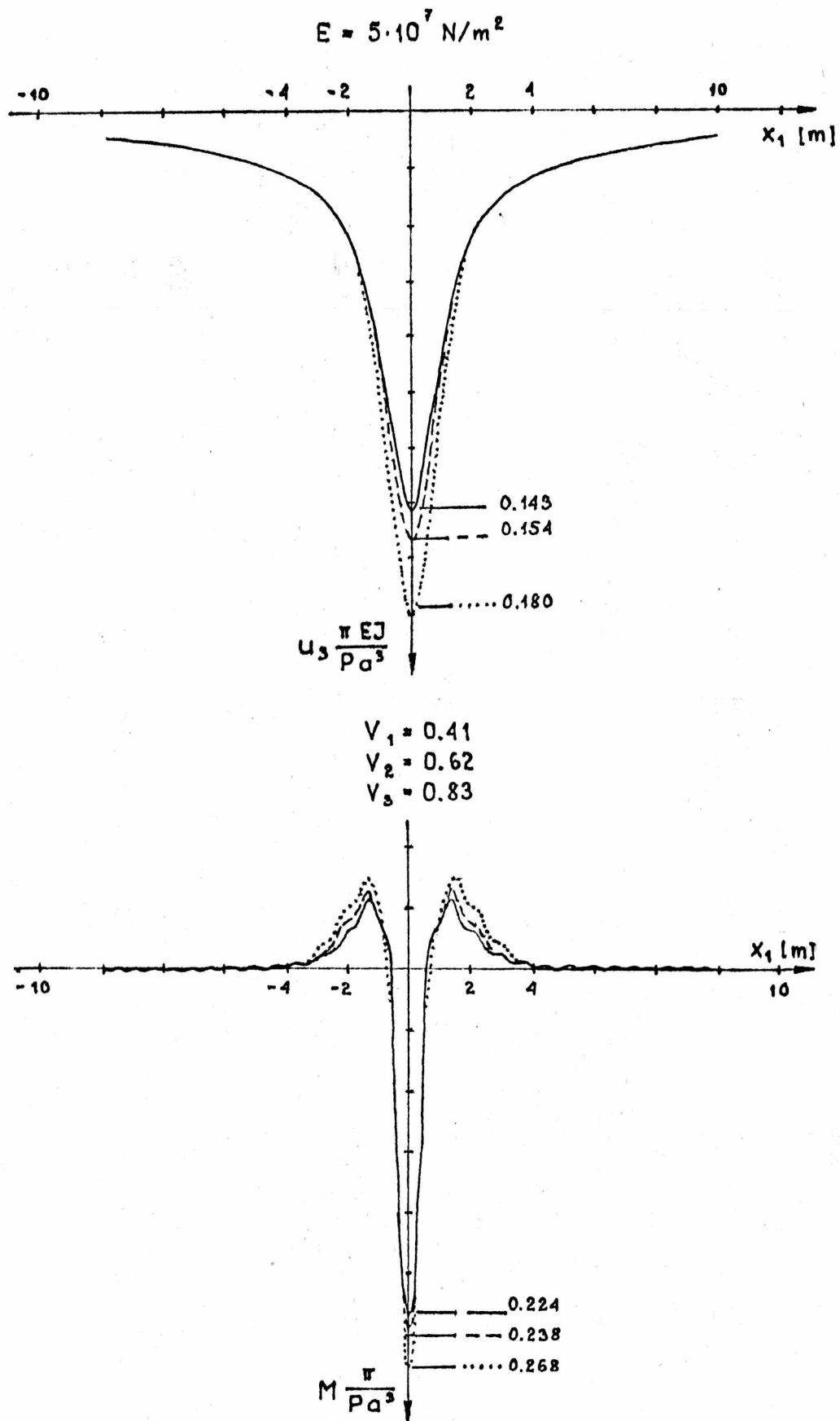
Problemy związane z uzyskaniem tego rozwinięcia przedstawimy w następnym rozdziale.

Funkcję momentów gnących uzyskano przez formalne zróżniczkowanie szeregu określającego funkcję $u_3(x_1, 0, 0)$:

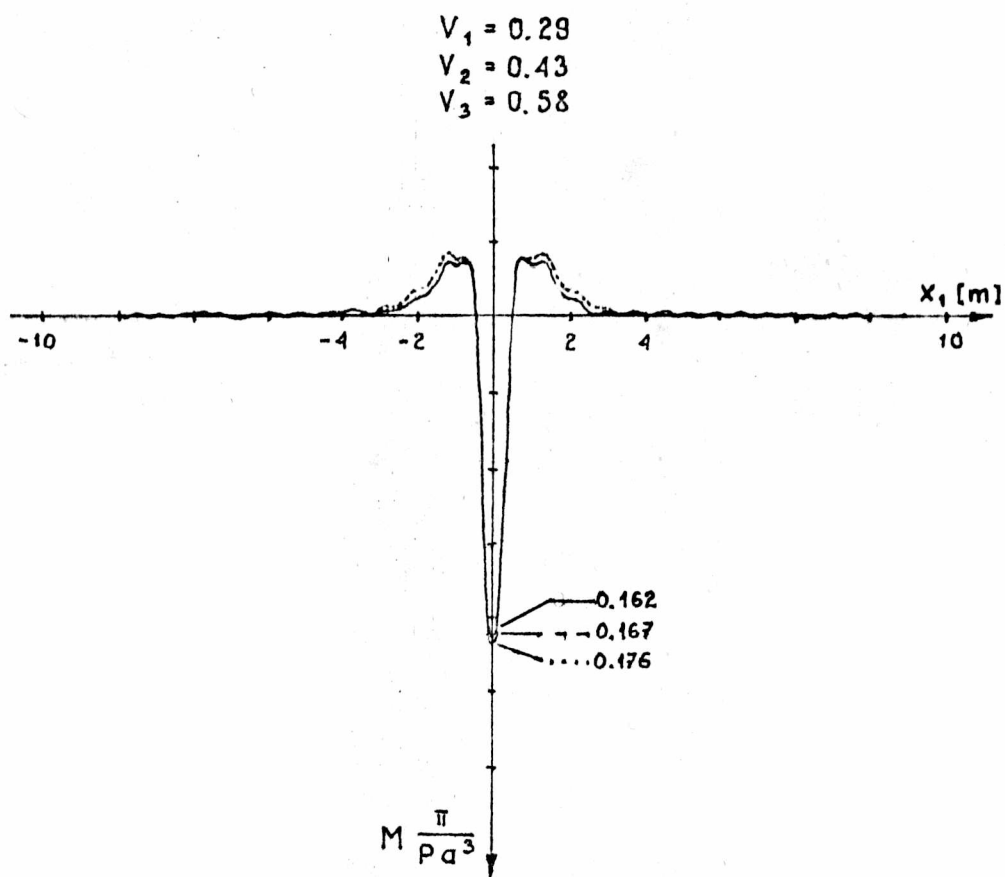
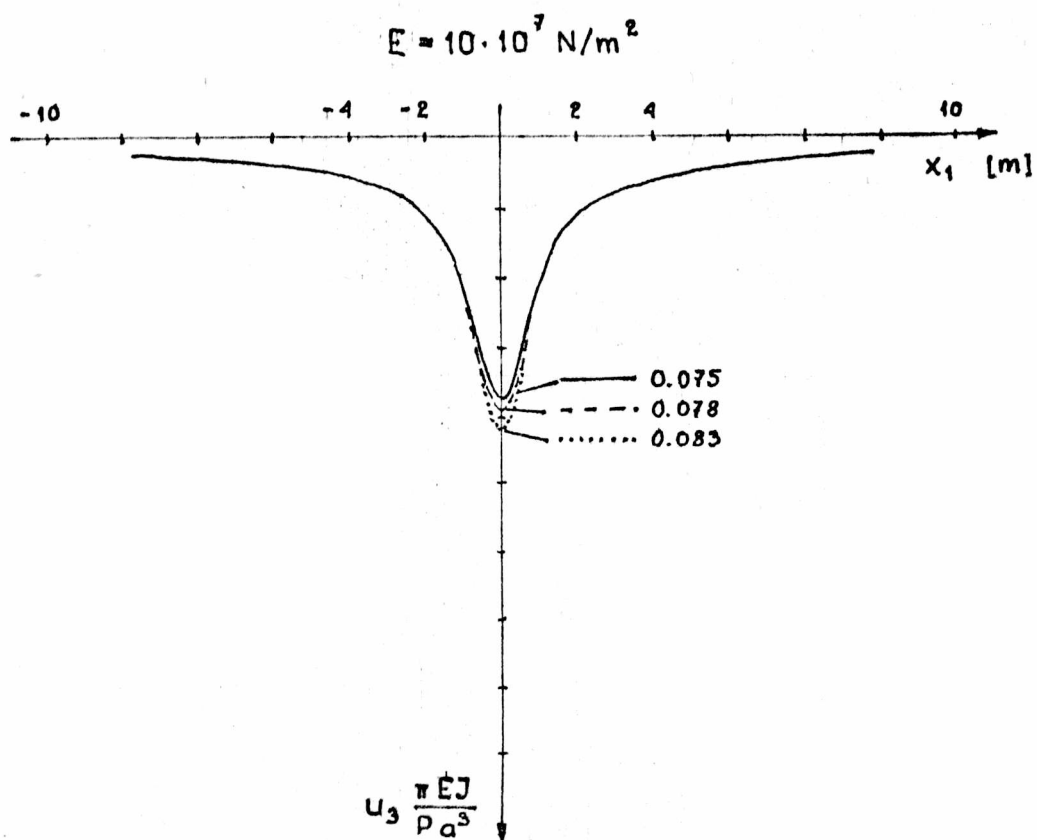
$$M(x_1) = - EJ \frac{\partial^2 u_3(x_1, 0, 0)}{\partial x_1^2} = \frac{Pa^3}{\pi} \left(\frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_1}{l}\right) \right), \quad (3.180)$$

