

# Wpływ wartości parametrów transportowych na przepływy objętościowe w układzie dwumembranowym

ANDRZEJ ŚLĘZAK, ARKADIUSZ BRYLL

Zakład Biologii i Biofizyki, Politechnika Częstochowska

---

## Streszczenie

Na podstawie nieliniowych równań Kedem-Katchalsky'ego dla układu dwumembranowego, zbadano wpływ parametrów transportowych membran, tj. współczynniki przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ), odbicia ( $\sigma$ ) i solutu ( $\omega$ ), na przepływy objętościowe w układzie dwumembranowym. Układ dwumembranowy składał się z dwóch membran  $M_l$  i  $M_r$ , scharakteryzowanych współczynnikami odpowiednio  $L_{p_l}, \sigma_l, \omega_l$  oraz  $L_{p_r}, \sigma_r, \omega_r$ , rozdzielających roztwory o stężeniach  $C_l, C_m, C_r$ .

W celu wykazania wpływu wartości parametrów membran na wielkość strumienia objętościowego obliczono zależności:  $J_v = f(L_p)_{\sigma_i, \omega_i}$ ,  $J_v = f(\omega_r)_{L_p, \sigma_i}$ ,  $J_v = f(\sigma_r)_{L_p, \sigma_l, \omega_i}$ ,  $J_v = f(\sigma_l)_{L_p, \sigma_r, \omega_i}$ , ( $i = l, r$ ), w warunkach ustalonego ciśnienia mechanicznego ( $P_l = P_r = P_0 = \text{const.}$ ) oraz ustalonych stężeń ( $C_l = C_r = C = \text{const.}$ ).

Obrazami graficznymi dwu pierwszych zależności są hiperbole, zaś w szczególnych przypadkach – linie proste, natomiast obrazy graficzne dwu kolejnych zależności są bardziej złożone.

**Słowa kluczowe:** transport membranowy, równania Kedem-Katchalsky'ego, układ dwumembranowy

---

## **Influence of transport parameters values on volume flows in the double-membrane system**

### **Summary**

On the basis of Kedem-Katchalsky non-linear equations for the double-membrane system, research were carried out upon the influence of the transmembrane transport parameters, i.e. hydraulic permeability ( $L_p$ ), reflection ( $\sigma$ ) and solute ( $\omega$ ) coefficients on the volume flows in the double-membrane system. The membrane system was composed of two membranes  $M_l$  and  $M_r$ , characterized by coefficients, respectively  $L_{p_l}$ ,  $\sigma_l$ ,  $\omega_l$  and  $L_{p_r}$ ,  $\sigma_r$ ,  $\omega_r$ , that separated the solutions at concentrations  $C_l$ ,  $C_m$ ,  $C_r$ .

In order to show the influence of the membranes parameters values on the volume flow intensity, there were calculated the following dependencies:  $J_v = f(L_p)_{\sigma_i, \omega_i}$ ,  $J_v = f(\omega_r)_{L_p, \sigma_i}$ ,  $J_v = f(\sigma_r)_{L_p, \sigma_l, \omega_i}$ ,  $J_v = f(\sigma_l)_{L_p, \sigma_r, \omega_i}$ , ( $i = l, r$ ), in conditions of set out mechanic pressure ( $P_l = P_r = P_0 = \text{const.}$ ) and set concentrations ( $C_l = C_r = C = \text{const.}$ ).

The graphical pictures of the two first equations are hyperbolas and straight lines in particular cases, whereas the graphical pictures of further two dependencies are more complex.

**Key words** : transmembrane transport, Kedem-Katchalsky equations, double-membrane system

---

## WSTĘP

Zagadnienia transportowe w układach dwumembranowych i wielomembranowych doczekały się wielu opracowań. Pionierskie badania z tego okresu opisane zostały w pracach [2-6]. Badano i uogólniano między innymi sam termodynamiczny model równań opisujących transport międzymembranowy, zarówno dla nieelektrolitycznych roztworów dwuskładnikowych jak i wieloskładnikowych [10, 14, 15, 17-19]. Przy tym badania dotyczyły zarówno membran sztucznych jak i biologicznych, ustawionych horyzontalnie bądź wertykalnie. Obejmowały między innymi zagadnienia związane z oceną wielkości strumieni objętościowych i strumieni solutu [8, 11-13, 21], wartościami prostowniczymi [7] i powstawaniem stężeniowych warstw granicznych [16]. Seria prac poświęcona została badaniom strumieniowego efektu grawiosmotycznego i grawidyfuzyjnego oraz ciśnieniowego efektu grawiosmotycznego w systemie dwóch membran polimerowych ustawionych poziomo [22-24], jak również strumieniowego efektu grawiosmotycznego dla systemu membran ustawionych pionowo [20].

Interpretacja fenomenologicznych współczynników przepuszczalności membran, podana w pracach [2-6], uogólniona została na niezjonizowane roztwory wieloskładnikowe [10]. W pracy [9] traktuje się niektóre układy biologiczne jako systemy wielomembranowe, zaś w pracy [1] podaje się przykład zastosowania nowych układów dwumembranowych w celu nityfikacji i denityfikacji zbiorników. Niniejsza praca stanowi kontynuację badań opisanych w pracy [13], dotyczących przepływów jednorodnych roztworów nieelektrolitycznych przez układ dwumembranowy, w oparciu o nieliniowy model równań dla strumienia objętościowego.

Wielkość przepływów objętościowych nieelektrolitów jest zdeterminowana przez bodźce termodynamiczne, takie jak gradient ciśnienia mechanicznego i gradient stężenia osmotycznego, jak i przez właściwości transportowe samych membran. Te ostatnie określane są przez przepuszczalność hydrauliczną ( $L_p$ ), przepuszczalność substancji rozpuszczonej ( $\omega$ ) oraz współczynnik odbicia ( $\sigma$ ). W pracy [13] zbadano zależność strumienia objętościowego, opisanego równaniem nieliniowym, od gradientu ciśnienia mechanicznego, tj. zależność  $J_v = f(\Delta P)_{C=\text{const.}}$  (gdzie  $\Delta P = P_l - P_r$ ) oraz od stężeń (gdy  $\Delta P = \text{const.}$ ), tj. zależności:

$J_v = f(C_r)_{C_l - C_r, \Delta P}$  (gdzie  $C_l - C_r = k = \text{const.}$ ,  $\Delta P = \text{const.}$ ),  $J_v = f(C_r)_{C_l = mC_r}$  (gdzie  $m = \text{const.}$ ,  $m > 1$ ),  $J_v = f(C_r)_{C_l = \text{const.}}$ ,  $J_v = f(C_l)_{C_r = \text{const.}}$ .

Ze względu na fakt, że strumień objętościowy  $J_v$  jest określony za pomocą równania drugiego stopnia, obrazem graficznym wymienionych zależności są hiperbole, zaś w szczególnym przypadku obrazem tym są proste (gdy  $\Delta P = 0$  i  $C_l = C_r = C_0$ ). Wielkości  $C_l$ ,  $C_r$  są stężeniami roztworów w przestrzeniach l i r, rozdzielonych dwiema membranami  $M_l$  i  $M_r$ , ustawionymi pionowo.

W niniejszej pracy zbadamy wpływ właściwości samych membran w układzie dwumembranowym na wartość strumienia objętościowego, określonego równaniem nieliniowym, przy ustalonych bodźcach termodynamicznych i przy założeniu jednorodności roztworów nieelektrolitycznych.

## NIELINIOWE RÓWNANIE MODELOWE DLA STRUMIENIA OBJĘTOŚCIOWEGO W UKŁADZIE DWUMEMBRANOWYM

Rozważany w pracy układ dwumembranowy przedstawiony schematycznie na ryc.1. Układ ten składa się z trzech obszarów l, m, r, zawierających roztwory o stężeniach  $C_l$ ,  $C_r$  i  $C_m$ , rozdzielonych izotropowymi i symetrycznymi membranami  $M_l$  i  $M_r$ . Właściwości transportowe tych membran są scharakteryzowane przez współczynniki przepuszczalności hydraulicznej ( $Lp_l$ ,  $Lp_r$ ), współczynniki odbicia ( $\sigma_l$ ,  $\sigma_r$ ) i współczynniki przepuszczalności substancji rozpuszczonych ( $\omega_l$  i  $\omega_r$ ). Stężenia roztworów spełniają warunek:  $C_l > C_m > C_r$ , zaś objętości przestrzeni l, m, r spełniają warunek:  $V_m \ll V_l = V_r$ . Proces przepływu międzymembranowego jest stacjonarny i izotermiczny, bez reakcji chemicznych w roztworach. Do opisu przepływów w układzie dwumembranowym można stosować nieliniowy model równań Kedem–Katchalsky’ego. W stanie ustalonym strumienie objętościowe w przestrzeniach l i r spełniają warunek:  $J_{v_l} = J_{v_r} = J_v$ . W pracy [12] wykazano, że w stanie ustalonym strumień objętościowy  $J_v$  spełnia następujące równanie nieliniowe, wynikające z równań Kedem – Katchalsky’ego:

$$\alpha(J_v)^2 + \beta J_v - \gamma = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{2}(Lp_l + Lp_r)(\sigma_l - \sigma_r)$$

$$\beta = RT(Lp_l + Lp_r)(\omega_l + \omega_r) - Lp_l Lp_r (\chi_1 + \chi_2 - \chi_3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\sigma_l - \sigma_r)(P_l - P_r)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2}RT[(\sigma_l(1 - \sigma_r) + \sigma_r(1 - \sigma_l))(C_l + C_r)]$$

$$\chi_3 = RT[(\sigma_l(1 - \sigma_l)C_l + \sigma_r(1 - \sigma_r)C_r)]$$

$$\gamma = RT Lp_l Lp_r [RT(\sigma_l \omega_r + \sigma_r \omega_l)(C_l - C_r) + (\omega_l + \omega_r)(P_l - P_r)]$$

Wielkość  $RT$  jest iloczynem stałej gazowej ( $R = 8.31 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1}$ ) i temperatury termodynamicznej, zaś  $\Delta P = P_l - P_r$  jest różnicą ciśnień mechanicznych. W dalszym ciągu przyjmujemy, że  $T = 295 \text{ K}$ .

Wspomnieliśmy już, że w pracy [13] na podstawie równania (1) przeprowadzono badania nad wpływem różnicy ciśnień ( $\Delta P$ ) i stężeń roztworów ( $C_l$ ,  $C_r$ ) na wartość strumienia objętościowego  $J_v$ . W niniejszej pracy równanie (1) stanowi punkt wyjścia do zbadania wpływu parametrów transportowych na wartość strumienia objętościowego  $J_v$ , w warunkach ustalonego ciśnienia mechanicznego i ustalonych stężeń roztworów.

## BADANIE ZALEŻNOŚCI STRUMIENIA OBJĘTOŚCIOWEGO OD WSPÓŁCZYNNIKA PRZEPUSZCZALNOŚCI HYDRAULICZNEJ LP

W celu ustalenia zależności  $J_v = f(Lp)_{\sigma_i, \omega_i}$  rozpatrzmy następujące przypadki:

$P_l = P_r = P_0 = \text{const.}$  oraz  $C_l = C_r = C = \text{const.}$

Jeżeli założymy, że  $P_l = P_r = P_0$ , to równanie (1) przyjmuje postać:

$$\Delta\sigma(RTLp)^{-1}J_v^2 + \{2(Lp)^{-1}(\omega_l + \omega_r) - \Delta\sigma[(\sigma_l - 0.5)C_l - (\sigma_r - 0.5)C_r]\}J_v - RT(\sigma_l\omega_r + \sigma_r\omega_l)(C_l - C_r) = 0$$

gdzie:  $Lp = 2Lp_l Lp_r \cdot (Lp_l + Lp_r)^{-1}$ ,  $\Delta\sigma = \sigma_l - \sigma_r$ . (2)

Na podstawie wzoru (2) wnioskujemy, że wielkości  $Lp_l, Lp_r$  nie występują oddzielnie, a jedynie stałe w postaci współczynnika  $Lp$  ( $[Lp] = m^3 \cdot (N \cdot s)^{-1}$ ). Stąd też badania współczynnika objętościowego  $J_v$  uzależnimy jedynie od tego współczynnika.

