

# Modelowanie komputerowe charakterystyk ciśnieniowych potencjału membranowego generowanego na membranie polimerowej rozdzielającej niejednorodne roztwory elektrolityczne

IZABELLA H. ŚLĘZAK<sup>1</sup>, JOLANTA JASIK-ŚLĘZAK<sup>1</sup>, MIROSŁAWA ROGAL<sup>2</sup>,  
ANDRZEJ ŚLĘZAK<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Zakład Biologii i Biofizyki Politechniki Częstochowskiej

<sup>2</sup>Powiatowy Zespół Zakładów Opieki Zdrowotnej, Oddział Wewnętrzny C, Czeladź

<sup>3</sup>Laboratorium Fotonanotechnologii Fundacji Rozwoju Nanotechnologii, Katowice

---

## Streszczenie

W oparciu o równanie modelowe uzależniające potencjał membranowy  $\Delta\psi_s$  od różnicy ciśnień mechanicznych ( $\Delta P$ ), współczynnika polaryzacji stężeniowej ( $\zeta_s$ ), stężeniowej liczby Rayleigha ( $R_C$ ) i stosunku stężeń roztworów rozdzielanych przez membranę ( $C_h / C_l$ ) obliczono charakterystyki  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  dla ustalonych wartości  $\zeta_s$ ,  $R_C$  i  $C_h / C_l$  w układzie jedno-membranowym. W tym układzie neutralna elektrycznie i izotropowa membrana polimerowa zorientowana w płaszczyźnie horyzontalnej, rozdzielala niejednorodne binarne roztwory elektrolityczne o różnych stężeniach. Niejednorodność roztworów wynika z kreacji po obydwu stronach membrany stężeniowych warstw granicznych

Obliczenia wykonano dla przypadku, w którym po jednej stronie membrany znajdował się wodny roztwór NaCl o ustalonym stężeniu  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_l$ ) a po drugiej stronie – wodny roztwór NaCl o stężeniu z przedziału  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  to  $2\times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_h$ ). Gęstości tych roztworów były większe o gęstości roztworu NaCl o stężeniu  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$ . Wykazano, że potencjał membranowy jest zależny od stanu hydrodynamicznego kompleksu stężeniowa warstwa graniczna-membrana-stężeniowa warstwa graniczna, sterowanego przez  $\Delta P$ ,  $C_h/C_l$ ,  $R_C$  and  $\zeta_s$ .

**Słowa kluczowe:** transport membranowy, membrana polimerowa, potencjał membranowy, stężeniowe warstwy graniczne, stężeniowa liczba Rayleigha

---

# Computer modeling the hydrostatic pressure characteristics of the membrane potential for polymeric membrane separated non-homogeneous electrolyte solutions

## Summary

On the basis of model equation depending the membrane potential  $\Delta\psi_s$  on mechanical pressure difference ( $\Delta P$ ), concentration polarization coefficient ( $\zeta_s$ ), concentration Rayleigh number ( $R_C$ ) and ratio concentration of solutions separated by membrane ( $C_h/C_l$ ), the characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h/C_l}$  for steady values of  $\zeta_s$ ,  $R_C$  and  $C_h/C_l$  in single-membrane system were calculated. In this system neutral and isotropic polymeric membrane oriented in horizontal plane, the non-homogeneous binary electrolytic solutions of various concentrations were separated. Nonhomogeneity of solutions is results from creations of the concentration boundary layers on both sides of the membrane.

Calculations were made for the case where on a one side of the membrane aqueous solution of NaCl at steady concentration  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_l$ ) was placed and on the other aqueous solutions of NaCl at concentrations from  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  to  $2\times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_h$ ). Their densities were greater than NaCl solution's at  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$ . It was shown that membrane potential depends on hydrodynamic state of a complex concentration boundary layer–membrane–concentration boundary layer, what is controlled by  $\Delta P$ ,  $C_h/C_l$ ,  $R_C$  and  $\zeta_s$ .