Obliczenia wykonano dla prędkości $v_1 = 42$ m/s , $v_2 = 63$ m/s , $v_3 = 84$ m/s i modułów sprężystości podłoża $E_1 = 5 \cdot 10^7$ N/m², $E_2 = 10 \cdot 10^7$ N/m², $E_3 = 20 \cdot 10^7$ N/m², gdzie $E = 2\mu(1+\nu)$. Pozostałe parametry przyjęto jako stałe, a mianowicie $\nu = 0.3$, $\rho_b = 470$ kg/m, $\rho = 1800$ kg/m³, $a = 1.25$ m, $EJ = 12.83 \cdot 10^6$ Nm². Wartości a , EJ , ρ_b są danymi dotyczącymi toru kolejowego z szynami S 60 i podkładami betonowymi INBK - 8. Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 65, 66, 67, wprowadzając oznaczenie $V_i = v_i/c_2$. Linia ciągłą, przerywaną i kropkowaną oznaczono wykresy odpowiednio dla prędkości v_1 , v_2 , v_3 . Rysunki 65, 66, 67 przedstawiono na str. 128 - 130.

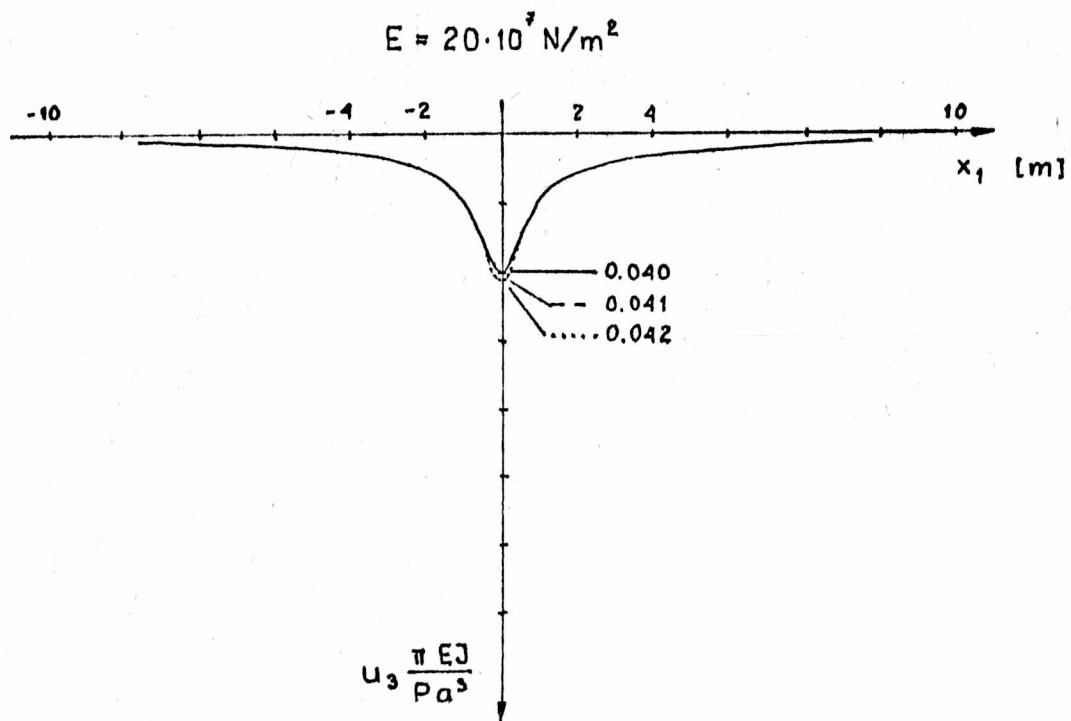
Na wykresach tych widoczny jest znaczny, w porównaniu z wpływem prędkości, wpływ modułu sprężystości podłoża E na ekstremalne wartości funkcji przemieszczeń i momentów gnących. Po głębszej analizie można wysunąć hipotezę, że szybkość przyrostu ekstremalnych wartości przedstawionych funkcji (dla ustalonego E) zwiększa się w miarę zbliżania się wartości $V = v/c_2$ do 1 ($v < c_2$). W tym miejscu należy dodać, że własność tę mają rozwiązania uzyskane w pracach [18] i [58]. W celu potwierdzenia tej własności dla modelu uproszczonego należałoby wykonać dodatkowe obliczenia dla większego zbioru prędkości v .