W przypadku, gdy współczynniki odbicia  $\sigma_l$  i  $\sigma_r$  spełniają warunek  $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$  równanie (2) przyjmuje postać:

$$J_v = \frac{1}{2}RT\sigma Lp(C_l - C_r) \quad (3)$$

Oznacza to, że strumień objętościowy  $J_v$  nie zależy od współczynników  $\omega_l, \omega_r$ . Ze wzoru (3) wynika liniowy charakter każdej z zależności  $J_v = f(Lp)_{\sigma, \Delta C}$ ,  $J_v = f(\sigma)_{Lp, \Delta C}$ ,  $J_v = f(C_l - C_r)_{\sigma, Lp}$

Graficzną ilustrację zależności  $J_v = f(Lp)_{\sigma, \Delta C}$ , określonej wzorem (3), przedstawiono na ryc. 2<sup>1)</sup>, przyjmując  $\sigma = 0,5$  i  $\Delta C = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 \text{ mol} \cdot l^{-1}$ .

Założmy z kolei, że membrany  $M_l$  i  $M_r$  mają różne współczynniki odbicia, tj.  $\sigma_l \neq \sigma_r$ . Wzór (2) pozwala zbadać zależność  $J_v = f(Lp)_{C_l, \omega_l, \sigma_i}$  ( $i = l, r$ ).

Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące wartości:

$$\omega_l = 1 \cdot 10^{-20} \text{ mol} \cdot (N \cdot s)^{-1}; \omega_r = 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot (N \cdot s)^{-1}; \sigma_l = 0,9; \sigma_r = 0,1.$$

Na ryc. 3a podano graficzną ilustrację rozważanej zależności dla  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot l^{-1}$  i  $C_l = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 \text{ mol} \cdot l^{-1}$  zaś na ryc. 3b podano ilustrację tej zależności dla  $C_l = 0,125$  i  $C_r = 0,1; 0,3; 0,4; 0,5 \text{ mol} \cdot l^{-1}$

Na podstawie ryc. 3a wnioskujemy, że strumień objętościowy  $J_v$  wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika  $Lp$ . W przypadku  $C_l = C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot l^{-1}$  graficznym obrazem zależności  $J_v = f(Lp)_{C_l, \omega_l, \sigma_i}$  jest linia prosta, zaś w przypadku  $C_r < C_l$  graficznym obrazem tej zależności są hiperbole. Wszystkie te hiperbole przecinają się w początku układu współrzędnych i w punkcie  $(0; -6,13 \cdot 10^{-7})$ . Również na rys. 3b obrazem graficznym zależności  $J_v = f(Lp)_{C_l, \omega_l, \sigma_i}$  gdzie  $C_r > C_l$ , są hiperbole przecinające się w punktach  $(0; 0)$ ,  $(0; -6,13 \cdot 10^{-7})$  i ponadto w punkcie  $(5,31 \cdot 10^{-12}; 6,9 \cdot 10^{-7})$ . Dla pewnych wartości współczynnika  $Lp$  strumień  $J_v$  nie jest określony.

<sup>1)</sup> Dla ukazania rodzaju krzywych, będących obrazami graficznymi strumienia objętościowego  $J_v$  w zależności od różnych parametrów oraz dla ukazania charakteru monotoniczności, podawać będziemy wykresy również dla wartości wykraczających poza zakres zmienności parametrów. Dotyczy to parametrów mających sens fizyczny przy następujących założeniach:  $Lp \geq 0$ ,  $\omega_i \geq 0$ ,  $0 \leq \sigma_i \leq 1$  ( $i = l, r$ ),  $-1 \leq \Delta\sigma \leq 1$ .

Widzimy więc, że wraz ze wzrostem współczynnika przepuszczalności hydraulicznej  $L_p$  strumień objętościowy wzrasta, gdy stężenie roztworu w przestrzeni  $r$  jest większe od stężenia roztworu w przestrzeni  $l$  ( $C_r > C_l$ ).

Jeżeli  $C_r = C_l = C$ , to równanie (1) przyjmuje postać:

$$\Delta\sigma(RTLp)^{-1}J_v^2 + \{2(Lp)^{-1}(\omega_l + \omega_r) - \Delta\sigma[0,5\Delta P(RT)^{-1} + C\Delta\sigma]\}J_v - (\omega_l + \omega_r)\Delta P = 0 \quad (4)$$

Widoczne jest, że strumień objętościowy  $J_v$  zależy jedynie od różnic  $\Delta\sigma$  i  $\Delta P$ , nie zależy natomiast bezpośrednio od wartości parametrów  $\sigma_l, \sigma_r, P_l, P_r$ .

Dla  $\Delta\sigma = 0$  na podstawie (4) otrzymujemy równanie:

$$J_v = \frac{1}{2}L_p\Delta P \quad (5)$$

W rozważanym przypadku strumień objętościowy  $J_v$  jest rosnącą funkcją liniową współczynnika  $L_p$  (ryc. 4.). W przypadku  $\Delta\sigma \neq 0$  graficzną ilustrację zależności określonej równaniem (4) podano na rys. 5 dla następujących wartości parametrów:  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ,  $\omega_l = 1 \cdot 10^{-20} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\omega_r = 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5; -0,2; 0,3; 0,5; 0,8$ . Z przebiegu hiperbol podanych na rys. 5 wnioskujemy, że jedna z ich asymptot pokrywa się z osią współrzędnej  $L_p$ , zaś druga z asymptot tworzy z tą osią bądź kąt ostry, gdy  $\sigma_l > \sigma_r$  (hiperbole 1 i 2), bądź kąt rozwarty, gdy  $\sigma_l < \sigma_r$  (hiperbole 3, 4, 5). Jeżeli  $\sigma_l < \sigma_r$  to strumień objętościowy  $J_v$  rośnie wraz ze wzrostem współczynnika  $L_p$ .

## **BADANIE ZALEŻNOŚCI STRUMIENIA OBJĘTOŚCIOWEGO $J_v$ OD WSPÓŁCZYNNIKA PRZEPUSZCZALNOŚCI SOLUTU $\omega$**

W dalszych częściach pracy przyjmujemy, że  $L_p = 10^{-12} \text{ m}^3 (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ . Zauważyliśmy wcześniej, że w przypadku  $\sigma_l = \sigma_r$  strumień objętościowy  $J_v$  nie zależy od współczynników  $\omega_l$  i  $\omega_r$ . Możemy więc założyć, że  $\sigma_l \neq \sigma_r$ .

Rozważymy przypadek, gdy współczynnik  $\omega_l$  jest bardzo mały względem  $\omega_r$ , tj  $\omega_l \ll \omega_r$ , a także przypadek, gdy współczynniki  $\omega_l$  i  $\omega_r$  są takie same. Jeżeli  $\omega_l \ll \omega_r$ , to można przyjąć następujące oszacowanie:

$$\omega_l + \omega_r = \omega_r \left( 1 + \frac{\omega_l}{\omega_r} \right) \approx \omega_r;$$

$$\sigma_l \omega_r + \sigma_r \omega_l = \sigma_l \omega_r \left( 1 + \frac{\sigma_r \omega_l}{\sigma_l \omega_r} \right) \approx \sigma_l \omega_r;$$

Przy powyższym oszacowaniu równanie (2) przyjmuje postać:

$$(RTLp)^{-1}\Delta\sigma J_v^2 + \{2(Lp)^{-1}\omega_r - \Delta\sigma[(\sigma_l - 0,5)C_l - (\sigma_r - 0,5)C_r]\}J_v - RT\sigma_l\omega_r\Delta C = 0 \quad (6)$$

Graficzną ilustrację zależności  $J_v = f(\omega_r)_{C_l, \sigma_l}$  podano na ryc. 6a i ryc. 6b dla następujących wartości parametrów:  $\sigma_l = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$  oraz

a)  $C_r = 0,1$ ;  $C_l = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ,

b)  $C_r = 0,125$ ;  $C_l = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ .

Jeśli  $C_l = C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ , to wykresem zależności  $J_v = f(\omega_r)_{C_l, \sigma_l}$  jest linia prosta, jeśli zaś  $C_l \neq C_r$ , to wykresem tej zależności są hiperbole, których jedna z gałęzi przechodzi

przez początek układu współrzędnych. Na ryc. 6a (gdy  $C_l > C_r$ ) wszystkie hiperbole mają wspólną asymptotę. Strumień objętościowy  $J_v$  zmniejsza się w miarę wzrostu współczynnika  $\omega_r$ . Na podstawie ryc. 6b wnioskujemy, że w przypadku  $C_l < C_r$  strumień objętościowy  $J_v$  przyjmuje wartość dodatnią tylko dla  $0 \leq \omega_r < 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ .

Jeżeli  $\omega_l = \omega_r = \omega$ , to równanie (2) przyjmuje postać:

$$(\text{RTLp})^{-1} \Delta \sigma J_v^2 + \{(\text{Lp})^{-1} 4\omega - \Delta \sigma [(\sigma_l - 0,5)C_l - (\sigma_r - 0,5)C_r]\} J_v - \text{RT}\omega(\sigma_l + \sigma_r)\Delta C = 0 \quad (7)$$

Na ryc. 7a i ryc 7b podano graficzną ilustrację zależności  $J_v = f(\omega)_{C_l, \sigma_i}$  ( $i = l, r$ ), określonej równaniem (7), dla tych samych wartości parametrów jak w przypadku  $\omega_l \neq \omega_r$ . Przebieg hiperbol charakteryzujących graficznie tą zależność nie różni się istotnie od przebiegu odpowiednich hiperbol na ryc.6a i 6b, ilustrujących zależność  $J_v = f(\omega_r)_{C_l, \sigma_i}$ .

Rozważmy z kolei przypadek, gdy  $C_l = C_r = C$ . Równanie (4) przyjmuje postać:

$$(\text{RTLp})^{-1} \Delta \sigma J_v^2 + \{(\text{Lp})^{-1} 2k - \Delta \sigma [0,5 \cdot \Delta P (\text{RT})^{-1} + C \Delta \sigma]\} J_v - k \Delta P = 0 \quad (8)$$

$$\text{gdzie: } k = \begin{cases} \omega_r, & \text{gdy } \omega_l \neq \omega_r \\ 2\omega, & \text{gdy } \omega_l = \omega_r = \omega \end{cases}$$

Na rycinach 8a i 8b przedstawiono graficzne zależności  $J_v = f(\omega_r)_{\Delta \sigma, \Delta P, C}$ ,  $J_v = f(\omega)_{\Delta \sigma, \Delta P, C}$  określone równaniem (8), dla następujących wartości parametrów:

$$\Delta \sigma = -0,5; -0,2; 0,3; 0,5; 0,8;$$

$$C_l = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}, \Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Na podstawie przebiegu hiperbol podanych na ryc. 8a i ryc. 8b wnioskujemy, że zmiana znaku wyrażenia  $\Delta \sigma = \sigma_l - \sigma_r$  powoduje zmianę charakteru monotoniczności odpowiednich hiperbol. Przebieg hiperbol podanych na ryc. 8b jest podobny do przebiegu odpowiednich hiperbol podanych na ryc. 8a.

## **BADANIE ZALEŻNOŚCI STRUMIENIA OBJĘTOŚCIOWEGO $J_v$ OD WSPÓŁCZYNNIKÓW ODBICIA $\sigma_l$ I $\sigma_r$**

Jeżeli  $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$ , to w przypadku  $\Delta P = 0$  strumień objętościowy  $J_v$  można wyznaczyć na podstawie wzoru (3). Strumień ten wzrasta liniowo wraz ze wzrostem współczynnika odbicia  $\sigma$ . Jeśli natomiast  $\sigma_l \neq \sigma_r$  i  $\Delta P = 0$ , to w przypadku  $\omega_l \neq \omega_r$ , dla wyznaczenia strumienia objętościowego  $J_v$  można skorzystać ze wzoru (6). Na podstawie tego wzoru podano obrazy graficzne zależności  $J_v = f(\sigma_l)_{\sigma_r, \omega_r, C_l}$  (ryc. 9a, 9b, 9c),  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_l, \omega_r, C_l}$  ( $i = l, r$ ), dla wartości  $\omega_r = 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ,  $\Delta P = 0$  i dla różnych wartości parametrów  $C_r$  i  $C_l$ .