**Key words:** membrane transport; polymeric membrane, membrane potential, concentration boundary layers, concentration Rayleigh number

---

## WSTĘP

Generowany przez gradient ciśnień osmotycznych i/lub hydrostatycznych membranowy transport objętościowy roztworu, substancji rozpuszczonych oraz ładunku elektrycznego jest przedmiotem badań w wielu dziedzinach nauki, techniki i medycyny [1]. W kategoriach deterministycznych ów transport można opisać, w ramach liniowej termodynamiki nierównowagowej przy pomocy równań Kedem-Katchalsky'ego [2]. Jednak użyteczność tych równań ogranicza się do opisu procesów transportu membranowego roztworów jednorodnych [3]. Jednorodność roztworów można zapewnić jedynie w warunkach laboratoryjnych, przez nałożenie na układ więzów w postaci intensywnego mieszania mechanicznego. Generowany w takim układzie potencjał membranowy (dyfuzyjny) jest opisywany przez następujące równanie [4]

$$\Delta\psi_m = \frac{I_m}{\kappa_m} - \frac{RT}{F} \Delta t_m \ln \frac{C_h}{C_l} \quad (1)$$

gdzie:  $\Delta\psi_m$  jest różnicą potencjałów zmierzoną za pomocą dwóch elektrod kalomelowych;  $\Delta t_m = t_{ma} - t_{mc}$ ,  $t_{ma}$ ,  $t_{mc}$  są odpowiednio liczbą przenoszenia anionu (a) i kationu (c) w membranie;  $t_{ma} + t_{mc} = 1$ ,  $RT$  jest iloczynem stałej gazowej i temperatury termodynamicznej;  $C_h$  oraz  $C_l$  są stężeniami roztworów;  $h$  oraz  $l$  oznacza wyższe i niższe stężenia składnika roztworu;  $\kappa_m$  jest przewodnictwem elektrycznym;  $I_m$  jest elektrycznym prądem jonowym.

Większość spontanicznie zachodzących procesów transportu w polu sił zewnętrznych, szczególnie w układach biologicznych, prowadzi do powstania różnego typu lokalnych i/lub globalnych niejednorodności, modyfikujących transport membranowy [5-7]. Zatem stosowanie owych równań do opisu procesów transportu membranowego roztworów niejednorodnych, jest zbyt dużym uproszczeniem. Jedną z przyczyn powstawania niejednorodności jest zjawisko polaryzacji, którego cechą jest ewolucja czasowo-przestrzenna bodźców, a co za tym idzie i przepływów termodynamicznych [8, 9]. W przypadku transportu membranowego roztworów zarówno elektrolitycznych jak i nieelektrolitycznych ma miejsce polaryzacja stężeniowa, polegająca na tworzeniu po obydwu stronach membrany (M) stężeniowych warstw granicznych ( $l_h$  i  $l_l$ ), o grubościach odpowiednio ( $\delta_h$  i  $\delta_l$ ) [10, 11].

Zatem każdą z warstw można traktować jako ciekłą membranę o określonych właściwościach transportowych. Kreacja i ewolucja czasowo-przestrzenna warstw prowadzi do nowych stężeń na granicach membrana-roztwór, spełniających kryteria  $C_i < C_h$  oraz

$C_e > C_l$  [12]. W związku z tym stężenia  $C_h$  i  $C_l$  występujące w równaniu (1), należy zastąpić stężeniami odpowiednio  $C_i$  oraz  $C_e$ . Oznacza to, że owe warstwy redukując różnicę ciśnień osmotycznych, ograniczają przepływy zarówno osmotyczne jak i dyfuzyjne. Ponadto kinetyka reakcji i ewolucji stężeniowych warstw granicznych, zarówno na poziomie fenomenologicznym jak i molekularnym, jest sterowana przez bezwymiarowy parametr, nazywany stężeniową liczbą Rayleigha, zależny od czynnika grawitacyjnego, lepkościowego i gęstościowego [13]. Dla układu membranowego wyrażenia dla stężeniowych liczb Rayleigha  $R_{Cl}$  i  $R_{Ch}$  można zapisać w postaci [14]

$$R_{Cl} = gRT\omega C_l \zeta_s \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) \left( \frac{C_h}{C_l} - 1 \right) \delta_l^4 (D_l^2 \nu_l \rho_l)^{-1} \quad (2)$$

$$R_{Ch} = gRT\omega C_h \zeta_s \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) \left( 1 - \frac{C_l}{C_h} \right) \delta_h^4 (D_h^2 \nu_h \rho_h)^{-1} \quad (3)$$