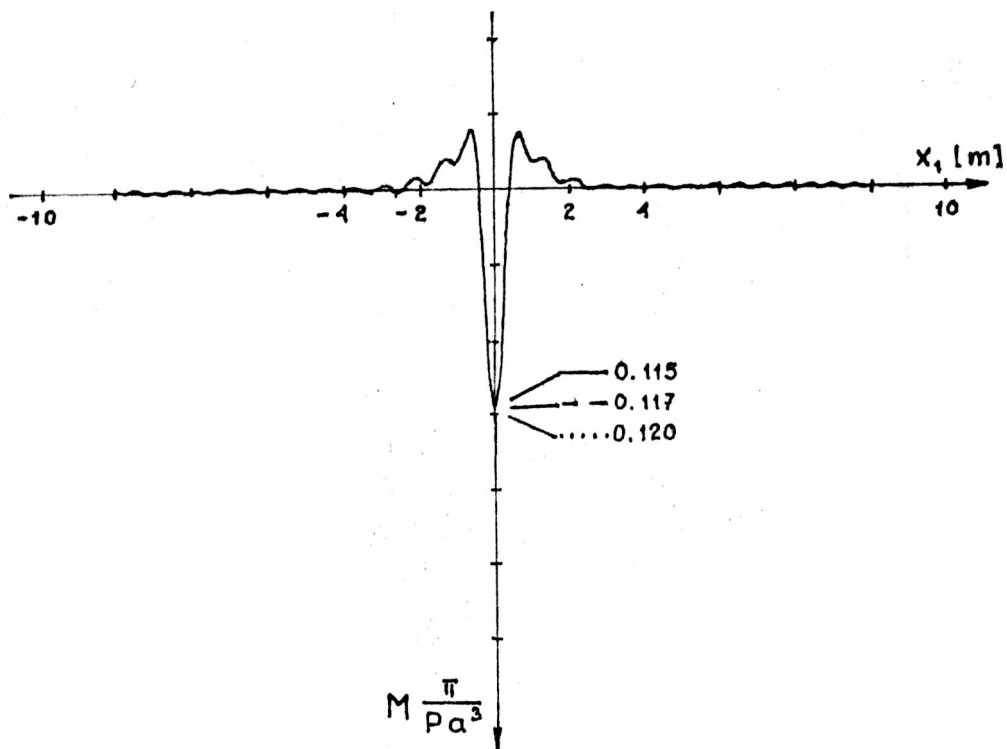
Rys.65



Rys. 66



$$\begin{aligned} V_1 &= 0.21 \\ V_2 &= 0.31 \\ V_3 &= 0.41 \end{aligned}$$



Rys.67

Rozdział 4

WYBRANE ZAGADNIENIA MATEMATYCZNE I NUMERYCZNE ZWIĄZANE Z REALIZACJĄ PRACY

4.1. Problemy związane z otrzymaniem rozwinięć przemieszczeniowych funkcji Greena względem wielomianów ortogonalnych

W punkcie tym zajmiemy się problemami związanymi z otrzymaniem rozwinięć funkcji Greena w szeregi względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju dla przedstawionych w punkcie 2.6 płaskich zagadnień dynamicznych.

Wybór wielomianów użytych w tych rozwinięciach narzucony był całkową formą rozwiązań w przypadku klasycznej półprzestrzeni oraz następującym związkiem ([25] wz. 8.511):

$$\cos \lambda x = J_0(\lambda) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\lambda) T_{2n}(x), \quad 0 < |x| < 1, \quad (4.1)$$

gdzie $T_{2n}(x)$ są wielomianami Czebyszewa I rodzaju. Podstawiając powyższy związek do odpowiednich wzorów całkowych (2.91), (2.93) oraz wykonując całkowanie wyraz po wyrazie (szereg (4.1) jest niemal jednostajnie zbieżny), otrzymamy następujące wyrażenie na współczynniki rozwinięcia (we wzorach pomijając będziemy stałą $4(-1)^n$):

$$A_{2n}^j + iB_{2n}^j = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{(2u^2 - 1)^2 - 4u^2 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{u^2 - \beta^2}} J_{2n}(u) du, \quad (4.2)$$

$j = 1, 3,$

gdzie $a = 1$ dla $j = 1$ lub $a = \beta$ dla $j = 3$. Wyodrębniając we wzorze (4.2) część rzeczywistą i urojoną otrzymamy

$$\begin{aligned}
 A_{2n}^1 = & \int_{\beta}^1 \frac{(2u^2-1)\sqrt{u^2-\beta^2}}{(2u^2-1)^4 + 16u^4\sqrt{u^2-\beta^2}\sqrt{1-u^2}} J_{2n}(u) du + \\
 & + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{u^2-\beta^2}}{(2u^2-1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2-1}\sqrt{u^2-\beta^2}} J_{2n}(u) du, \\
 B_{2n}^1 = & \int_0^{\beta} \frac{\sqrt{\beta^2-u^2}}{(2u^2-1)^2 + 4u^2\sqrt{\beta^2-u^2}\sqrt{1-u^2}} J_{2n}(u) du + \\
 & + \int_{\beta}^1 \frac{4u^2(u^2-\beta^2)\sqrt{1-u^2}}{(2u^2-1)^4 + 16u^4\sqrt{u^2-\beta^2}\sqrt{1-u^2}} J_{2n}(u) du.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dla $j = 3$ wzory są podobne.

Numeryczne obliczenie całek we wzorze (4.3)₂ oraz pierwszej całki we wzorze (4.3)₁ nie sprawia żadnych trudności. Obliczono je za pomocą 10 - punktowej kwadratury Gaussa [13], [38]. Problemy pojawiają się natomiast przy obliczaniu całki:

$$I_{2n}^j = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{(2u^2-1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2-\beta^2}\sqrt{u^2-1}} J_{2n}(u) du, \tag{4.4}$$

gdzie $a=1$ dla $j=1$, $a=\beta$ dla $j=3$. Całka ta jest całką niewłaściwą ze względu na górną granicę całkowania oraz na istnienie w przedziale całkowania punktu osobliwego u_R . W celu skrócenia zapisu wprowadzimy oznaczenia

$$F(u) = \frac{M(u)}{N(u)} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{(2u^2-1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2-\beta^2}\sqrt{u^2-1}}. \tag{4.5}$$

Punkt osobliwy u_R jest miejscem zerowym mianownika $N(u)$ funkcji podcałkowej i jak wiadomo (patrz [1], [16]) przyjmuje wartość

$$u_R^{-1} = \frac{c_R}{c_2}, \quad (4.6)$$

gdzie odpowiednio c_R jest prędkością rozchodzenia się fal Rayleigha, a c_2 prędkością rozchodzenia się fal poprzecznych. Przybliżoną jego wartość możemy obliczyć stosując wzór [1]:

$$u_R^{-1} = \frac{c_R}{c_2} = \frac{0.862 + 1.14 \nu}{1 + \nu}. \quad (4.7)$$

W punkcie u_R funkcja podcałkowa ma biegun jednokrotny (patrz [16]), w związku z tym funkcję $F(u) J_{2n}(ul)$ możemy przedstawić w postaci [76]

$$F(u) J_{2n}(ul) = \frac{a_{-1n}}{u - u_R} + f_n(u), \quad (4.8)$$

gdzie $f_n(u)$ jest funkcją regularną. Dzieląc przedział całkowania $\langle 1, \infty \rangle$ na odpowiednie podprzedziały, całkę I_{2n}^j możemy napisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} I_{2n}^j = & \int_1^{u_R - \Delta u_1} F(u) J_{2n}(ul) du + \int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} F(u) J_{2n}(ul) du + \\ & + \int_{u_R + \Delta u_2}^N F(u) J_{2n}(ul) du + \int_N^\infty F(u) J_{2n}(ul) du. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pierwszą i trzecią całkę we wzorze (4.9) obliczono, stosując tak jak poprzednio, 10 - punktową kwadraturę Gaussa. Zajmiemy się całką zawierającą w przedziale całkowania punkt osobliwy u_R . Pokażemy, że całka ta istnieje i ma skończoną wartość. Wykorzystując rozkład funkcji (4.8) możemy napisać

$$\int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} F(u) J_{2n}(u) du = a_{-1n} \int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} \frac{du}{u - u_R} + \int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} f_n(u) du. \quad (4.10)$$

Druga całka istnieje ze względu na regularność funkcji $f_n(u)$. Pokażemy istnienie całki pierwszej.

$$\begin{aligned} \int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} \frac{du}{u - u_R} &= \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{u_R - \Delta u_1}^{u_R - \epsilon_1} \frac{du}{u - u_R} + \int_{u_R + \epsilon_2}^{u_R + \Delta u_2} \frac{du}{u - u_R} \right) = \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \left(\ln|u - u_R| \Big|_{u_R - \Delta u_1}^{u_R - \epsilon_1} \right) + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\ln|u - u_R| \Big|_{u_R + \epsilon_2}^{u_R + \Delta u_2} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Całka ta nie istnieje w zwykłym sensie (jest rozbieżna), istnieje jednak w sensie wartości głównej Cauchy'ego

$$\begin{aligned} V_p \int_{u_R + \Delta u_1}^{u_R + \Delta u_2} \frac{du}{u - u_R} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\ln|u - u_R| \Big|_{u_R - \Delta u_1}^{u_R - \epsilon} + \ln|u - u_R| \Big|_{u_R + \epsilon}^{u_R + \Delta u_2} \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{\epsilon}{\Delta u_1} \right| + \ln \left| \frac{\Delta u_2}{\epsilon} \right| \right) = \ln \left| \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} \right|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Wartość tej całki obliczono stosując podprogram biblioteczny obliczający wartość główną całki (biblioteka CERN [9], [24], pakiet D 104).