Na podstawie wzoru (6) podano również obraz zależności  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_l, \omega_r, C_l}$  ( $i = l, r$ ) (ryc. 11a, 11b, 11c) dla różnych wartości parametru  $\omega_r$ , przy założeniach, że  $\Delta P = 0$  i  $\omega_l \neq \omega_r$ .

Jeżeli  $\Delta P \neq 0$ , to na podstawie wzoru (8), przy założeniu, że  $\omega_l \neq \omega_r$  i  $k = \omega_r$ , można zbadać zależność  $J_v = f(\Delta \sigma)_{\Delta P, \omega_r, C}$ . Na ryc. 12 podano obraz graficzny tej zależności dla następujących wartości parametrów:  $C = 0,125; 0,25; 0,375; 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ,  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\omega_r = 1 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ .

## WNIOSKI

W pracy zbadano wpływ parametrów membran na wielkość strumienia objętościowego w układzie dwumembranowym w dwóch przypadkach:

1. gdy ciśnienia spełniają warunek  $P_1 = P_r = P_0 = \text{const.}$
2. gdy stężenia roztworów spełniają warunek:  $C_1 = C_r = C = \text{const.}$

Założenia powyższe pozwalają na uchwycenie wpływu na strumień objętościowy  $J_v$  współczynników przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ), przepuszczalności solutu ( $\omega$ ) i odbicia  $\sigma_1$ ,  $\sigma_r$ .

Zależność  $J_v = f(L_p)$ , gdzie  $L_p = 2L_{p1}L_{p_r}(L_{p1} + L_{p_r})^{-1}$  w obu rozważanych przypadkach ma charakter liniowy (ryc. 2, ryc. 4) lub hiperboliczny (ryc. 3a, 3b i ryc. 5). W przypadku liniowym strumień objętościowy  $J_v$  wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika przepuszczalności hydraulicznej  $L_p$ . W przypadku zależności hiperbolicznej przedziały monotoniczności są zdeterminowane przez wybór pozostałych parametrów membran i odpowiednich czynników bodźcowych ( $C_1$ ,  $C_r$ ,  $\Delta P$ ).

Zależność  $J_v = f(\omega)$  ma jedynie miejsce w przypadku, gdy różne są współczynniki odbicia obu membran tj. gdy  $\sigma_1 \neq \sigma_r$ . Przy założeniu  $\omega_1 \ll \omega_r$  istotny wpływ na przebieg strumienia objętościowego  $J_v$  ma jedynie parametr  $\omega_r$  (rys. 7a). W każdym z przypadków  $\omega_r \square \omega_r$ ,  $\omega_1 = \omega_r = \omega$  graficznym obrazem zależności  $J_v = f(\omega)$  są hiperbole. Ich przebieg uzależniony jest od znaku wyrażenia  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_r$  (ryc. 7a, 7b; ryc 8a, 8b).

Zarówno w przypadku  $\Delta P = 0$  jak i w przypadku  $C_1 = C_r = C = \text{const.}$  zależność  $J_v = f(\omega_r)$  (przy założeniu  $\omega_r \square \omega_r$ ) jest typu hiperbolicznego i w szczególnych przypadkach może redukować się do zależności liniowej. (ryc. 6a, 6b i ryc.7). W przypadku hiperbolicznym odpowiednie przedziały monotoniczności zależą zarówno od pozostałych parametrów membran jak i wielkości bodźców.

W przypadku  $\sigma_1 = \sigma_r = \sigma$  i  $\Delta P = 0$ , zależność  $J_v = f(\sigma)$  ma charakter liniowy. Strumień  $J_v$  rośnie wówczas wraz ze wzrostem współczynnika odbicia  $\sigma$  (o ile  $\Delta C = C_1 - C_r > 0$ ).

Jeśli  $\sigma_1 \neq \sigma_r$ ,  $\Delta P = 0$ ,  $\omega_r = \text{const.}$ , to zależności  $J_v = f(\sigma_1)$  (ryc. 9a, 9b, 9c) i  $J_v = f(\sigma_r)$  (ryc. 10a, 10b, 10c) mają charakter bardzo złożony. O ich złożoności decyduje wybór drugiego współczynnika odbicia i wybór stężeń  $C_1$  i  $C_r$ . Również złożony jest charakter zależności  $J_v = f(\sigma_r)$  w przypadku różnych wartości parametru  $\omega_r$ , przy założeniu, że  $\Delta P = 0$  (ryc. 11a, 11b, 11c).

W przypadku  $\Delta P \neq 0$  zależność  $J_v = f(\Delta\sigma)$ , gdzie  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_r$ , ma interesującą ilustrację graficzną (rys. 12). Obraz graficzny zależności  $J_v = f(\Delta\sigma)$  jest niemal symetryczny względem osi  $J_v$ . Dla  $\Delta\sigma < 0$  strumień objętościowy  $J_v$  maleje wraz ze wzrostem  $\Delta\sigma$ , zaś dla  $\Delta\sigma > 0$  strumień ten rośnie wraz ze wzrostem  $\Delta\sigma$ .

Z przeprowadzonych badań wynika, że parametry membran w sposób istotny wpływają na wielkość i kierunek strumienia objętościowego  $J_v$ . Badania te rzucają pewne



światło na mechanizm przepływu w układach dwumembranowych sztucznych i biologicznych, w zależności od rodzajów membran i ich właściwości.

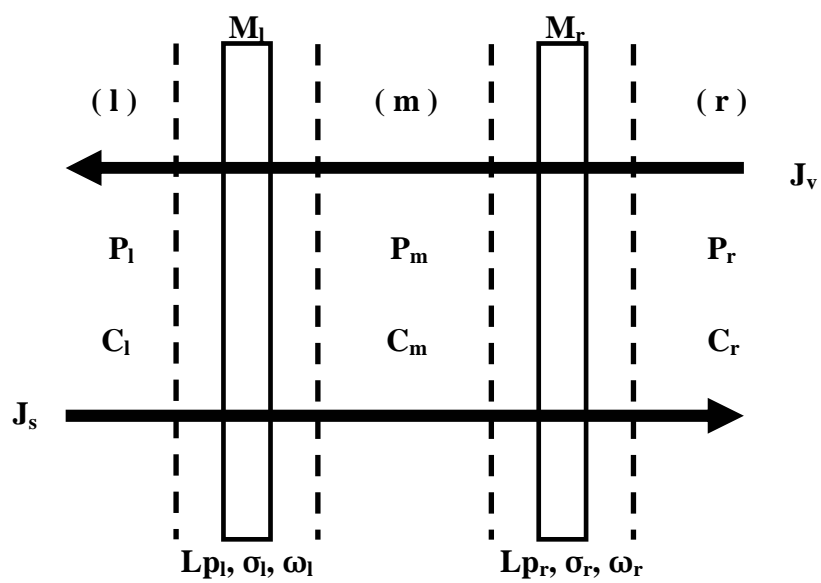
## LITERATURE

- [1] Chang., Y.J., Tseng S.K.: A novel double-membrane system for simultaneous nitrification and denitrification in single tank. *Lett. Appl. Microbiol.* 28, (1999), 453-456.
- [2] Katchalsky A., Curran P.F.: Nonequilibrium thermodynamics in biophysics. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1965.
- [3] Kedem O., Katchalsky A.: Permeability of composite membranes. Part 1. Electric current, volume flow and flow of solute through membranes. *Trans. Faraday Soc.* 59, (1963), 1918-1970.
- [4] Kedem O., Katchalsky A.: Permeability of composite membranes. Part 2. Parallel elements. *Trans. Faraday Soc.* 59, (1963), 1931-1940.
- [5] Kedem O., Katchalsky A.: Permeability of composite membranes. Part 3. Series array of elements. *Trans. Faraday Soc.* 59, (1963), 1941-1953.
- [6] Kedem O., Katchalsky A.: A physical interpretation of the phenomenological coefficients in membrane permeability. *J. Gen. Physiol.* 45, (1961), 143-179.
- [7] Ohki S.: Rectification by double-membrane. *J. Phys. Soc. Japan* 20, (1965), 1674-1685.
- [8] Patlak C.S., Goldstein D.A., Hoffman J.F.: The flow of solute and solvent across a two-membrane system. *J. Theoret. Biol.* 5, (1963), 426-442.
- [9] Richardson J.W.: Multiple membrane systems as biological models: current-voltage behavior. *J. Membrane Biol.* 8, (1972), 219-236.
- [10] Ślęzak A.: A frictional interpretation of the phenomenological coefficients of membrane permeability for multicomponent non-ionic solutions. *J. Biol. Phys.* 23, (1997), 239-250.
- [11] Ślęzak A.: A model equations of the volume transport of multicomponent and heterogeneous non-ionic solutions in double-membrane system. *J. Biol. Phys.* 24, (1998), 59-78.
- [12] Ślęzak A.: Study of the solute flows of multicomponent and heterogeneous non-ionic solutions in double-membrane system. *J. Biol. Phys.* , (2000), 235-254.
- [13] Ślęzak A., Bryll A.: Nonlinear Kedem-Katchalsky model equations of the volume flux of homogeneous non-electrolyte solutions in double-membrane system. *Polymers in Medicine* 34 (4), (2004), 45-52.
- [14] Ślęzak A., Grzegorzyn S.: Study of unstirred ternary non-ionic solutions transport in a double-membrane system. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 24, (1999), 307-326.
- [15] Ślęzak A., Grzegorzyn S., Sieroń A., Dworecki K.: Thermodynamic model equations for heterogeneous multicomponent non-ionic solution transport in a multimembrane system. *J. Biol. Phys.* 25, (1999), 289-308.
- [16] Ślęzak A., Jasik-Ślęzak J., Dworecki K.: Effect of concentration boundary layers on passive solute flows in a system of two polymeric membranes positioned in vertical planes. *Polimery w Medycynie.* 33 (4), (2003), 43-64.
- [17] Ślęzak A., Nawrat Z., Turczyński B.: The transport of heterogeneous solutions across the system of two membranes oriented in horizontal planes. *Postępy Fizyki Med.* 25, (1990), 137-153.
- [18] Ślęzak A., Turczyński B.: The problem of transport of heterogeneous solutions across double-membrane system oriented in vertical planes. *Postępy Fizyki Med.* 27, (1992), 55-62.

- [19] Ślęzak A., Turczyński B., Nawrat Z.: Modification of the Kedem-Katchalsky-Zelman model equations of the transmembrane transport. *J.Non-Equilib. Thermodyn.* 14, (1989), 205-218.
- [20] Ślęzak A., Wąsik J.: The volume flows of non-electrolyte solutions across a vertically mounted membranes in a double-membrane system. *Polish J. Med. Phys. & Eng.* 6 (4), (2000), 225-241.
- [21] Ślęzak A., Wąsik J., Grzegorzyn S.: Irreversible thermodynamics model equations for heterogeneous solute flows in a double-membrane system. *Desalination* 163, (2004), 155-175.
- [22] Ślęzak A., Wąsik J., Jasik-Ślęzak J., Twardość W.: Ciśnieniowy efekt grawiosmotyczny dla serii dwóch płaskich membran polimerowych ustawionych horyzontalnie. *Polimery w Medycynie* 31 (3-4), (2001), 25-32.
- [23] Ślęzak A., Wąsik J., Jasik-Ślęzak J., Twardość W.: Strumieniowy efekt grawidyluzyjny dla serii dwóch płaskich membran polimerowych ustawionych horyzontalnie. *Polimery w Medycynie* 31 (3-4), (2001), 33-41.
- [24] Ślęzak A., Wąsik J., Jasik-Ślęzak J., Skrzekowska-Baran J.: Strumieniowy efekt grawiosmotyczny dla serii dwóch płaskich membran polimerowych ustawionych horyzontalnie i trójskładnikowych roztworów nieelektrolitów. *Polimery w Medycynie* 31 (3-4), (2001), 42-51.