gdzie:  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne,  $RT$  – iloczyn stałej gazowej i temperatury termodynamicznej,  $\omega_m$  – współczynnik przepuszczalności substancji rozpuszczonej,  $C_h$  i  $C_l$  – większe (superscript  $h$ ) and mniejsze (superscript  $l$ ) stężenia roztworów poza warstwami  $l_l$  i  $l_h$ ,  $\partial \rho / \partial C$  – zmiana gęstości roztworu ze stężeniem,  $D_l$  i  $D_h$  – współczynniki dyfuzji roztworu,  $\nu_l$  i  $\nu_h$  – współczynniki lepkości kinematycznej roztworu,  $\rho_h$  i  $\rho_l$  – większa (superscript  $h$ ) i mniejsza (superscript  $l$ ) gęstość roztworu,  $\delta_l$  i  $\delta_h$  – grubości warstw odpowiednio  $l_l$  i  $l_h$ . Za początek konwekcji swobodnej w makroskali przyjmuje się punkt, w którym eksperymentalnie wyznaczona liczba Rayleigha przekracza jej wartość krytyczną [15].

W poprzedniej pracy [16] wyprowadzono równanie opisujące potencjał membranowy  $\Delta \psi_s$  w układzie, którym po obydwu stronach membrany są wykreowane stężeniowe warstwy granicznie

$$\Delta \psi_s = -\frac{RT}{F} \left[ \Delta t_o \ln \frac{C_h}{C_l} + (\Delta t_m - \Delta t_o) \ln \frac{C_i}{C_e} \right] \quad (4)$$

gdzie:

$$\frac{C_i}{C_e} = \frac{C_h}{C_l} \frac{1 - \frac{RT \delta_l \delta_h}{D_l D_h} \left\{ \zeta_s \omega \frac{D_l}{\delta_l} \left( 1 - \frac{C_l}{C_h} \right) + \frac{1}{2} \frac{J_v}{RT} \chi_1 + \frac{1}{4} \left( \frac{J_v}{RT} \right)^2 \chi_2 \right\}}{1 + \frac{RT \delta_l \delta_h}{D_l D_h} \left\{ \zeta_s \omega \frac{D_h}{\delta_h} \left( \frac{C_h}{C_l} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{J_v}{RT} \xi_1 - \frac{1}{4} \left( \frac{J_v}{RT} \right)^2 \xi_2 \right\}}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{RT} \left\{ \frac{D_h}{\delta_h} + \frac{D_l}{\delta_l} \left[ \zeta_s \sigma \left( 1 + \frac{C_l}{C_h} \right) - \frac{C_l}{C_h} \right] \right\} - \zeta_s \omega \left( 1 - \frac{C_l}{C_h} \right), \quad \chi_2 = \zeta_s \sigma \left( 1 + \frac{C_l}{C_h} \right) - \frac{C_l}{C_h},$$

$$\xi_1 = \frac{1}{RT} \left\{ \frac{D_h}{\delta_h} \left[ \frac{C_h}{C_l} - \zeta_s \sigma \left( 1 + \frac{C_h}{C_l} \right) \right] - \frac{D_l}{\delta_l} \right\} - \zeta_s \omega \left( \frac{C_h}{C_l} - 1 \right), \quad \xi_2 = \frac{C_h}{C_l} - \zeta_s \sigma \left( \frac{C_h}{C_l} + 1 \right),$$

$$\Delta t_o = t_{oa} - t_{oc}, \quad \Delta t_m = t_{ma} - t_{mc}, \quad \delta_l = R_{Cl}^{0.25} \left\{ D_l^2 \nu_l \rho_l \left[ gRT \omega_m \zeta_s C_l \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) \left( \frac{C_h}{C_l} - 1 \right) \right]^{-1} \right\}^{0.25},$$

$$J_v = L_p \Delta P - L_p \zeta_s \sigma RT (C_h - C_l), \quad \delta_h = R_{Ch}^{0.25} \left\{ D_h^2 \nu_h \rho_h \left[ gRT \omega_m \zeta_s C_h \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) \left( 1 - \frac{C_l}{C_h} \right) \right]^{-1} \right\}^{0.25}.$$