Innego typu problem pojawia się przy obliczaniu całki niewłaściwej

$$\int_N^{\infty} F(u) J_{2n}(ul) du \quad . \quad (4.13)$$

Przekształćmy funkcję podcałkową $F(u)$ do postaci

$$F(u) = \frac{\sqrt{u^2 - a^2} ((2u^2 - 1)^2 + 4u^2 \sqrt{u^2 - \beta^2} \sqrt{u^2 - 1})}{16(\beta^2 - 1)u^6 + 8(3 - 2\beta^2)u^4 - 8u^2 + 1} \quad . \quad (4.14)$$

Funkcję $F(u)$ rozwiniemy w szereg asymptotyczny o postaci [15], [34]

$$F(u) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{-n} \quad . \quad (4.15)$$

Rozwinięcie to uzyskamy dokonując we wzorze (4.14) podstawienia $u^{-1} = x$ i rozwijając otrzymaną funkcję $E(x) = P(x)/Q(x) = F(x^{-1})$ w szereg w otoczeniu punktu zero, [76]. Funkcja $E(x)$ ma postać

$$E(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x [(2 - x^2)^2 + 4\sqrt{1 - \beta^2 x^2} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - a^2 x^2}]}{x^6 + 8x^4 + 8(3 - 2\beta^2)x^2 + 16(\beta^2 - 1)} \quad . \quad (4.16)$$

Rozwinięcie funkcji $E(x)$ uzyskamy rozwijając osobno funkcję $P(x)$ oraz $1/Q(x)$. Po ponownej zamianie zmiennych $x = u^{-1}$ i wymnożeniu otrzymanych rozwinięć asymptotycznych, otrzymamy rozwinięcia funkcji $F(u)$, [15], [34].

Rozwinięcia funkcji $P(x)$ w szereg w otoczeniu punktu zero otrzymamy wykorzystując znany wzór ([17] lub [25] wz.112)

$$\sqrt{1 - c^2 x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} c^{2n} x^{2n} . \quad (4.17)$$

Grupując wyrazy podobne otrzymamy współczynniki:

$$a_{2n} = 0 \quad \text{dla } n=1,2,3, \dots ,$$

$$a_1 = 8 ,$$

$$a_3 = -(4 + 2a^2) - 2b^2 ,$$

$$a_5 = -\frac{1}{2}(a^4 - 4a^2 + b^4 - 4a^2b^2 - 2) , \quad (4.18)$$

$$a_7 = -\frac{1}{4}(a^6 - 2a^4 + 2a^2 + b^6 - 2a^2b^4) ,$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} = & -4 \frac{(2n-3)!!}{2n!!} (a^{2n} + b^{2n}) + 4 \frac{(2n-5)!!}{(2n-2)!!} a^2 (b^{2n} + a^{2(n-2)}) - \\ & - \frac{(2n-7)!!}{(2n-4)!!} a^{2(n-2)} , \quad n \geq 4 , \end{aligned}$$

gdzie

$a=1$ i $b=\beta$ w przypadku obciążenia pionowego,

$a=\beta$ i $b=1$ w przypadku obciążenia poziomego.

Obliczenie rozwinięcia funkcji $1/Q(x)$ wokół zera rozpoczniemy od rozłożenia jej na ułamki proste. W zależności od liczby pierwiastków równania $Q(x) = 0$ i ich krotności otrzymamy następujące rozkłady:

1. W przypadku trzech pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3 , z których każdy ma krotność jeden dostaniemy

$$[Q(x)]^{-1} = A_1(x^2 - x_1^2)^{-1} + A_2(x^2 - x_2^2)^{-1} + A_3(x^2 - x_3^2)^{-1},$$

gdzie

(4.19)

$$A_1 = - [(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2)]^{-1},$$

$$A_2 = - [(x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)]^{-1},$$

$$A_3 = - [(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)]^{-1}.$$

2. W przypadku dwóch różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2 , z których x_1 jest pierwiastkiem o krotności dwa otrzymamy

$$[Q(x)]^{-1} = A_1(x^2 - x_1^2)^{-2} + A_2(x^2 - x_1^2)^{-1} + A_3(x^2 - x_2^2)^{-1},$$

gdzie

(4.20)

$$A_1 = (x_1^2 - x_2^2)^{-1},$$

$$A_2 = - (x_1^2 - x_2^2)^{-2},$$

$$A_3 = (x_1^2 - x_2^2)^{-2}.$$

3. Jeżeli równanie $Q(x) = 0$ ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1 i dwa sprzężone pierwiastki zespolone $z_2 = x_2 + ix_3$, $z_3 = x_2 - ix_3$, to rozkład ma postać

$$[Q(x)]^{-1} = A_1(x^2 - x_1^2)^{-1} + (A_2 x^2 + A_3)(x^4 - B_1 x^2 + B_2)^{-1},$$

gdzie

(4.21)

$$B_1 = 2x_2, \quad B_2 = x_2^2 + x_3^2,$$

$$A_1 = (x_1^4 + B_1 x_1^2 + B_2)^{-1},$$

$$A_2 = - (x_1^4 + B_1 x_1^2 + B_2)^{-1} ,$$

$$A_3 = - (B_1 + x_1^2)(x_1^4 + B_1 x_1^2 + B_2)^{-1} .$$

Wykorzystując następujące wzory całkowe ([25], wz. 1.112)

$$(x^2 - x_1^2)^{-1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2(k-1)}}{x_1^{2k}} , \quad (4.22)$$

$$(x^2 - x_1^2)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{2(k-1)}}{x_1^{2(k+1)}} ,$$

otrzymamy po prostych algebraicznych przekształceniach rozwinięcie $[Q(x)]^{-1}$ w punkcie zero dla przypadków 1. i 2.

Chcąc obliczyć rozwinięcie w przypadku 3 musimy rozwinąć funkcję

$$C(x) = (x^4 - B_1 x^2 + B_2)^{-1} , \quad (4.23)$$

w szereg Maclaurina [17]

$$C(x) = C(0) + \frac{C'(0)}{1!} x + \frac{C''(0)}{2!} x^2 + \dots , \quad (4.24)$$

obliczając formalnie pochodne funkcji $C(x)$. W wyniku różniczkowania otrzymamy

$$C^{(2n+1)}(0) = 0 , \quad n=0,1,2, \dots ,$$

$$C''(0) = 2!(B_1/B_2^2) , \quad (4.25)_1$$

$$C^{IV}(0) = 4!(-1/B_2^2 + B_1^2/B_2^3) ,$$

$$c^{(6)}(0) = 6!(2B_1/B_2^3 - B_1^3/B_2^4) ,$$

$$c^{(8)}(0) = 8!(1/B_2^3 - 3B_1^2/B_2^4 + B_1^4/B_2^5) , \quad (4.25)_2$$

$$c^{(10)}(0) = 10!(-3B_1/B_2^4 + 4B_1^3/B_2^5 - B_1^5/B_2^6) .$$

Wykorzystując otrzymane wyniki oraz wzór (4.22)₁, otrzymamy rozwinięcie $[Q(x)]^{-1}$ w punkcie zero dla przypadku 3.

Po wykonaniu ponownej zamiany zmiennych $x = u^{-1}$ otrzymamy dwa rozwinięcia asymptotyczne

$$\begin{aligned} P(u^{-1}) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{-n} , \\ [Q(u^{-1})]^{-1} &\sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k u^{-k} , \end{aligned} \quad (4.26)$$

które po wymnożeniu przez siebie dadzą końcowy wynik - rozwinięcie asymptotyczne funkcji

$$F(u) \sim \sum_{m=1}^p d_m u^{-m} + O(u^{-p-1}) ,$$

gdzie

$$d_m = \sum_{i=1}^m a_{m-i} b_i .$$

(4.27)

Możliwość takiego mnożenia wynika z odpowiednich twierdzeń dotyczących rozwinięć asymptotycznych (patrz np. [15], [17], [34]).