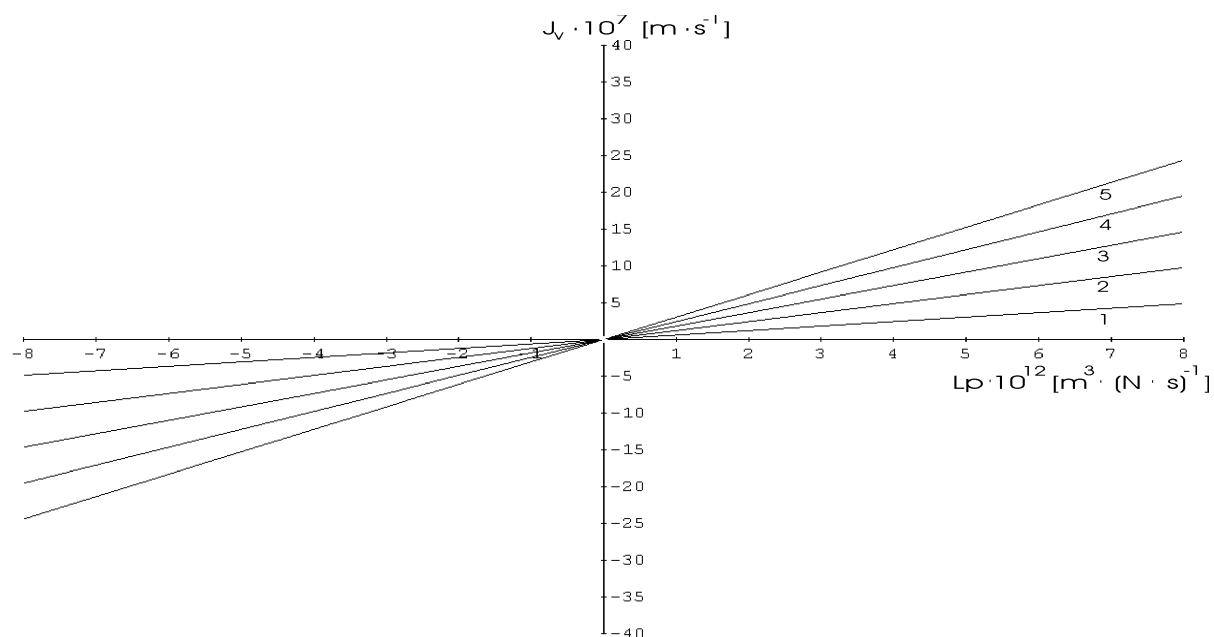
Adres autorów

Zakład Biologii i Biofizyki  
 Politechnika Częstochowska  
 ul Armii Krajowej 19 B  
 42-200 Częstochowa, Polska  
 E-mail: ajslezak@zim.pcz.czyst.pl



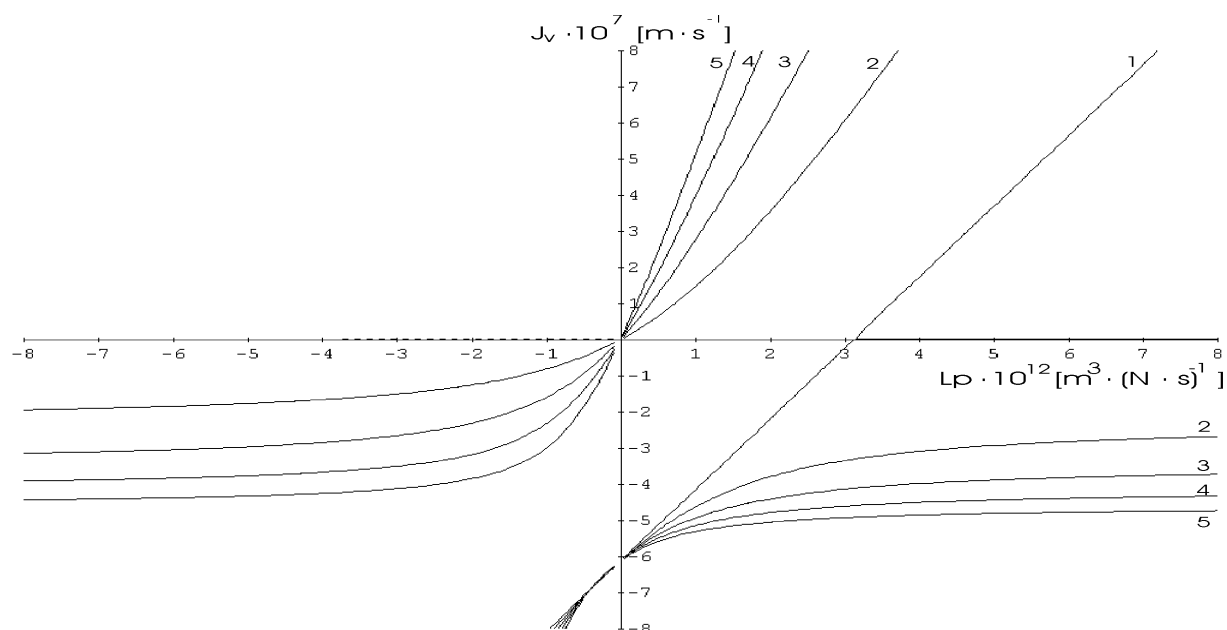
Rys.1. Układ dwumembranowy.

Fig.1. Double-membrane system.



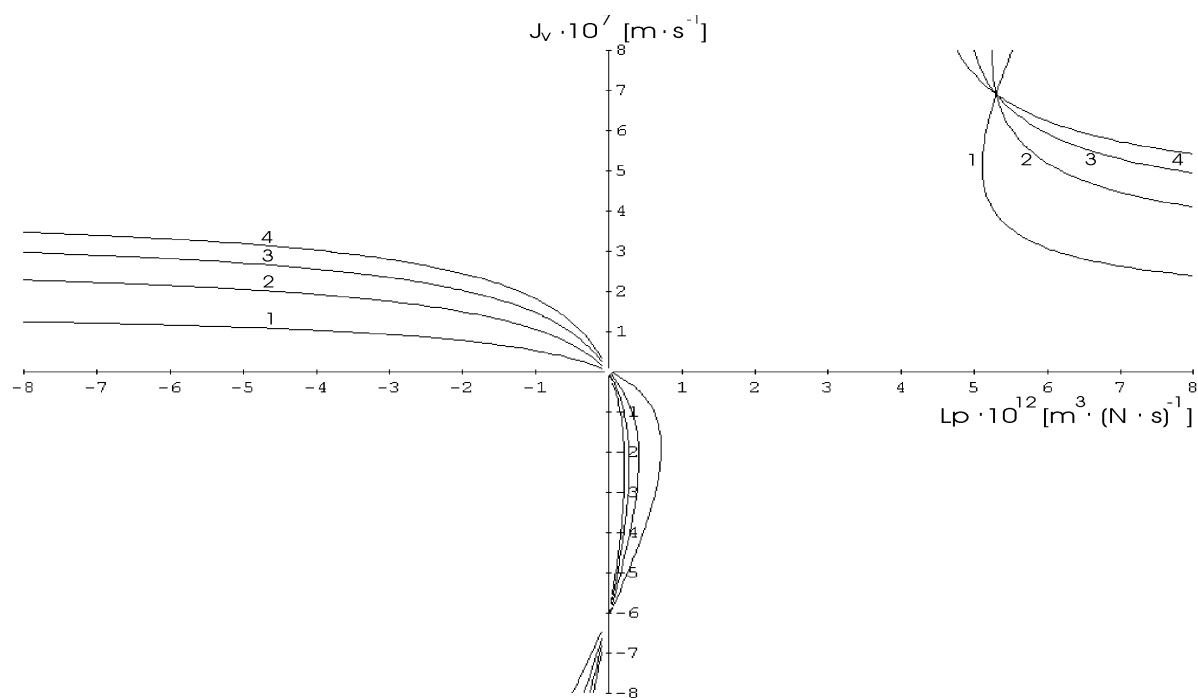
Rys.2. Zależność strumienia objętościowego  $J_v$  od współczynnika przepuszczalności hydraulicznej  $L_p$ , tj. zależność  $J_v = f(L_p)_{\sigma, \Delta C}$  dla  $\sigma_l = \sigma_r = \sigma = 0,5$ ; i dla  $\Delta C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 5) i dla  $\Delta P = 0$ .

Fig.2. Dependence of volume flow  $J_v$  on hydraulic permeability coefficient  $L_p$ , i.e. dependence  $J_v = f(L_p)_{\sigma, \Delta C}$  for  $\sigma_l = \sigma_r = \sigma = 0,5$ ; and for  $\Delta C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 5) and for  $\Delta P = 0$ .



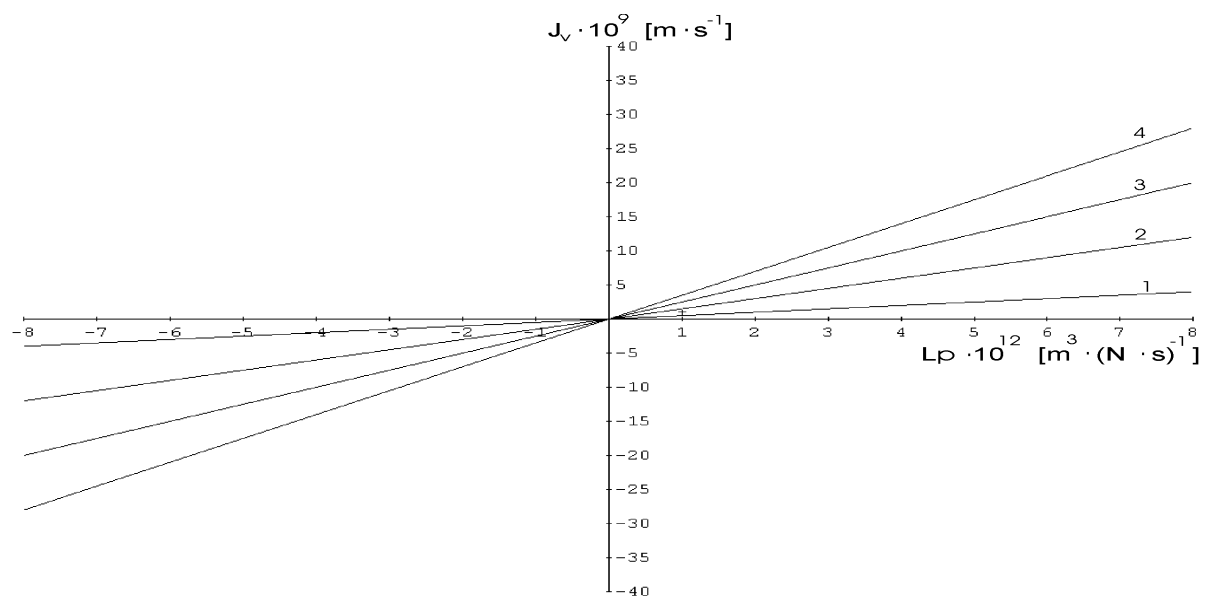
Rys.3a. Zależność strumienia objętościowego  $J_v$  od współczynnika przepuszczalności hydraulicznej  $L_p$  tj. zależność  $J_v = f(L_p)_{C_1, C_r}$  dla  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_1 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 5) i dla  $\Delta P = 0$ .

Fig.3a. Dependence of volume flow  $J_v$  on hydraulic permeability coefficient  $L_p$  i.e. dependence  $J_v = f(L_p)_{C_1, C_r}$  for  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_1 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 5) and for  $\Delta P = 0$ .