W powyższych wyrażeniach  $R_{Cl}$  i  $R_{Ch}$  oznaczają stężeniowe liczby Rayleigha odpowiednio dla warstw  $l_l$  i  $l_h$ ,  $g$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym,  $RT$  jest iloczynem stałej gazowej i temperatury termodynamicznej,  $\omega_m$  jest współczynnikiem przepuszczalności substancji rozpuszczonej,  $C_h$  i  $C_l$  oznaczają większe (superscript  $h$ ) i mniejsze (superscript  $l$ ) stężenia roztworów poza warstwami  $l_l$  i  $l_h$ ,  $\partial \rho / \partial C$  oznacza zmianę gęstości roztworu ze stężeniem,  $D_l$  i  $D_h$  są współczynnikami dyfuzji składników roztworu,  $\nu_l$  i  $\nu_h$  są współczynnikami lepkości kinematycznej roztworu,  $\rho_h$  i  $\rho_l$  oznaczają większą (superscript  $h$ ) i mniejszą (superscript  $l$ ) gęstość roztworu,  $\delta_l$  i  $\delta_h$  oznaczają grubości warstw odpowiednio  $l_l$  i  $l_h$ ,  $J_v$  oznacza strumień objętościowy roztworu oraz  $L_p$  i  $\sigma$  są współczynnikami odpowiednio przepuszczalności hydraulicznej i odbicia.

W oparciu o równanie (4) obliczono nieliniowe charakterystyki  $\Delta \psi_s = f(C_h / C_l)_{\Delta P, \zeta_s, R_C}$  dla ustalonych wartości  $\Delta P$ ,  $\zeta_s$  i  $R_C$  w układzie jednomembranowym dla przypadku, w którym horyzontalnie zorientowana neutralna elektrycznie i izotropowa membrana polimerowa, rozdzielała niejednorodne (nie mieszane mechanicznie) binarne roztwory elektrolityczne o różnych stężeniach. Obliczenia wykonano dla przypadku, w którym po jednej stronie membrany znajdował się wodny roztwór NaCl o ustalonym stężeniu  $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  ( $C_l$ ), a po drugiej stronie – wodny roztwór NaCl o stężeniu z przedziału  $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  do  $2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  ( $C_h$ ). Wykazano, że wartość potencjału membranowego jest zależna od stanu hydrodynamicznego kompleksu stężeniowa warstwa graniczna-membrana-stężeniowa warstwa graniczna, sterowanego przez  $\Delta P$ ,  $C_h / C_l$ ,  $R_C$  and  $\zeta_s$ .

W obecnej pracy, podobnie jak w poprzedniej [16], w oparciu o równanie (4) zostaną obliczone charakterystyki  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h/C_l}$  dla ustalonych wartości  $\zeta_s$ ,  $R_C$  i  $C_h/C_l$  dla układu jednomembranowego, w którym horyzontalnie zorientowana neutralna elektrycznie, izotropowa i symetryczna membrana polimerowa (M), rozdzielała niejednorodnie (nie mieszane mechanicznie) binarne roztwory elektrolityczne tego samego elektrolitu o różnych stężeniach  $C_l$  i  $C_h$  ( $C_l < C_h$ ). Obliczenia zostaną wykonane dla przypadku, w którym po jednej stronie membrany znajdował się wodny roztwór NaCl o ustalonym stężeniu  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_l$ ), a po drugiej stronie – wodny roztwór NaCl o stężeniu z przedziału  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  to  $2\times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$  ( $C_h$ ). Gęstości tych roztworów były większe o gęstości roztworu NaCl o stężeniu  $10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{l}^{-1}$ . Zostanie wykazane, że potencjał membranowy od stanu hydrodynamicznego kompleksu stężeniowa warstwa graniczna-membrana-stężeniowa warstwa graniczna, sterowanego przez  $\Delta P$ ,  $C_h/C_l$ ,  $R_C$  and  $\zeta_s$ . W tym układzie dyfundująca przez membranę substancja rozpuszczona i woda, formuje po obydwu stronach membrany stężeniowe warstwy graniczne  $l_l$  oraz  $l_h$  o grubościach odpowiednio  $\delta_l$  oraz  $\delta_h$ .