Mając obliczone rozwinięcie asymptotyczne funkcji $F(u)$, powróćmy do obliczenia całki (4.13). Możemy napisać

$$\int_N^{\infty} F(u) J_{2n}(ul) du = \sum_{m=1}^P d_m \int_N^{\infty} u^{-m} J_{2n}(ul) du + O(N^{-p + \frac{1}{2}}) . \quad (4.28)$$

Całkę występującą po prawej stronie wzoru (4.28) obliczymy wykorzystując następujący wzór całkowy ([5] t.2, str.103):

$$\begin{aligned} \int z^{\mu} J_{\nu}(z) dz &= (\mu + \nu - 1) z J_{\nu}(z) S_{\mu-1, \nu-1}(z) - \\ &- z J_{\nu-1}(z) S_{\mu, \nu}(z) , \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie $S_{\mu, \nu}(z)$ jest funkcją Lammela. Funkcja ta dla dużych $|z|$ i $|\arg z| < \pi$ (w naszym przypadku $z = u + i0$, stąd $\arg z = 0$) ma następujące rozwinięcie asymptotyczne (patrz [71], str.349):

$$\begin{aligned} S_{\mu, \nu}(z) &= z^{\mu-1} (1 - ((\mu-1)^2 - \nu^2) z^{-2} + \\ &+ ((\mu-1)^2 - \nu^2) ((\mu-3)^2 - \nu^2) z^{-4} - \dots) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wykorzystując to, że wyrażenie występujące po prawej stronie wzoru (4.29) dla $\mu < 0$ i $z \rightarrow \infty$ dąży do zera, otrzymamy wzór

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} J_{2n}(u) u^{-m} du &= - (2n-m-1) N J_{2n}(N) S_{-m-1, 2n-1}(N) + \\ &+ N J_{2n-1}(N) S_{-m, 2n}(N) , \end{aligned} \quad (4.31)$$

pozwalający bezpośrednio na obliczenie całki (4.28).

Zajmiemy się teraz obliczeniem współczynników rozwinięć (2.90), (2.94) funkcji przemieszczeń $u_3^m(x_1, 0, t)$, $u_1^m(x_1, 0, t)$ określonych wzorami (2.88) i (2.92). Funkcje te rozwiniemy w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju. Jak wiemy wielomiany te, zdefiniowane wzorem ([5], str. 186)

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad n \geq 1 \quad (4.32)$$

tworzą układ ortogonalny zupełny z wagą $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ([25], wz. 7.343):

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ & = \int_{-a}^a T_n\left(\frac{y}{a}\right) T_m\left(\frac{y}{a}\right) (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } n=m \neq 0 \\ \pi & \text{dla } n=m=0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Stąd odpowiednie wzory na współczynniki rozwinięcia całkowanej funkcji

$$f(y) = \frac{1}{2} a_0 T_0\left(\frac{y}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n\left(\frac{y}{a}\right), \quad (4.34)$$

określonej w przedziale $\langle -a, a \rangle$ przyjmują postać

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a f(y) T_n\left(\frac{y}{a}\right) (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy. \quad (4.35)$$

Po podstawieniu $x = \frac{y}{a}$ otrzymamy

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(ax) T_n(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx . \quad (4.36)$$

W rozważanych przez nas zagadnieniach $a = \kappa^{-1}$ ($\kappa = \frac{\omega}{c_2}$), a funkcje $f(x)$ są równe odpowiednio

$$u_3^m(x_1, 0, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} (\pi N_0(\kappa|x_1|) + i\pi J_0(\kappa|x_1|)) e^{i\omega t} , \quad (4.37)$$

$$u_1^m(x_1, 0, t) = - \frac{\beta}{2\pi\mu} (\pi N_0(\beta\kappa|x_1|) + i\pi J_0(\beta\kappa|x_1|)) e^{i\omega t} .$$

Dla ustalenia uwagi zajmiemy się funkcją $(4.37)_1$. Wyłączając czynnik $-e^{i\omega t}/2\pi\mu$ otrzymamy

$$a_{2n} = A_{2n} + iB_{2n} = 2\beta \int_{-1}^1 (N_0(|y|) + iJ_0(|y|)) T_{2n}(y) (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy . \quad (4.38)$$

Ze względu na logarytmiczną osobliwość funkcji podcałkowej ([40], wz. 61.2)

$$N_0(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{y}{a} , \quad (4.39)$$

wykonamy przekształcenie

$$\begin{aligned} a_{2n} = 2\beta \int_{-1}^1 [N_0(|y|) - \frac{2}{\pi} \ln|y| + iJ_0(|y|)] T_{2n}(y) (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy - \\ - \frac{4\beta}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|y|} T_{2n}(y) (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Przekształcenie to usuwa tę osobliwość, bowiem w jego wyniku funkcja podcałkowa w pierwszej całce (wzór (4.40)) w otoczeniu zera staje się ograniczona. Drugą całkę możemy natomiast przedstawić w postaci zamkniętej ([53], str.826)

$$\frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{1}{y} \right| \frac{T_{2n}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \begin{cases} 4 \ln 2 & \text{dla } n=0, \\ \frac{2T_{2n}(0)}{n} = \frac{2}{n}(-1)^n & \text{dla } n \geq 1. \end{cases} \quad (4.41)$$

Całkowanie numeryczne wykonano stosując kwadraturę Gaussa - Czebyszewa [13], [57], służącą do obliczania całek typu

$$\int_{-1}^1 f(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (4.42)$$

Wzór określający tę kwadraturę ma postać [57]

$$\int_{-1}^1 f(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n f(a_j) + \epsilon, \quad (4.43)$$

gdzie

$$a_j = \cos \frac{(2j-1)}{n} \pi, \quad j=1,2,3, \dots, n.$$

Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej Odra 1305.

4.2. Problemy związane z uzyskaniem wyników numerycznych dla zagadnienia belki

Wyniki numeryczne, jak wspomniano już w punkcie 3.4, uzyskano rozwijając funkcję przemieszczeń w szereg względem wielomianów Czebyszewa I rodzaju

$$u_3(x_1, 0, 0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x_1}{l}\right) \right), \quad |x_1| < l, \quad (4.44)$$

wykorzystując następujące rozwinięcie

$$\cos \alpha x_1 = J_0(\alpha l) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\alpha l) T_{2n}\left(\frac{x_1}{l}\right), \quad |x_1| < l, \quad (4.45)$$

gdzie $[-1, 1]$ jest przedziałem rozwinięcia (w rozpatrywanym przypadku przyjęto $l = 10a$). Współczynniki rozwinięcia wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{2I_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) J_{2n}(\alpha_1 l)}{I_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) K_0\left(\frac{1}{2}c|\alpha_1|\right) (\alpha_1^4 - b^2 \alpha_1^2) + f} d\alpha_1 = \\ &= (-1)^n \int_0^{\infty} f(\alpha_1) J_{2n}(\alpha_1 l) d\alpha_1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ze względu na to, że funkcja podcałkowa dla przyjętych wartości parametrów i $n > 0$ nie ma osobliwości, a w przypadku $n=0$ ma osobliwość logarytmiczną w zerze, przedział całkowania podzielono na dwie części

$$a_0 = \int_0^N f(x_1) J_0(x_1 l) dx_1 + \int_N^\infty f(x_1) J_0(x_1 l) dx_1, \quad (4.47)$$

$$a_{2n} = (-1)^n \int_0^N f(x_1) J_{2n}(x_1 l) dx_1 + \int_N^\infty f(x_1) J_{2n}(x_1 l) dx_1, \quad (4.48)$$

$$n \geq 1.$$

W celu obliczenia pierwszej całki ze wzoru (4.47) wykonany następujące przekształcenie usuwające osobliwość logarytmiczną

$$\begin{aligned} \int_0^N f(x_1) J_0(x_1 l) dx_1 &= \int_0^N [f(x_1) J_0(x_1 l) + \ln x_1] dx_1 - \\ &- \int_0^N \ln x_1 dx_1 = \int_0^N [f(x_1) J_0(x_1 l) + \ln x_1] dx_1 - N(\ln N - 1). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Po wykonaniu tego przekształcenia otrzymamy