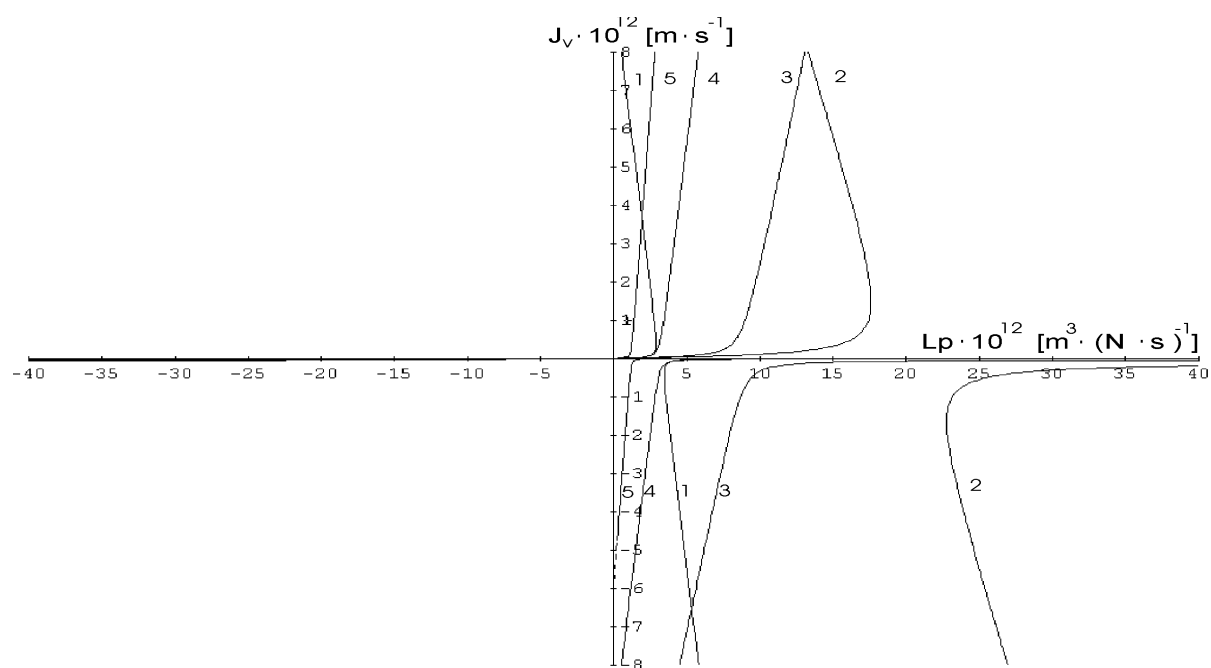
Rys.3b. Zależność strumienia objętościowego  $J_v$  od współczynnika przepuszczalności hydraulicznej  $L_p$  tj. zależność  $J_v = f(L_p)_{C_i, \omega_i, \sigma_i}$  dla  $\sigma_i = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $C_i = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
 $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  
 $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4) i dla  $\Delta P = 0$ .

Fig.3b Dependence of volume flow  $J_v$  on hydraulic permeability coefficient  $L_p$ , i.e. dependence  $J_v = f(L_p)_{C_i, \omega_i, \sigma_i}$  for  $\sigma_i = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $C_i = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
 $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  
 $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4) and for  $\Delta P = 0$ .



Rys.4. Zależność  $J_v = f(L_p)_{\Delta P}$  dla  $\Delta\sigma = 0$  i dla  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (prosta 1);  $3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (prosta 2);  $5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (prosta 3);  $7 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (prosta 4).

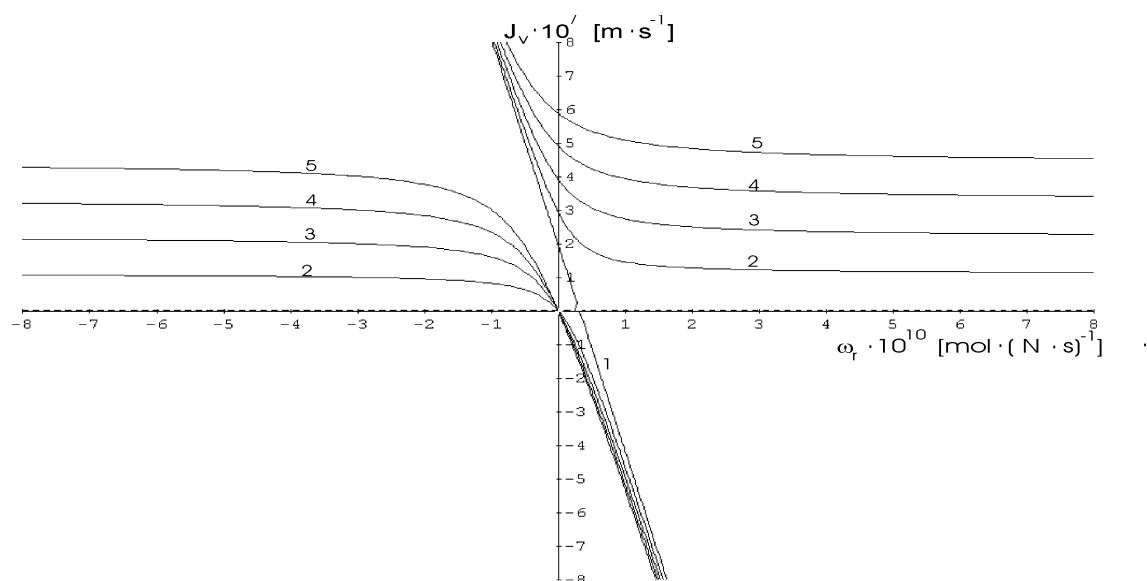
Fig.4. Dependence  $J_v = f(L_p)_{\Delta P}$  for  $\Delta\sigma = 0$  and for  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (line 1);  $3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (line 2);  $5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (line 3);  $7 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  (line 4).



Rys.5. Zależność  $J_v = f(Lp)_{\Delta\sigma, \Delta P, C}$   $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $C_1 = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5$  (hiperbola 1);  $-0,2$  (hiperbola 2);  $0,3$  (hiperbola 3);  $0,5$  (hiperbola 4);  $0,8$  (hiperbola 5).

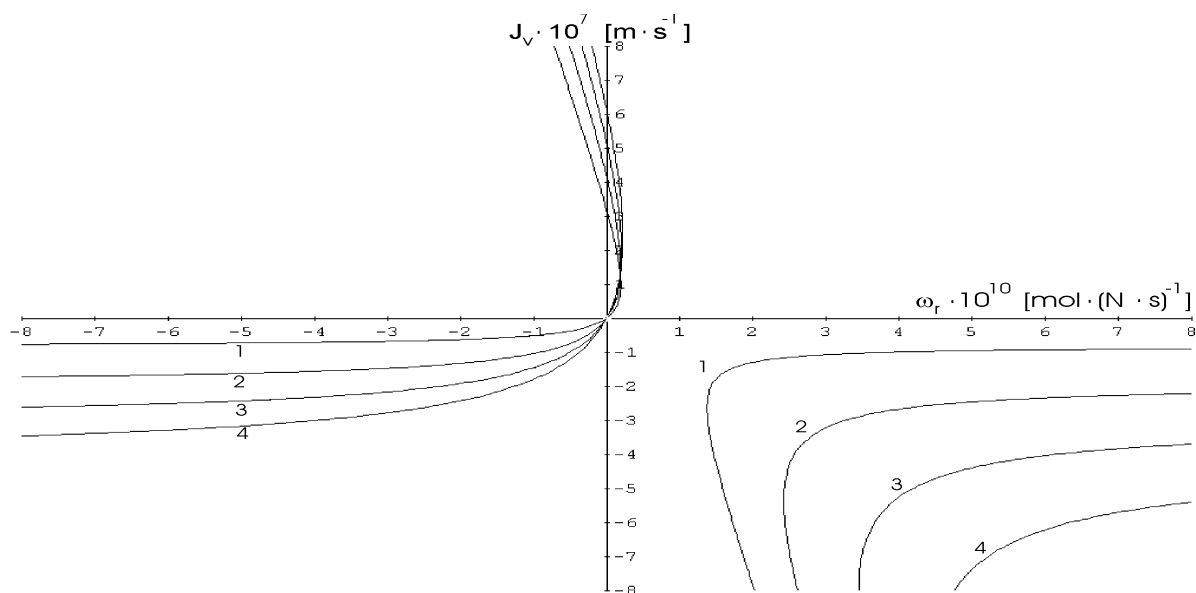
Fig.5. Dependence  $J_v = f(Lp)_{\Delta\sigma, \Delta P, C}$  for  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $C_1 = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0$ , (hyperbola 1);  $-0,2$  (hyperbola 2);  $0,3$  (hyperbola 3);  $0,5$  (hyperbola 4);  $0,8$  (hyperbola 5).





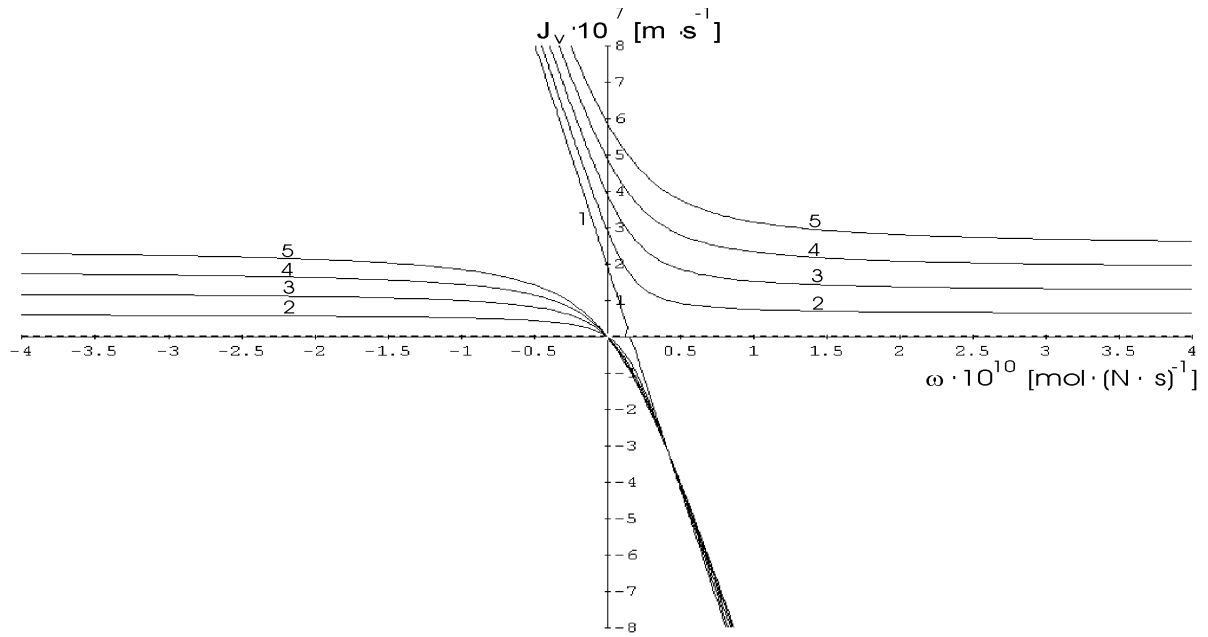
Rys.6a. Zależność  $J_v = f(\omega_r)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 5).

Fig.6a. Dependence  $J_v = f(\omega_r)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 5).