## WYNIKI OBLICZEŃ I DYSKUSJA

Testowanie równania (4) zostanie przeprowadzone dla systemu, w którym membrana ustawiona w płaszczyźnie horyzontalnej rozdziela dwa wodne roztwory NaCl o stężeniach  $C_l = 1 \text{ mol}\cdot\text{m}^{-3}$  i  $C_h = n\Delta C$ , gdzie,  $\Delta C = 1,25 \text{ mol}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 8$ . Gęstość i lepkość kinematyczna odpowiadająca stężeniom roztworów spełnia następujące kryteria  $\rho_h = \rho_l + n\Delta\rho$  i  $\nu_h = \nu_l + n\Delta\nu$ , gdzie  $\rho_l = 997,39 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\Delta\rho = 0,03 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\nu_l = 997,7 \times 10^{-9} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $\Delta\nu_l = -0,03 \times 10^{-9} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  i  $n = 0, \dots, 8$ . Obliczony w oparciu o powyższe dane stężeniowy gradient gęstości wynosi  $(\partial\rho/\partial C) = 0,0262 \text{ kg}(\text{mol})^{-1}$ . Współczynnik dyfuzji NaCl w wodnych roztworach NaCl w zakresie badanych stężeń roztworów jest słabo zależny od stężenia oraz, że  $D_l = D_h = D = \text{const}$ . Do obliczeń wykorzystano jego stałą wartość tablicową  $D = 1,57 \times 10^{-9} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Do badań modelowych wykorzystano płaską membranę polimerową stosowaną w hemodializerze zwojowym o nazwie *Nephrophane*. Parametry transportowe tej membrany są następujące:  $L_p = 5 \times 10^{-12} \text{ m}^3\text{N}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\sigma = 0,06$  and  $\omega = 1,43 \times 10^{-9} \text{ mol}\cdot\text{N}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Wartości współczynnika  $\zeta_s$  dla badanej membrany spełniają warunek  $0,01 \leq \zeta_s \leq 0,5$ . Ponadto do

obliczeń użyto stałych wartości  $R = 8,31 \text{ J}(\text{mol})^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $F = 9,65 \times 10^5 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $\Delta t_m = -0,39$ ,  $\Delta t_o = 0,216$ . Potencjały membranowe dla układu jednomembranowego obliczono przy pomocy pakietu oprogramowania *Mathcad 2000* professional. Wszystkie obliczenia wykonano dla warunków izotermicznych,  $T=295 \text{ K}$ . Wyniki obliczeń zależności  $\Delta\psi_s$  od stosunku stężeń  $C_h/C_l$  dla różnych ustalonych wartości  $\Delta P$ ,  $\zeta_s$  i  $R_C$ , przedstawiono na ryc. 1-5.

Na ryc. 1 i 2 przedstawiono charakterystyki  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h/C_l}$  obliczone dla ustalonych wartości  $\zeta_s = 0,049$  i  $R_C = 244,5968$ ,  $C_h/C_l = 2,5$  (krzywa 1 na ryc. 1),  $C_h/C_l = 8,75$  (krzywe 2a i 2b na ryc. 1),  $C_h/C_l = 15$  (krzywe 3a i 3b na ryc. 1) oraz  $C_h/C_l = 20$  (krzywe 1a i 1b). Z owych rycin wynika, że w badanym przedziale  $\zeta_s$ ,  $R_C$ ,  $C_h/C_l$  równanie (4) posiada dwa rozwiązania. Weźmy pod uwagę krzywe 2a i 2b przedstawione na ryc. 1, ilustrujące dwa rozwiązania równania (4) w zbiorze liczb rzeczywistych. Współrzędne punktu określającego minimum krzywej 2a wynoszą:  $\Delta\psi_s = 0,103 \text{ V}$  oraz  $\Delta P = 478 \text{ kPa}$ . Z kolei współrzędne punktu określającego maksimum krzywej 2b wynoszą:  $\Delta\psi_s = -0,064 \text{ V}$  oraz  $\Delta P = 1275 \text{ kPa}$ . Współrzędne punktu określającego minimum krzywej 3a wynoszą:  $\Delta\psi_s = 0,1 \text{ V}$  oraz  $\Delta P = 500 \text{ kPa}$ . Z kolei współrzędne punktu określającego maksimum krzywej 3b wynoszą:  $\Delta\psi_s = -0,086 \text{ V}$  oraz  $\Delta P = 1550 \text{ kPa}$ . Oznacza to, że zmiana  $C_h/C_l = 8,75$  na  $C_h/C_l = 15$  przesuwają krzywą 3a w stosunku do krzywej 2a w kierunku większych wartości  $\Delta P$  i mniejszych wartości  $\Delta\psi_s$ . Z kolei zmiana  $C_h/C_l = 8,75$  na  $C_h/C_l = 15$  przesuwają krzywą 3b w stosunku do krzywej 2b w kierunku mniejszych wartości  $\Delta P$  i większych wartości  $\Delta\psi_s$ . Z przebiegu krzywej 1a przedstawionej na ryc. 2 wynika, że zakres zmian  $\Delta\psi_s$  przypada na stosunkowo wąski przedział  $\Delta P$  spełniający warunek  $-78 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq 700 \text{ kPa}$ . W przypadku krzywej 1b przedstawionej na tym rysunku wynika, zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w szerokim przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $-780 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq 11700 \text{ kPa}$ . Krzywa 1a posiada minimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,012 \text{ V}$  i  $\Delta P = 545 \text{ kPa}$ . Z kolei krzywa 1b posiada maksimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,034 \text{ V}$  i  $\Delta P = 1052 \text{ kPa}$ .