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^N [f(x_1) J_0(x_1 l) + \ln x_1] dx_1 - N(\ln N - 1) + \\ &+ \int_N^\infty f(x_1) J_0(x_1 l) dx_1. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Pierwsze całki występujące we wzorach (4.48), (4.50) obliczono wykorzystując 12 - punktową kwadraturę Gaussa [38] na maszynie cyfrowej Odra 1305. W celu obliczenia całek niewłaściwych funkcję $f(x_1)$ rozwinięto w przedziale $\langle N, \infty \rangle$ w szereg asymptotyczny względem wielomianów Czebyszewa

$$f(\lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} T_{2n}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) . \quad (4.51)$$

Rozwinięcie to uzyskano rozwijając funkcję

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } 0 < |x| < 1 , \\ 0 & \text{dla } x=0 , \end{cases} \quad (4.52)$$

w szereg

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} T_{2n}(x) , \quad x \in \langle -1, 1 \rangle . \quad (4.53)$$

Obliczenie współczynników d_{2n} wykonano na maszynie cyfrowej wykorzystując podprogram biblioteczny biblioteki CERN [9], [24]. Jest oczywiste, że obliczone współczynniki d_{2n} są równe szukanym współczynnikom c_{2n} rozwinięcia (4.51). Uzyskane rozwinięcie (4.51) sprowadzono do postaci [66], [11]

$$f(\lambda_1) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} \lambda_1^{-2n} . \quad (4.54)$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia do drugich całek we wzorach (4.47) i (4.48) otrzymano

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} f(\lambda_1) J_{2n}(\lambda_1 l) d\lambda_1 &= \sum_{n=1}^m g_{2n} \int_N^{\infty} \lambda_1^{-2n} J_{2n}(\lambda_1 l) d\lambda_1 + \\ &+ O(N^{-2m+\frac{1}{2}}) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Występujące po prawej stronie wzoru (4.55) całki obliczono wykorzystując wzór (4.31).

W celu porównania wyników uzyskanych na podstawie (4.44) z wynikami dokładnymi, porównano wartości funkcji przemieszczeń w punkcie $x_1 = 0$. Dokładna wartość tej funkcji dla $x_1=0$ określona jest wzorem

$$u_3(0,0,0) = \frac{Pa^3}{\pi EJ} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\frac{1}{2}c\alpha_1) K_0(\frac{1}{2}c\alpha_1)}{I_0(\frac{1}{2}c\alpha_1) K_0(\frac{1}{2}c\alpha_1) (\alpha_1^4 - b^2\alpha_1^2) + f} d\alpha_1 . \quad (4.56)$$

Obliczenie tej całki wykonano podobnie jak całki określonej wzorem (4.46) dla $n = 0$. Okazało się, że różnice między dokładnym rozwiązaniem, a wynikiem uzyskanym przez zsumowanie szeregu (4.44) dla $x_1 = 0$ nie przekraczają 1 %.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono koncepcję uproszczonego inercyjnego modelu podłoża sprężystego. Proponowany model jest opisany trzema niesprężonymi równaniami różniczkowymi. Prosta postać tych równań umożliwia (w porównaniu z klasyczną półprzestrzenią sprężystą) znaczne uproszczenia natury matematycznej. Szczególnie są one widoczne w przemieszczeniowych dynamicznych funkcjach Greena. Funkcje te dla klasycznej półprzestrzeni sprężystej przedstawione są w postaci skomplikowanych nieskończonych całek Fouriera, natomiast dla modelu uproszczonego w postaci zamkniętej. Prosta postać funkcji Greena dla modelu upoważnia nas do stwierdzenia, że takie uproszczenia pojawiają się również w rozwiązaniach bardziej złożonych zagadnień dynamicznych. Rozwiązania tych zagadnień w przypadku zastosowania klasycznej półprzestrzeni sprężystej są tak skomplikowane, że nie pozwala to na ich wykorzystanie w praktyce inżynierskiej.

Po analizie adekwatności otrzymanego modelu do rzeczywistości trzeba przyznać, że pod tym względem jest on modelem uboższym od półprzestrzeni sprężystej. Wynika to z samej koncepcji modelu uproszczonego. Porównując go natomiast z powszechnie stosowanym podłożem Winklera należy stwierdzić, że jest od niego modelem znacznie bogatszym. Uwzględnia bowiem siły bezwładności w podłożu pojawiające się w zagadnieniach dynamicznych oraz częściowo oddziaływanie między cząsteczkami podłoża.

Wykonane porównania przemieszczeniowych funkcji Greena dla modelu uproszczonego i klasycznej półprzestrzeni sprężystej potwierdziły przedstawioną koncepcję. Okazało się bowiem, że różnice między nimi nie są znaczne. W tym miejscu należy wspomnieć o pewnym ograniczeniu dotyczącym stosowalności otrzymanego modelu. Ze względu na różny, w porównaniu z wynikami teorii sprężystości, stopień tłumienia geometrycznego, przedstawiony model nie nadaje się do rozwiązywania zagadnień sejsmicznych.

Powróćmy do związków modelu uproszczonego z innymi znanymi modelami podłoża. Pokazano, że przy pewnych założeniach upraszczających można z równań opisujących wprowadzony model otrzymać równania podobne do równań opisujących podłoże dwuparametrowe. Po pominięciu w nich pewnych wyrazów otrzymano trójkierunkowy model Winklera.

Przedstawione własności pozwalają określić model uproszczony jako pośredni między podłożem Winklera, a klasyczną półprzestrzenią sprężystą. Cel pracy, którym było stworzenie inercyjnego modelu podłoża w miarę dokładnie opisującego rzeczywistość, a jednocześnie wprowadzającego istotne uproszczenia matematyczne, został więc osiągnięty. Ze względu na te uproszczenia model może być stosowany do rozwiązywania złożonych zagadnień technicznych. Przykłady takich zagadnień rozwiązano w drugiej części pracy.

Przedstawiona koncepcja modelu stwarza możliwości dalszego jej rozwijania. Ciekawe wydaje się uwzględnienie tłumienia i stworzenie uproszczonego modelu półprzestrzeni lepko-sprężystej przy wykorzystaniu znanych modeli reologicznych. Innym możliwym uogólnieniem byłaby półprzestrzeń anizotropowa i uwarstwiona.

Przedstawione w pracy zagadnienia szczegółowe są tylko próbą pokazania możliwości jakie stwarza model uproszczony. Wydaje się, że dzięki niemu możliwe będzie rozwiązanie innych złożonych zagadnień teorii konstrukcji na podłożu sprężystym, takich jak: zagadnienia drgań dźwigarów powierzchniowych, problemu interakcji konstrukcji z podłożem (zagadnienie parasejsmiczne) przy uwzględnieniu aperiodycznego obciążenia, niestacjonarnych zagadnień belek i płyt obciążonych ruchomym obciążeniem, itp. Wyniki uzyskane w niniejszej pracy są początkiem badań w tym kierunku.