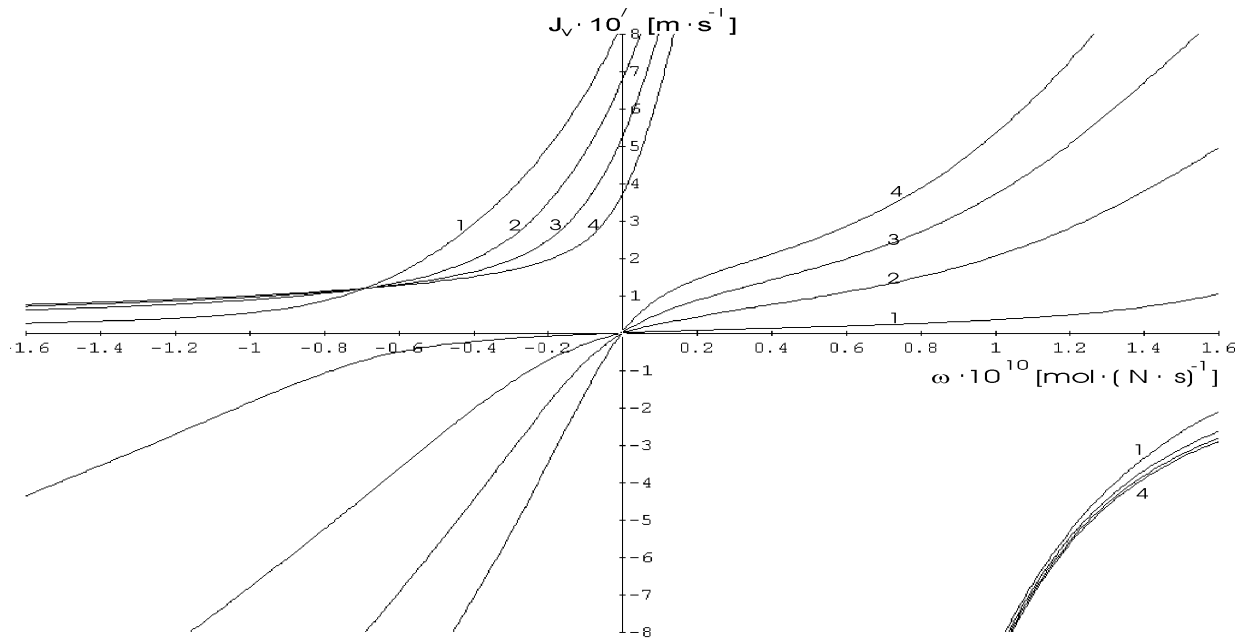
Rys.6b. Zależność  $J_v = f(\omega_r)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_1 = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4).

Fig.6b. Dependence  $J_v = f(\omega_r)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\sigma_1 = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_1 = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4).



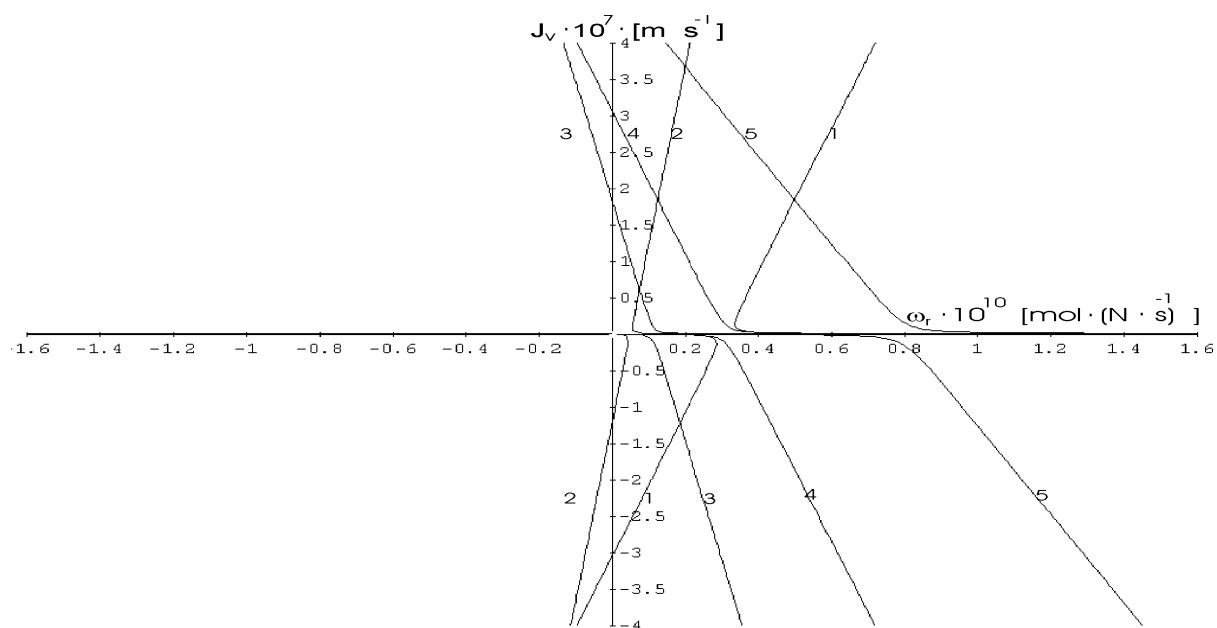
Rys.7a. Zależność  $J_v = f(\omega)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\sigma_l = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (prosta 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 5).

Fig.7a. Dependence  $J_v = f(\omega)_{C_i, \sigma_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\sigma_l = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (line 1);  $0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 5).



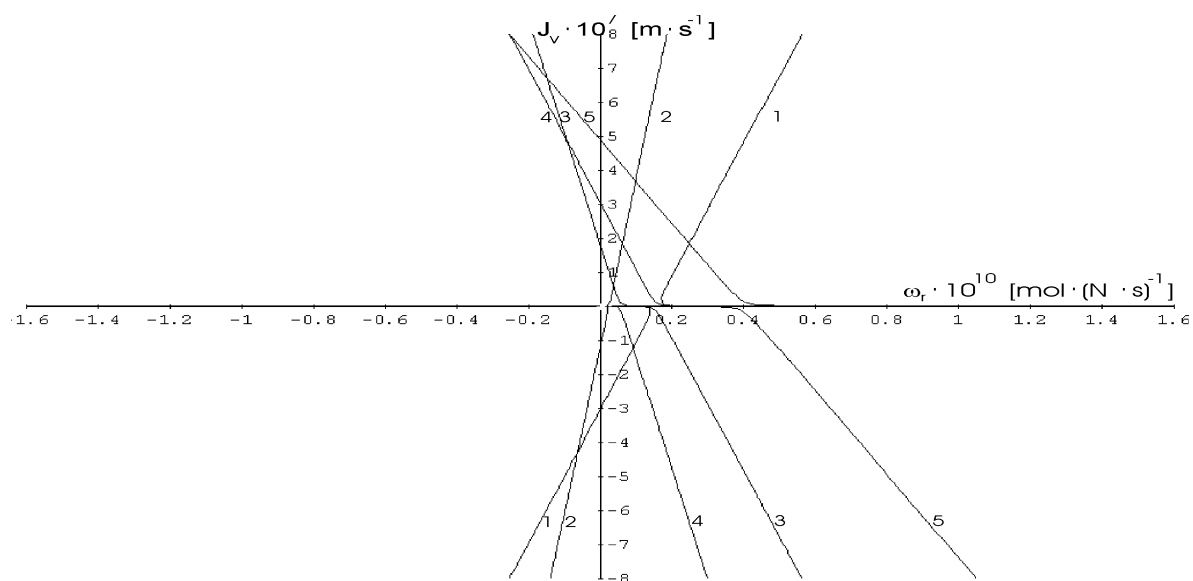
Rys.7b. Zależność  $J_v = f(\omega)_{C_i, \sigma_i}$ , ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\sigma_l = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hiperbola 4).

Fig.7b. Dependence  $J_v = f(\omega)_{C_i, \sigma_i}$ , ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\sigma_l = 0,9$ ;  $\sigma_r = 0,1$ ;  $\Delta P = 0$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 1);  $0,3 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 2);  $0,4 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (hyperbola 4).



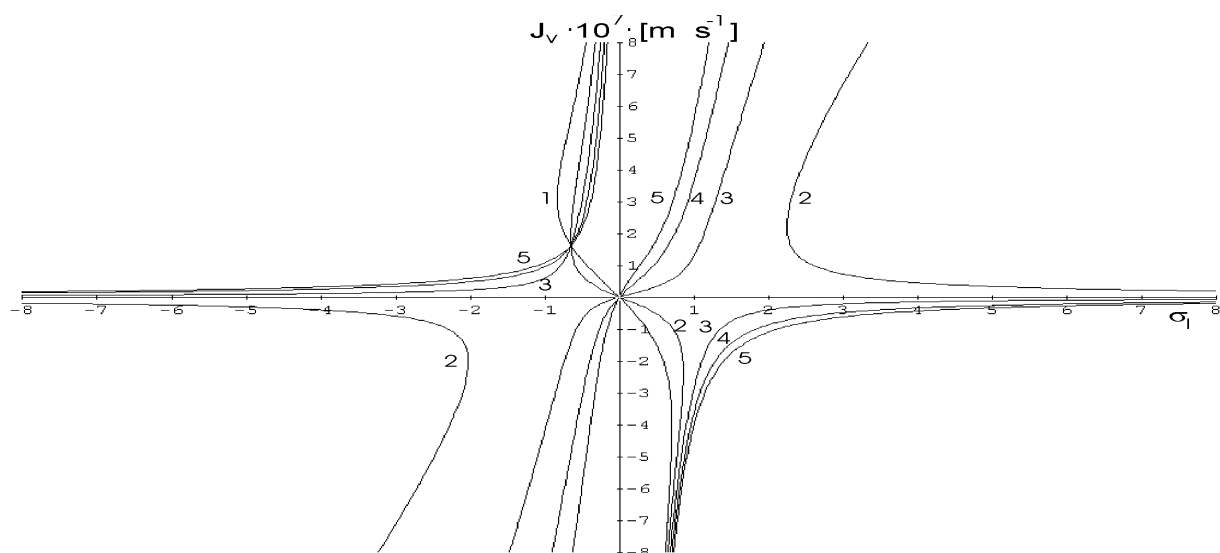
Rys.8a. Zależność  $J_v = f(\omega_r)_{C, \Delta\sigma, \Delta P}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  
 $C_l = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5$  (hiperbola 1);  $-0,2$  (hiperbola 2);  $0,3$  (hiperbola 3);  
 $0,5$  (hiperbola 4);  $0,8$  (hiperbola 5).

Fig.8a. Dependence  $J_v = f(\omega_r)_{C, \Delta\sigma, \Delta P}$  for the following values:  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  
 $C_l = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5$  (hyperbola 1);  $-0,2$  (hyperbola 2);  $0,3$  (hyperbola 3);  
 $0,5$  (hyperbola 4);  $0,8$  (hyperbola 5).



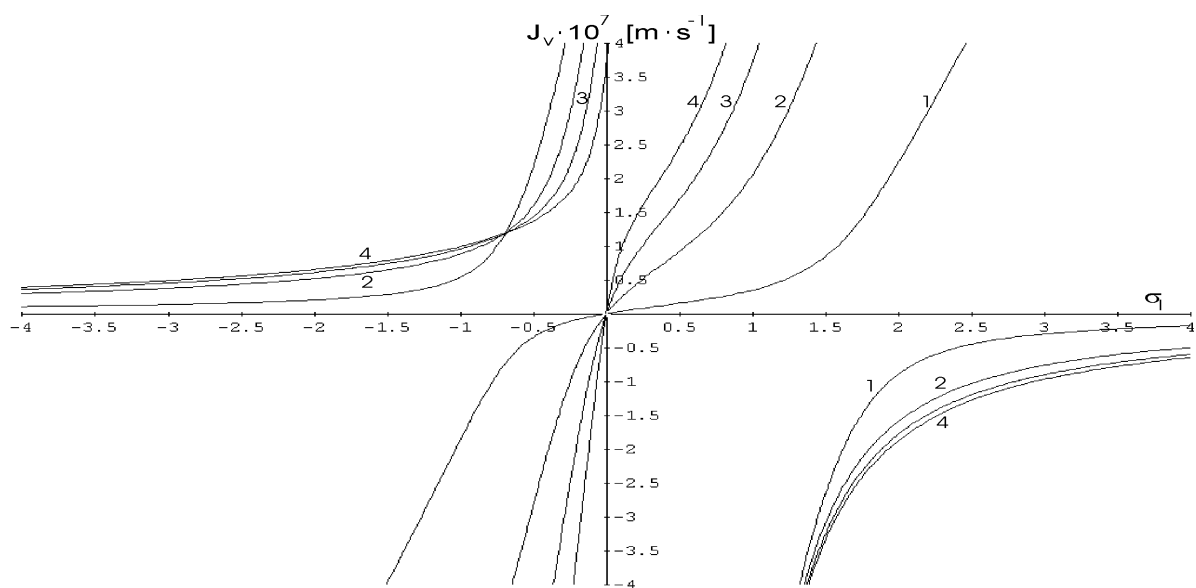
Rys.8b. Zależność  $J_v = f(\omega_r)_{C, \Delta\sigma, \Delta P}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  
 $C_l = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5$  (hiperbola 1);  $-0,2$  (hiperbola 2);  $0,3$  (hiperbola 3);  
 $0,5$  (hiperbola 4);  $0,8$  (hiperbola 5).