Na ryc. 3 i 4 przedstawiono charakterystyki  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h/C_l}$  obliczone dla ustalonych wartości  $\zeta_s = 0,3$  i  $R_C = 4423,6023$ ,  $C_h/C_l = 3,75$  (krzywe 1a i 1b na ryc. 3) oraz  $C_h/C_l = 20$  (krzywe 1a i 1b na ryc. 4). Z tej ryciny wynika, że w badanym przedziale  $\zeta_s$ ,  $R_C$ ,  $C_h/C_l$  równanie (4) posiada dwa rozwiązania. Pierwsze ilustruje krzywa 1a, a drugie – krzywa

1b. Z przedstawionych na rycinach 3 i 4 krzywych wynika, że krzywa 1a przedstawiona na ryc. 3 różni się zasadniczo od krzywej 1a przedstawionej na ryc. 4, podobnie jak krzywa 1b przedstawiona na ryc. 3 od krzywej 1b przedstawionej na ryc. 4. Z przebiegu krzywej 1a przedstawionej na ryc. 3 wynika, że zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $-300 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq -170 \text{ kPa}$ . W tym przedziale  $\Delta P$  wartość  $\Delta\psi_s$  maleje nieliniowo od  $\Delta\psi_s = 0,05 \text{ V}$  do  $\Delta\psi_s = -0,3 \text{ V}$ . Z kolei w przypadku krzywej 1b zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $-100 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq +300 \text{ kPa}$ . W tym przypadku wartość  $\Delta\psi_s$  maleje nieliniowo od  $\Delta\psi_s = -0,3 \text{ V}$  do  $\Delta\psi_s = +0,107 \text{ V}$ .

Z przebiegu krzywej 1a przedstawionej na ryc. 4 wynika, że zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $-450 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq +514 \text{ kPa}$ . Krzywa ta posiada minimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,04 \text{ V}$  i  $\Delta P = 300 \text{ kPa}$ . Ponadto krzywa ta pokazuje, że wraz ze wzrostem  $\Delta P$ , wartość  $\Delta\psi_s$  maleje nieliniowo aż do osiągnięcia wartości minimalnej a następnie rośnie nieliniowo. Z kolei w przypadku krzywej 1b zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $780 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq +2540 \text{ kPa}$ . Krzywa ta posiada maksimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,08 \text{ V}$  i  $\Delta P = 1120 \text{ kPa}$ . Ponadto krzywa ta pokazuje, że wraz ze wzrostem  $\Delta P$ , wartość  $\Delta\psi_s$  rośnie nieliniowo aż do osiągnięcia wartości maksymalnej a następnie maleje nieliniowo.