LITERATURA

1. Achenbach J. D., Wave propagation in elastic solids, North - Holland Publishing Company - Amsterdam, London, American Elsevier Publishing Company Inc. New York, 1973.
2. Arnold R. N., Bycroft G. N., Warburton G. B., Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 22, 1955.
3. Awojobi A. O., Approximate Solution of High-Frequency Factor Vibrations of Rigid Bodies on Elastic Media, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 38, 1971.
4. Bielak J., Modal Analysis for Building-Soil Interaction, J. Engr. Mech. Div., ASCE,
5. Biełtmien G., Erdieji A., Wysszije transciendentnyje funkcji, t. I, II, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1973, 1974.
6. Borodaczjew N. M., Ob opriedielienii naprjażenij pod kolieblju-szczimsja fundamentom. Osnowanija, fundamienty i miechanika gruntow, 3, 1962. Praca cytowana za [8].
7. Borodaczjew N. M., Wdawliwanie sztampla s osnowaniem w widie uzkowo prjamougolnika w uprugoje połuprastranstwo, Miechanika Twierdowo Tieła, 4, 1970.
8. Burjak W. T., Dinamiczieskaja kontaktnaja zadacza dlja uprugoj połupłaskosti, Miechanika Twierdowo Tieła, 6, 1972.
9. Cern Computer Centre Program Library, CERN Genewa.
10. Chopra A. K., Chakrabarti P., Dasgupta G., Dynamic stiffness matrices for viscoelastic halfplane foundations, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 102, 1976.
11. Clenshaw C. W., Chebyshev series for mathematical functions, Mathematical Tables, Vol. 5, HMSO, London 1963.
12. Dasgupta S. P., Kameswara Rao, Dynamic respons of strip footings on elastic halfspace, Int. J. num. Meth. Engng, 14, 1979.
13. Demidowicz B. P., Maron J. A., Metody numeryczne, cz.1, PWN, Warszawa 1965.

14. Ditkin W. A., Prudnikow A. P., Przekształcenia całkowite i rachunek operatorowy, PWN, Warszawa 1964.
15. Erdelyi A. Rozwinięcia asymptotyczne, PWN, Warszawa 1967.
16. Ewing W. M., Jardentsky W. S., Press F., Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company, New York 1957.
17. Fichtenholz G. M., Rachunek różniczkowy i całkowity, PWN, Warszawa 1980.
18. Filippow A. P., Koliébanija dieformirujemych sistem, Izdatielstwo Maszinostrojenie, Moskwa 1970.
19. Filippow A. P., Kochmanjuk S. S., Worobjew J. S., Wozdiejstwije dynamiczieskich nagruzok na eliemienty konstrukcij, Izd. Naukowa dumka, Kijew 1974.
20. Filipkowski J., Ceynowa Z., Sienkiewicz Z., Propagacja fal sprężystych w ośrodku półnieskończonym, dwuwymiarowym od wzbudzeń harmoniczných przy wykorzystaniu skończonego modelu dynamicznego, Prace Naukowe Inst. Inż. Łądowej Pol. Wrocławskiej seria K, 28, Wrocław 1981.
21. Fryba L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Academia Prague 1972.
22. Gorbunow-Posadow M. I., Bałki i płyty na uprugom osnowanii, Izd. Maszstojizdat, Moskwa 1949.
23. Galin L. A., Kontaknyje zadaci teorii uprugosti i wjazko-uprugosti, Izd. Nauka, Moskwa 1980.
24. Gizbert-Studnicki P., Biblioteka Cernowska w systemie Odra 1300, Uniwersytet Jagielloński Inst. Fizyki, S.C.O. Cyfronet, Kraków 1978.
25. Gradsztiejn I. S., Ryżik I. M., Tablicy intiegrałow, summ, rjadow i proizwiedieniej, Izd. Nauka, Moskwa 1971.
26. Grinczienko W. T., Mielieszko W. W., Garmoniczieskije koliebanija i wołny w uprugich tiełach, Izd. Naukowa Dumka, Kijew 1981.
27. Gutierrez J. a., Chopra A. K., A Substructure method for Earthquake Analysis of Structures Including Structure-Soil Interaction, Earthquake Engr. Struct. Dyn., 6, 1978.
28. Guter R. S., Kudriawcew Ł. d., Lewitan B. M., Elementy teorii funkcji, PWN, Warszawa 1967.
29. Karasudhi L. M., Keer L. M., Lee S. L., Vibratory motion of a body on an elastic halfplane, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 4, 1968.

30. Kenney J. T., Steady-state vibration of beam on elastic foundation for moving load, J Appl. Mech. Trans. ASME, 21, 1954.
31. Keer A. D., The continuously supported rail subjected to an axial force and a moving load, Int. J. Mech. Sci., 14, 1972.
32. Kisiel I., Dynamika fundamentów pod maszyny, PWN, Warszawa 1957.
33. Klasztorny M., Langer J., Mironowicz W., Analiza dynamiczna fundamentów blokowych pod maszyny nieudarowe, Prace Naukowe Inst. Inż. Lądowej 23, Monografie 6, Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1978.
34. Knopp K., Szeregi nieskończone, PWN, Warszawa 1956.
35. Korieniew B. G., Niekatoryje zadaczi tieorii uprugosti i tiepłoprowodnosti reszajemyje w bessieliewych funkcjach, Izd. Fizmatgiz, Moskwa 1960.
36. Korieniew B. G., Issliedowanija po uprugom sooruzhienij i rasczjotu konstrukcij na uprugom osnowani, Izd. GASTROJIZDAT, Moskwa 1961.
37. Labra J. J., An Axially Stressed Railroad Track on an Elastic Continuum Subjected to a Moving Load, Acta Mechnica, 22, 1975.
38. Lafara R. L., Computer methods for science and engineering, Hayden Book Company, Inc. Rochelle Park, New Jersey 1973.
39. Langer J., Dynamika budowli, Wyd. Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1980.
40. Liebiediew N. N., Funkcje specjalne i ich zastosowania, PWN, Warszawa 1957.
41. Luco J. E., Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, Nucl. Engr. Des., 22, 1974.
42. Luco J. E., Westman R. A., Dynamic response of a rigid footing bonded to on elastic half-space, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 39, 1972.
43. Lysmer J., Kuhlemeyer R. L., Finite dynamic model for infinite media, J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE, 95, 1969.
44. Murawskij G. B., O modeli uprugowo osnowanija, Stroitielnaja miechanika i rascziet sooruzhienij 6, 54, Moskwa 1967.
45. Nien-Chien Tsai, Modal damping for soil structure interaction, ASCE, J. Engr. Mech. Div., 100, 1974
46. Nowacki W., Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.
47. Nowacki W., Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1972.
48. Oien M. A., Steady Motion of a Rigid Strip Bonded to an Elastic Half-Space, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 38, 1971.

49. Pasternak P. Ł., Osnovy nowowo mietoda rasczjota fundamentow na uprugom osnowanii pri pomoszczi dwuch koefficijentow postieli, Gos. izd. litieratury po stroitielstvu i architekturie, Moskwa-Lieningrad 1954. Praca cytowana za [72].
50. Pasternak P. Ł., Osnovy nowowo mietoda rasczjota żjotkich i gibkich fundamentow na uprugom osnowanii, matierjały sowieszcza-nija po tieorii rasczjota bałok i plit na szimajemom osnowanii, Sbornik trudow nr. 14, Moskwa 1956. Praca cytowana za [68].
51. Parmelee R. A., Building - Foundation Interaction Effects, ASCE, J. Engn. Mech. Div., 93, 1967.
52. Parmelee R. A., Perelman D. S., Lee L. S., Keer L. M., Seismic Response Structure Foundation System, ASCE, J. Engn. Mech. Div., 94, 1968.
53. Popow G. J., Niekatoryje swojstwa kłassiczieskich mnogoczlienow i ich primienienije k kontaktnym zadaczam, Prikładnaja Matiema-tika i Miechanika PMM ,t.27, wyp.5, Moskwa 1963.
54. Popow G. J., O mietodie ortogonalnych mnogoczlienow w kontakt-nych zadaczach tieorii uprugosti, PMM, t.33, wyp.3, Moskwa 1969.
55. Popow G. J., Ob intiegralnych urawnienijach tieorii uprugosti s raznostnymi i summacionnymi jadrami, PMM, t.34, wyp.4, Moskwa 1970.
56. Popow G. J., Skobodjanjuk A. P., Płaskaja kontaktnaja zadacza dlja liniejno-dieformirujemowo osnowanija pri naliczii nieskol-kich uczastkow kontakta, Miechanika Twierdowo Tiela, 4, 1972.
57. Ralston A., Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1975.
58. Rozenbajgier Z., Dynamika belki na lepkosprężystym podłożu dla ruchomego odcinkowo stałego obciążenia, Arch. Inż. Lądowej, t.23, z.1, 1977.
59. Ruta P., Drgania belki obciążonej siłą ruchomą, spoczywającej na pewnym modelu półprzestrzeni, Raport Inst. Inż. Lądowej Pol. Wrocławskiej, seria PRE nr 7/84, Wrocław 1984.
60. Ruta P., Langer J., Uproszczony model półprzestrzeni sprężystej, Zeszyty Naukowe Pol. Rzeszowskiej, 13, Mechanika z.5, 1983.
61. Siejmow W. M., Primienienije mietoda ortogonalnych mnogoczlie-now k dynamiczieskim kontaktnym zadaczam, Prikładnaja Miechanika t.8, wyp.1, Kijew 1972.