Fig.8b. Dependence  $J_v = f(\omega_r)_{C, \Delta\sigma, \Delta P}$  for the following values:  $\Delta P = 1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  
 $C_l = C_r = C = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $\Delta\sigma = -0,5$  (hyperbola 1);  $-0,2$  (hyperbola 2);  $0,3$  (hyperbola 3);  
 $0,5$  (hyperbola 4);  $0,8$  (hyperbola 5).



Rys. 9a. Zależność  $J_v = f(\sigma_1)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  ;  $\sigma_r = 0,2$  ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  ;  $C_1 = 0 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(krzywa 2);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 5).

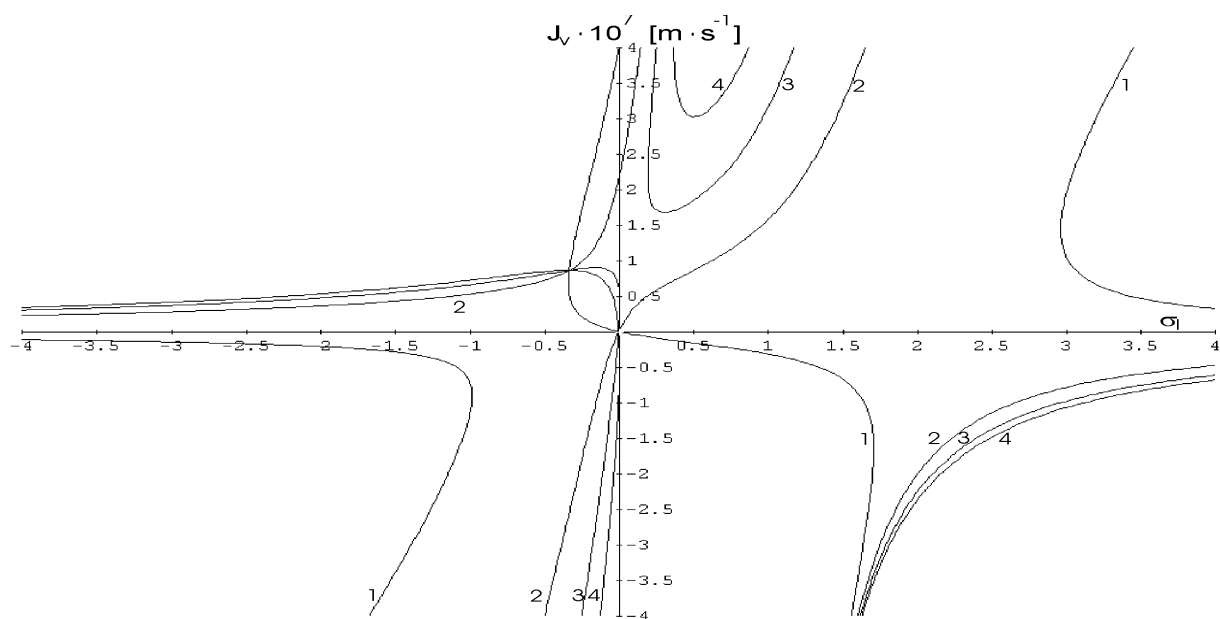
Fig. 9a. Dependence  $J_v = f(\sigma_1)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  ;  $\sigma_r = 0,2$  ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  ;  $C_1 = 0 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(curve 2);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 5).



Rys.9b. Zależność  $J_v = f(\sigma_i)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  ;  $\sigma_r = 0,5$  ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(krzywa 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4).

Fig.9b. Dependence  $J_v = f(\sigma_i)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  ;  $\sigma_r = 0,5$  ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(curve 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4).



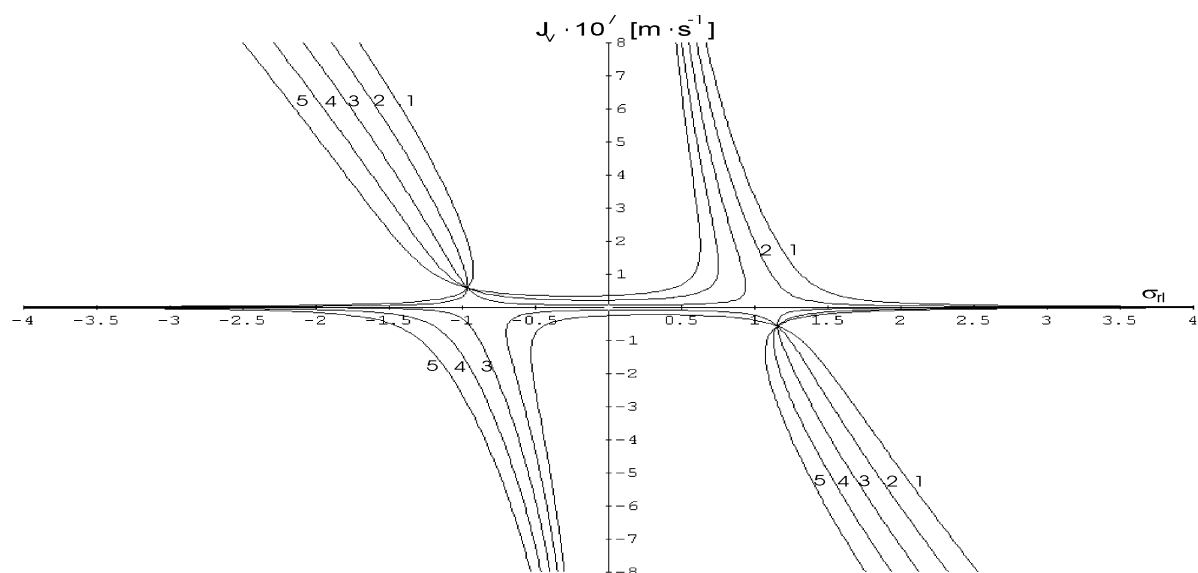


Rys.9c. Zależność  $J_v = f(\sigma_l)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = l, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;

$\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_r = 0,8$ ;  $C_r = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4).

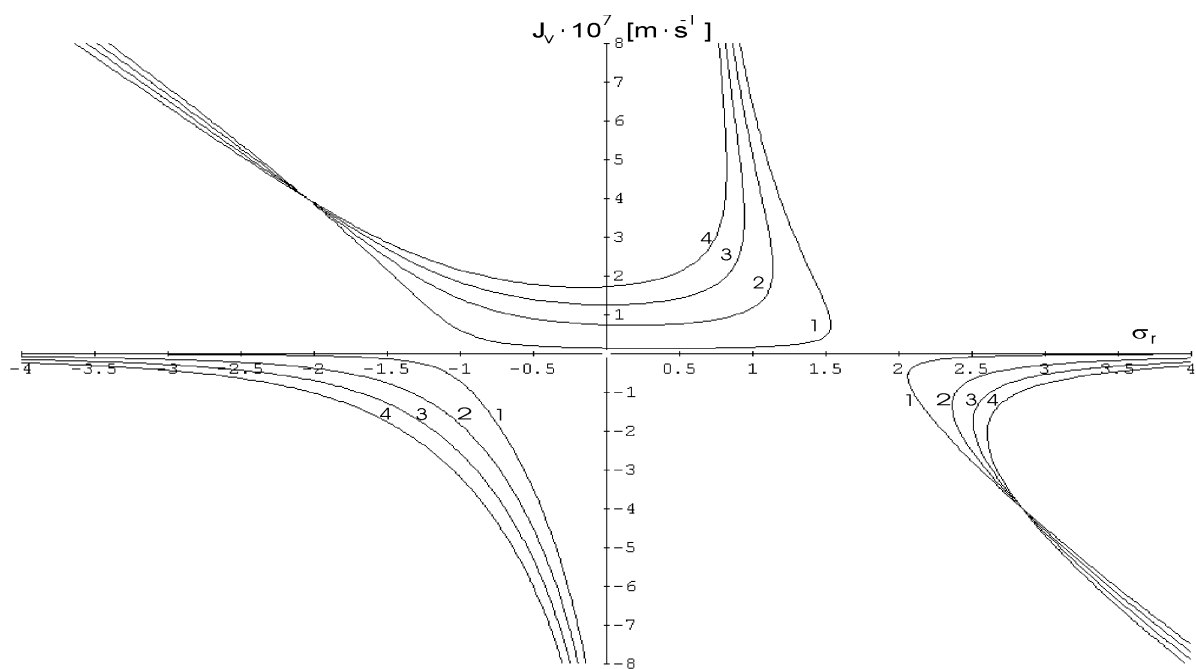
Fig.9c. Dependence  $J_v = f(\sigma_l)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = l, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$ ;

$\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_r = 0,8$ ;  $C_r = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4).



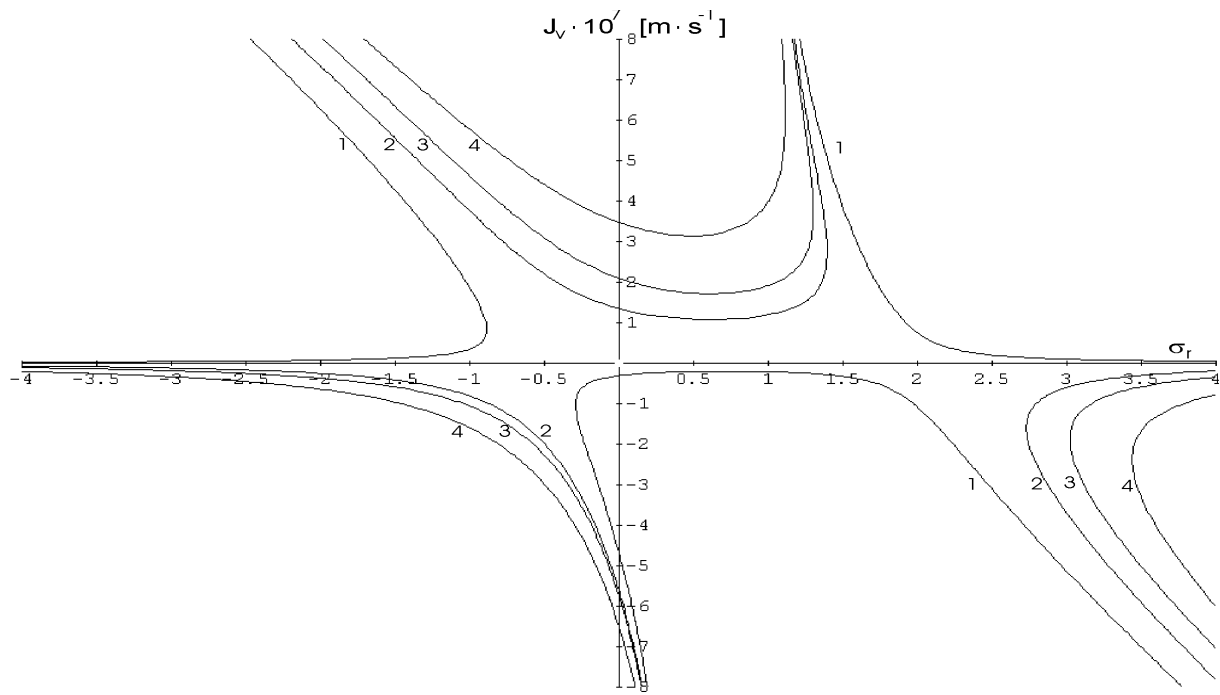
Rys.10a. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_l, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_l = 0,1$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(krzywa 2);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 5).

Fig.10a. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_l, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$ ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_l = 0,1$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   
(curve 2);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 5).