Na ryc. 5 przedstawiono charakterystykę  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obliczoną dla ustalonych wartości  $\zeta_s = 0,3$  i  $R_C = 10$ ,  $C_h / C_l = 20$  (krzywe 1a i 1b). Z tej ryciny wynika, że w badanym przedziale  $\zeta_s, R_C, C_h / C_l$  równanie (4) posiada dwa rozwiązania, które zilustrowane są graficznie przez krzywe 1a i 1b. Z przebiegu krzywej 1a wynika, że zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $-280 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq +2330 \text{ kPa}$ . Krzywa ta posiada minimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,015 \text{ V}$  i  $\Delta P = 1850 \text{ kPa}$ . Ponadto krzywa ta pokazuje, że wraz ze wzrostem  $\Delta P$ , wartość  $\Delta\psi_s$  maleje nieliniowo aż do osiągnięcia wartości minimalnej, a następnie rośnie nieliniowo. Z kolei w przypadku krzywej 1b zakres zmian  $\Delta\psi_s$  zawiera się w przedziale  $\Delta P$ , spełniającym warunek  $2600 \text{ kPa} \leq \Delta P \leq 6000 \text{ kPa}$ . Krzywa ta posiada maksimum w punkcie o współrzędnych  $\Delta\psi_s = -0,032 \text{ V}$  i  $\Delta P = 3500 \text{ kPa}$ . Ponadto krzywa ta pokazuje, że wraz ze wzrostem  $\Delta P$ , wartość  $\Delta\psi_s$  rośnie nieliniowo, aż do osiągnięcia wartości maksymalnej a następnie maleje nieliniowo.



## WNIOSKI

Przedstawione w pracy wyniki modelowania mogą mieć znaczenie dla badań doświadczalnych transportu przez sztuczne membrany polimerowe stosowane w różnych dyscyplinach nauki, medycyny i techniki [1,17]. Mogą mieć także znaczenie dla badań teoretycznych transportu w układach biologicznych, w których występuje zjawisko polaryzacji stężeniowej, takich jak na przykład modelowanie komputerowe zależnej od przepływów polaryzacji stężeniowej lipoprotein o małej gęstości (LDL), dyfundujących przez ścianę tętniczek [18]. Jak wiadomo [19] podwyższenie poziomu stężenia lipoprotein, a szczególnie frakcji lipoprotein o niskiej gęstości (LDL) w osoczu, przyczynia się do akumulacji cholesterolu i jego estrów wewnątrz małych tętnic, co prowadzi do uszkodzeń arteriosklerotycznych i hyperplazji.

## LITERATURA

- [1] BAKER R.: Membrane technology and applications, John Wiley & Sons, New York, 2004.
- [2] KATCHALSKY A., CURRAN P. F.: Nonequilibrium thermodynamics in biophysics. Harvard Univ. Press, Cambridge, 1965.
- [3] ŚLĘZAK A., TURCZYŃSKI B., NAWRAT Z.: Modification of the Kedem-Katchalsky-Zelman model equations of the transmembrane transport. J. Non-Equilib. Thermodyn. (1989), 14, 205-218.
- [4] KATCHALSKY A.: Membrane thermodynamics. In: The neurosciences. A study program, G. C. Quarten, T. Melnechuk, F.O.Schmitt (Eds.) Rockefeller Univ. Press, 1967, 326-343.
- [5] BARRY P. H., DIAMOND J. M.: Effects of unstirred layers on membrane phenomena. Physiol. Rev. (1984), 64, 763-872.
- [6] RUBINSTEIN I., STAUDE E., KEDEM O.: Role of the membrane surface in concentration polarization at ion-exchange membrane. Desalination (1988), 69, 101-114.
- [7] RUBINSTEIN I., ZALTZMAN B.: Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane. Phys. Rev. E (2000), 62, 2238-2251.
- [8] SPIEGLER K. S.: Polarization at ion exchange membrane solution interface. Desalination (1971), 93, 67-385.
- [9] IBANEZ R., STAMATILIS D. F., WESSLING M.: Role of membrane surface in concentration polarization at cation exchange membranes. J. Membr. Sci. (2004), 239, 119-128.