62. Simpson I. C., On the Interaction of Rayleigh Surface Waves with Structures, Earthquake Engr. Struct. Dyn., 6, 1978.
63. Sneddon I. N., Fourier transforms, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London 1951.
64. Szerman D. I., Koliebanije uprugowo połuprastranstwa pri zadanyh smieszczienijach ili wniesznich siłach na granicie, Trudy Siejsmologiczieskowo Instytutu, Izd. AN SSSR, Moskwa - Leningrad 1946.
65. Sztajerman I. J., Kontaktnaja zadacza tieorii uprugosti, Gostiechizdat, Moskwa - Leningrad 1949.
66. Szmelter J., Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa 1980.
67. Śniady P., Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem, Prace Naukowe Inst. Inż. Łądowej Pol. Wrocławskiej, 21, 1976.
68. Świtka R., Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego, Rozprawy 31, Pol. Poznańska, Poznań 1968.
69. Tierientiew W. N., Filippow A. P., Wynużdiennyje ustanowiszijesja koliebanija biezkonecznych bałok, lieżaszczich na uprugom połuprastranstwie, Prikładnaja Miechanika, t.1, wyp.9, Kijew 1965.
70. Thomson W. T., Kobori T., Dynamic Compliance of Rectangular Foundatio on an Elastic Half-Space, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 30, 1963.
71. Watson G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge at the University Press, 1966.
72. Wong H. L., Luco J. E., Dynamic response of rigid foundations of arbitrory shape, Eartquake Engr. Sruct. Dyn., 4, 1976.
73. Własow W. Z., Lieoniejew N. N., Bałki, plity i obołoczki na uprugom osnowanii, Izd. Fizmatgiz, Moskwa 1960.
74. Vaish A. K., Chopra A. K., Eartquake finite element analysis of structure - foundation systems, J. Engr. Mech. Div., ASCE, 100, 1974.
75. Valliappan S., Favoloro J. J., White W., Dynamic analysis of embeddet footings, J Geotech. Engr. Div., Proc. ASCE, 103, 1977.
76. Leja F., Analiza zespolona, PWN, Warszawa 1973.

UPROSZCZONY MODEL INERCYJNEGO PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO I JEGO ZASTOSOWANIA

Streszczenie

W pracy przedstawiono koncepcję uproszczonego inercyjnego podłoża sprężystego. Trzy niesprężone cząstkowe równania różniczkowe, opisujące model zostały wyprowadzone z przemieszczeniowych równań elastokinetyki przy pewnych założeniach upraszczających. Założono mianowicie, że przemieszczenia prostopadłe do kierunku działania obciążenia (obciążenie działa prostopadłe lub stycznie do brzegu podłoża) są równe zeru. Takie założenie z fizycznego punktu widzenia jest równoważne nałożeniu więzi odbierających pewne stopnie swobody punktom podłoża. Dzięki rozłożeniu zagadnienia półprzestrzeni, obciążonej na brzegu dowolnym obciążeniem, na trzy zagadnienia, w których uwzględnia się poszczególne składowe obciążenia, otrzymano równania pozwalające na niezależne obliczenia przemieszczeń pionowych i poziomych.

Dokonano porównania otrzymanego modelu z innymi znanymi modelami podłoża. Pokazano jego związki z takimi modelami, jak model Winklera, podłoże dwuparametrowe, klasyczna półprzestrzeń sprężysta.

W celu weryfikacji przedstawionej koncepcji porównano przemieszczeniowe funkcje Greena dla modelu uproszczonego z funkcjami Greena dla klasycznej półprzestrzeni sprężystej.

W drugiej części pracy pokazano możliwości zastosowania wprowadzonego modelu. Rozwiązano w niej następujące zagadnienia teorii konstrukcji na podłożu sprężystym:

- płaskie statyczne zagadnienie kontaktowe - zagadnienie stempla o dowolnym kształcie podstawy,
- zagadnienie stacjonarnych drgań fundamentu blokowego o dowolnym kształcie i prostokątnej poziomej podstawie, obciążonego harmonicznie zmiennym obciążeniem,
- problem interakcji konstrukcji z podłożem (zagadnienie parasejsmiczne), opisanej dyskretnym zbiorem współrzędnych uogólnionych,
- zagadnienie drgań nieskończonej belki, obciążonej siłą ruchomą przesuwaną się ze stałą prędkością.

Ostatnie wymienione zagadnienie rozwiązano również numerycznie, uwzględniając różne wartości prędkości obciążenia i modułu sprężystości podłoża. Wyniki przedstawiono na wykresach.

THE SIMPLIFIED MODEL OF AN INERTIAL ELASTIC FOUNDATION AND ITS APPLICATIONS

Summary

This paper presents a conception of a simplified inertial elastic foundation. Three nonconjugate partial differential equations, which describe this model of half-space have been derivated from displacement equations of elastokinetics with some reducing assumptions. Namely, it was assumed that displacements which are perpendicular to the direction of loads action equal zero (loads act perpendiculary or tangently to the edge of the foundation). From the physical point of view, this assumption is equivalent to an imposition of constraints which some degrees of freedom of the foundation points receive. The problem of half-space which is loaded arbitrary on the edge is divided into three problems which deal with the individual components of loads. The equations of motion which enable the determination of vertical and horizontal displacements independently.

The proposed model was compared with other known models of foundation: the Winkler's model, the biparameter foundation, the classical elastic half-space.

To verify, the presented conception, the displacement Green's functions for the simplified model were compared with functions for the classical elastic half-space.

The second part of the paper indicates at a possibility of applying the introduced model. The following problems of structures theory on the elastic foundation were solved:

- the plane static contact problem (the problem of shore with an arbitrary shape of a footing),
- the problem of a steady-state vibrations of a block foundation which has an arbitrary shape and a rectangular horizontal footing and is loaded by harmonic variable loads,
- the problem of an interaction of a structure and a foundation (the paraseismic problem), the structure described by a discrete set of general coordinates,

- the problem of vibrations of an infinite beam, which is loaded by a moving force with constant speed.

The last problem has been solved numerically also. Some values of a velocity of load and of an elastic foundation modulus have been taken into account. The results are shown on diagrams.

Mgr inż. Piotr Ruta
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechnika Wrocławska
Wybrz. Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Praca wpłynęła do Redakcji Wydawnictw Instytutu w sierpniu
1984 r.

Lista odbiorców:

Egz.

Biblioteka Główna PWr	1
Biblioteka i OINT I-14	1
Redakcja Wydawnictw I-14	1
Promotor	1
Recenzenci	2
Koordynator PW.05.12	2
Autor	2

Ośrodki obce:

- Politechnika Warszawska	
Instytut Techniki Lotniczej	
i Mechaniki Stosowanej	1
- Politechnika Krakowska	
Instytut Mechaniki Budowli	1