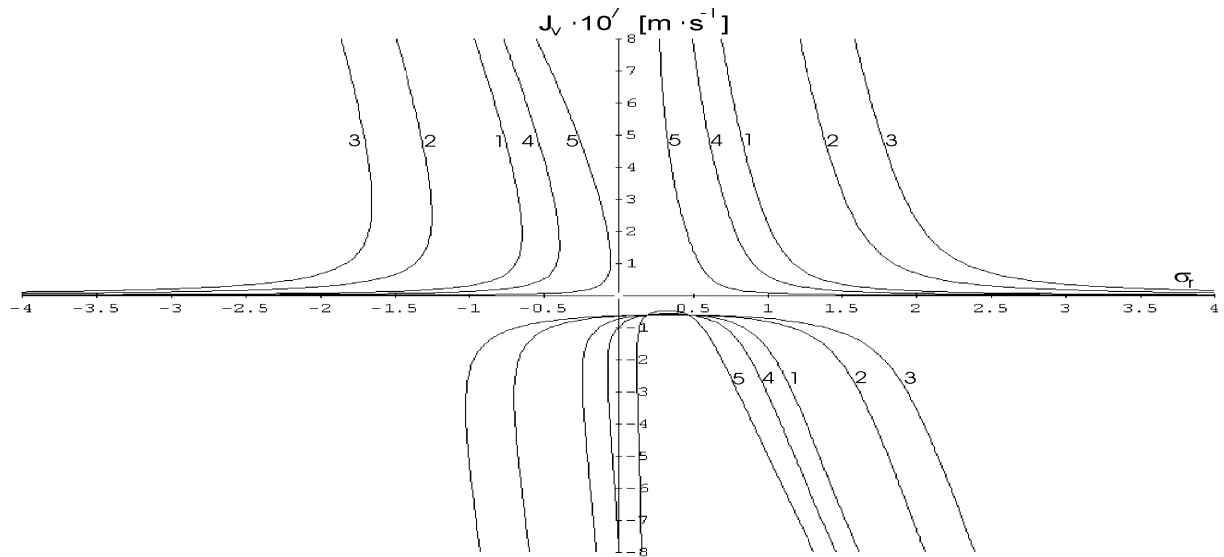
Rys.10b. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_1 = 0,4$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4).

Fig.10b. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_r, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$  ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_1 = 0,4$ ;  $C_r = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4).



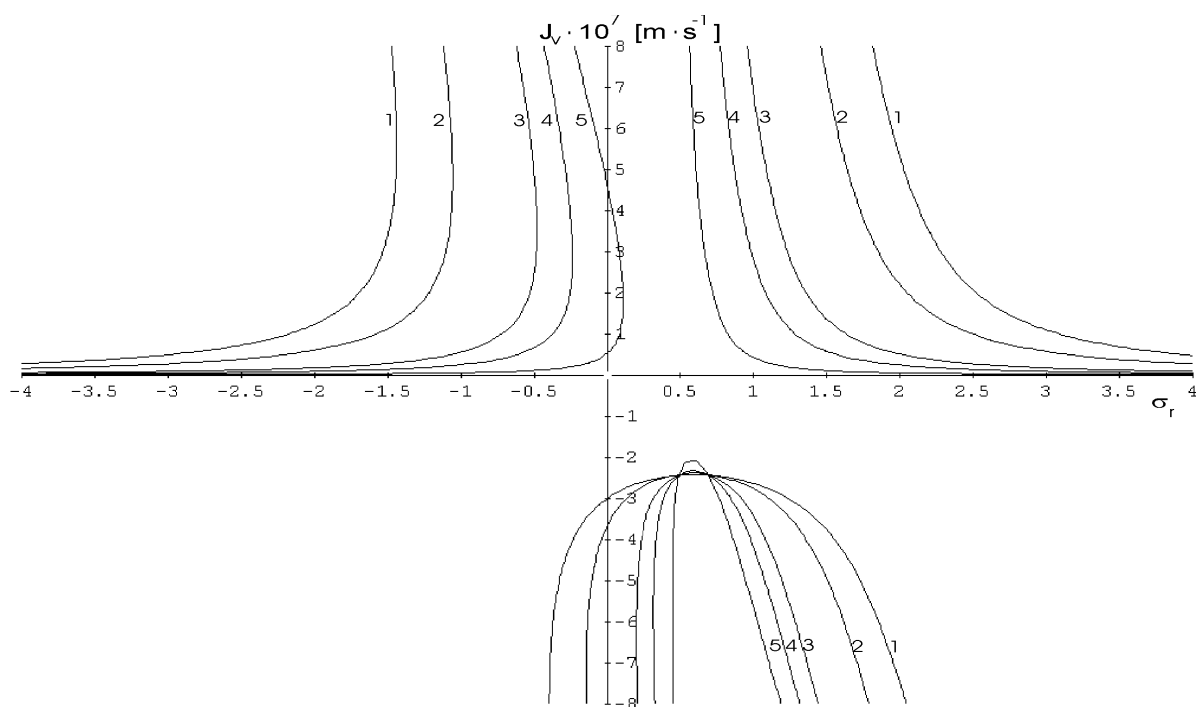
Rys.10c. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_1, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_1 = 0,7$ ;  $C_r = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4).

Fig.10c. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\sigma_1, \omega_r, C_i}$  ( $i = 1, r$ ) for the following values:  $\Delta P = 0$ ;  
 $\omega_r = 10^{-10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $\sigma_1 = 0,7$ ;  $C_r = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4).



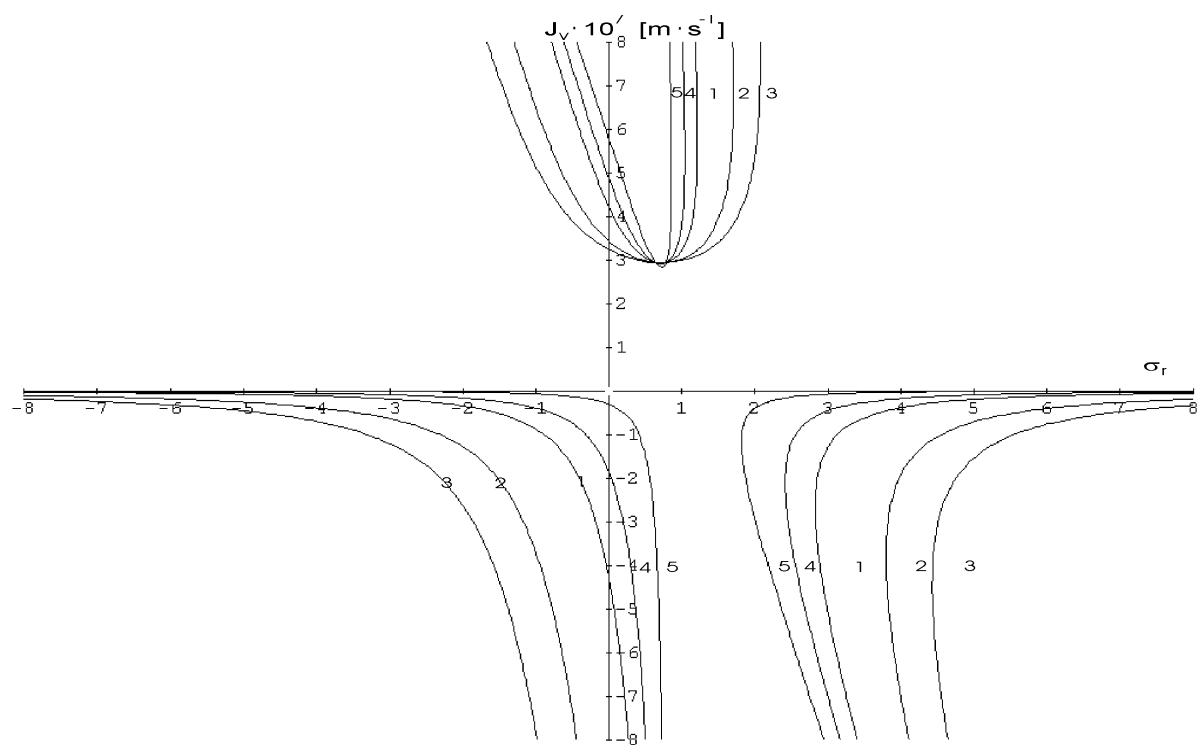
Rys.11a. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r, \sigma_l, C_i}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_l = 0,2$ ;  $C_r = 0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 5).

Fig.11a. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r, \sigma_l, C_i}$  for the following values:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_l = 0,2$ ;  $C_r = 0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 5).



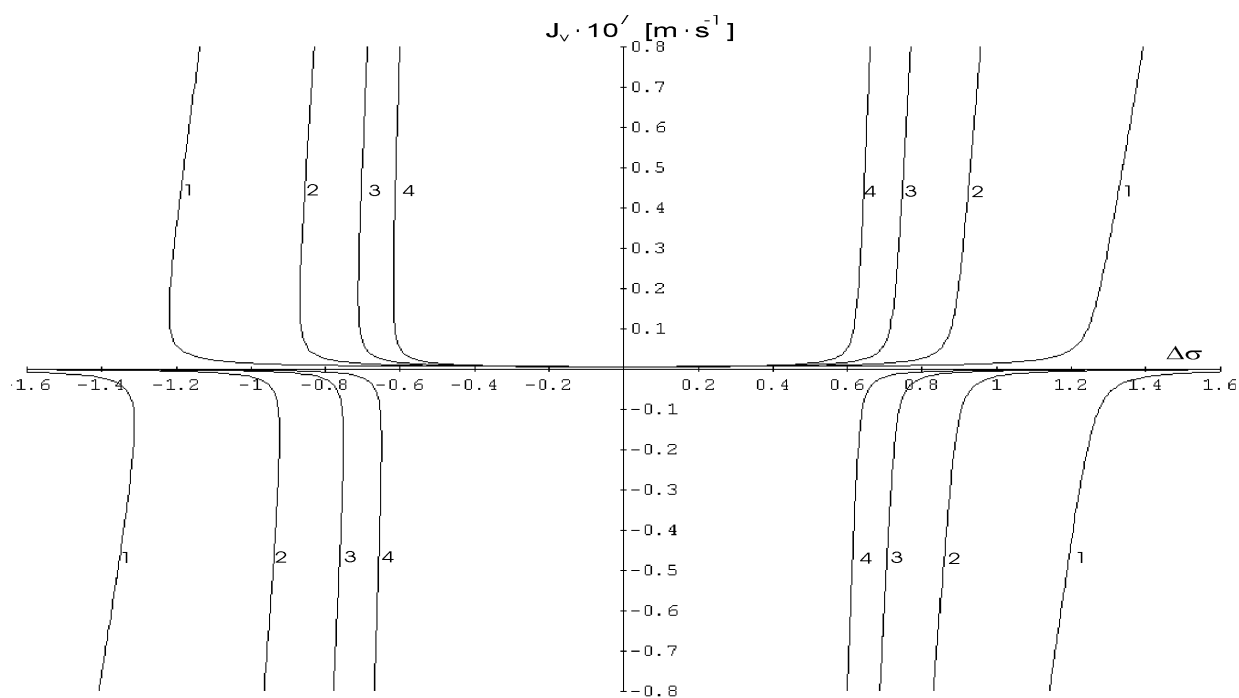
Rys.11b. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r, \sigma_1, C_i}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_1 = 0,5$ ;  $C_r = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 5).

Rys.11b. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r, \sigma_1, C_i}$  for the following values:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_1 = 0,5$ ;  $C_r = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 5).



Rys.11c. Zależność  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_1 = 0,8$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (krzywa 5).

Fig.11c. Dependence  $J_v = f(\sigma_r)_{\omega_r}$  for the following values:  $\Delta P = 0$ ;  $\sigma_1 = 0,8$ ;  $C_r = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ ;  $C_l = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$   $\omega_r \cdot 10^{10} = 1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 1);  $3 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 2);  $5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 4);  $0,1 \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$  (curve 5).



Rys.12. Zależność  $J_v = f(\Delta\sigma)_{C, \omega_r, \Delta P}$  dla następujących wartości:  $\Delta P = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\omega_r = 1 \cdot 10^{10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $C_l = C_r = C = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (krzywa 4).

Fig.12. Dependence  $J_v = f(\Delta\sigma)_{C, \omega_r, \Delta P}$  for the following values:  $\Delta P = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $\omega_r = 1 \cdot 10^{10} \text{ mol} \cdot (\text{N} \cdot \text{s})^{-1}$ ;  $C_l = C_r = C = 0,125 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 1);  $0,25 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 2);  $0,375 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 3);  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$  (curve 4).