- [10] DWORECKI K., WĄSIK S., ŚLĘZAK A.: Temporal and spatial structure of the concentration boundary layers in In membrane system. *Physica A*, (2003), 326, 360-369.
- [11] DWORECKI K., ŚLĘZAK A., ORNAL-WĄSIK B., WĄSIK S.: Evolution of concentration field in In membrane system. *J. Biochem. Biophys. Meth.* (2005), 62, 153-162.
- [12] ŚLĘZAK A., ŚLĘZAK K., ZYSKA A.: A model equations for voltage concentration boundary layers effect in a single polymeric membrane electrochemical cell. *Polym. Med.* (2005), 34, 55-62.
- [13] ŚLĘZAK A., ŚLĘZAK I.H., ŚLĘZAK K. M.: Influence of the concentration boundary layers on membrane potential in a single-membrane system. *Desalination* (2005), 184, 113-123.
- [14] DWORECKI K., ŚLĘZAK A., ORNAL-WĄSIK B., WĄSIK S.: Effect of hydrodynamic instabilities on solute transport in a membrane system. *J. Membr. Sci.* (2005), 265, 94-100.
- [15] ŚLĘZAK A., DWORECKI K., JASIK-ŚLĘZAK J., WĄSIK J.: Method to determine the critical concentration Rayleigh number in isothermal passive membrane transport processes. *Desalination* (2004), 168, 397-412.
- [16] ŚLĘZAK I., ŚLĘZAK-JASIK J., ROGALA M., ŚLĘZAK A.: Modelowanie komputerowe charakterystyk stężeniowych potencjału membranowego generowanego na membranie polimerowej rozdzielającej niejednorodne roztwory elektrolityczne. *Polim. Med.* (2006) złożona w Redakcji.
- [17] ŚLĘZAK A., KUCHARZEWSKI M., GRZEGORCZYN S., ŚLĘZAK I. H.: Badanie właściwości transportowych polimerowego opatrunku membranowego z jonami srebra. *Polim. Med.* (2005) 35, 3-11.
- [18] WADA S., KARINO T.: Theoretical study on flow-dependent concentration polarization of low density lipoproteins at the luminal surface of straight artery. *Biorheology* (1999), 36, 207-223.
- [19] ROSS R., HARKER L.: Hyperlipidemia and arteriosclerosis. Chronic hyperlipidemia initiates and maintains lesions by endothelial cell desquamation and lipid accumulation. *Science* (1976), 193, 1094-1100.

Adres autorów:

Zakład Biologii i Biofizyki  
 Politechnika Częstochowska,  
 42-200 Częstochowa, ul. Armii Krajowej 36b  
 e-mail: [ajslezak@zim.pcz.czest.pl](mailto:ajslezak@zim.pcz.czest.pl)

Ryc. 1. Rodzina charakterystyk  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  otrzymana dla  $\zeta_s=0,049$ ,  $R_C=244,5968$  i  $C_h / C_l=2,5$  (krzywa 1),  $C_h / C_l=8,75$  (krzywe 2a i 2b) oraz  $C_h / C_l=15$  (krzywe 3a i 3b)

Fig. 1. The family of characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obtained for  $\zeta_s=0.049$ ,  $R_C=244,5968$  and  $C_h / C_l=2,5$  (curve 1),  $C_h / C_l=8,75$  (curves 2a and 2b) and  $C_h / C_l=15$  (curves 3a and 3b)

Ryc. 2. Rodzina charakterystyk  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  otrzymana dla  $\zeta_s=0,049$ ,  $R_C=244,5968$  i  $C_h / C_l=20$  (krzywe 1a i 1b)

Fig. 2. The family of characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obtained for  $\zeta_s=0.049$ ,  $R_C=244,5968$  and  $C_h / C_l=20$  (curves 1a and 1b)

Ryc. 3. Rodzina charakterystyk  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  otrzymana dla  $\zeta_s=0,3$ ,  $R_C=4423,6023$  i  $C_h / C_l=3,75$  (krzywe 1a i 1b)

Fig. 3. The family of characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obtained for  $\zeta_s=0.3$ ,  $R_C=4423,6023$  and  $C_h / C_l=3,75$  (curves 1a and 1b)

Ryc. 4. Rodzina charakterystyk  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  otrzymana dla  $\zeta_s=0,3$ ,  $R_C=4423,6023$  i  $C_h / C_l=20$  (krzywe 1a i 1b)

Fig. 4. The family of characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obtained for  $\zeta_s=0.3$ ,  $R_C=4423,6023$  and  $C_h / C_l=20$  (curves 1a and 1b)

Ryc. 5. Rodzina charakterystyk  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  otrzymana dla  $\zeta_s=0,3$ ,  $R_C=10$  i  $C_h / C_l=20$  (krzywe 1a i 1b)

Fig. 5. The family of characteristics  $\Delta\psi_s = f(\Delta P)_{\zeta_s, R_C, C_h / C_l}$  obtained for  $\zeta_s=0.3$ ,  $R_C=10$  and  $C_h / C_l=20$  (curves 1a and 1b)