

KORNELIA M. BATKO<sup>1, A-E</sup>, IZABELLA ŚLĘZAK-PROCHAZKA<sup>2, A-E</sup>, ANDRZEJ ŚLĘZAK<sup>3, A-F</sup>

## Sieciowa postać równań Kedem-Katchalsky'ego dla ternarnych roztworów nieelektrolitów.

### 4. Ocena współczynników Peusnera $W_{ij}$ membrany polimerowej

#### Network Form of the Kedem-Katchalsky Equations for Ternary Non-Electrolyte Solutions.

#### 4. Evaluation of $W_{ij}$ Peusner's Coefficients for Polymeric Membrane

<sup>1</sup> Katedra Informatyki Ekonomicznej, Uniwersytet Ekonomiczny, Katowice, Polska

<sup>2</sup> Instytut Marketingu, Politechnika Częstochowska, Częstochowa, Polska

<sup>3</sup> Katedra Zdrowia Publicznego, Politechnika Częstochowska, Częstochowa, Polska

A – koncepcja i projekt badania; B – gromadzenie i/lub zestawianie danych; C – analiza i interpretacja danych; D – napisanie artykułu; E – krytyczne zrecenzowanie artykułu; F – zatwierdzenie ostatecznej wersji artykułu

#### Streszczenie

**Wprowadzenie.** Metody termodynamiki sieciowej Peusnera (PNT) umożliwiają symetryczną i/lub hybrydową transformację równań Kedem-Katchalsky'ego (K-K) do postaci sieciowej. Dla ternarnych roztworów nieelektrolitów można otrzymać dwie symetryczne i sześć hybrydowych postaci sieciowych równań K-K zawierających symetryczne ( $R_{ij}$  lub  $L_{ij}$ ) lub hybrydowe ( $H_{ij}$ ,  $W_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $S_{ij}$  lub  $P_{ij}$ ) współczynniki Peusnera.

**Cel pracy.** Przedstawienie sieciowej postaci równań K-K dla jednorodnych ternarnych roztworów nieelektrolitów zawierającej współczynniki Peusnera  $W_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), obliczenie zależności współczynników  $W_{ij}$  od średniego stężenia jednego składnika roztworu w membranie ( $\bar{C}_1$ ) przy ustalonej wartości drugiego ( $\bar{C}_2$ ) oraz porównanie tych zależności z odpowiednimi zależnościami dla współczynników  $H_{ij}$ ,  $L_{ij}$  i  $R_{ij}$  przedstawionymi w 1, 2 i 3 części pracy.

**Materiał i metody.** Materiałem badawczym była membrana do hemodializy Nephrophan o znanych parametrach transportowych dla wodnych roztworów glukozy i etanolu, a metodą badawczą formalizm PNT oraz równania K-K dla ternarnych roztworów nieelektrolitów.

**Wyniki.** Przedstawiono sieciową postać równań K-K dla roztworów nieelektrolitów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych. Obliczono zależności współczynników Peusnera  $W_{ij}$  oraz ilorazów współczynników  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  i  $W_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) dla warunków jednorodności roztworów od średniego stężenia jednego składnika roztworu w membranie ( $\bar{C}_1$ ) przy ustalonej wartości drugiego ( $\bar{C}_2$ ). Obliczenia wykonano, korzystając z wyznaczonych doświadczalnie współczynników: odbicia ( $\sigma$ ), przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ) i solutu ( $\omega$ ).

**Wnioski.** Sieciowa postać równań K-K zawierająca współczynniki Peusnera  $W_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) jest kolejnym narzędziem, które można wykorzystać do badania transportu membranowego. Wykazano, że większość współczynników  $W_{ij}$  i ilorazów  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  i  $W_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) jest czuła na stężenie i skład roztworów rozdzielanych przez membranę polimerową (Polim. Med. 2013, 43, 4, 241–256).

**Słowa kluczowe:** transport membranowy, termodynamika sieciowa Peusnera, współczynniki Peusnera, równania Kedem-Katchalsky'ego, roztwory ternarne.

## Abstract

**Background.** Peusner Network Thermodynamics (PNT) enables symmetrical and/or hybrid transformation of classical Kedem-Katchalsky (K-K) equations to network forms. For homogenous nonelectrolyte solutions, two symmetrical and six hybrid forms of network K-K equations can be obtained that contain symmetrical ( $R_{ij}$  or  $L_{ij}$ ) or hybrid ( $H_{ij}$ ,  $W_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $S_{ij}$  or  $P_{ij}$ ) Peusner's coefficients.

**Objectives.** The aim of this paper is to present network form of K-K equations for homogenous ternary nonelectrolyte solutions that contains Peusner's coefficients  $W_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ). We also aim to calculate dependences of  $W_{ij}$  coefficients on average concentration of one component of solution in a membrane ( $\bar{C}_1$ ) when value of the second one ( $\bar{C}_2$ ) is fixed and to compare these dependences with appropriate dependences for coefficients  $H_{ij}$ ,  $L_{ij}$  and  $R_{ij}$  presented in 1–3 parts of the paper.

**Materials and Methods.** We used a cellulose hemodialysis membrane (Nephrophan) of known transport parameters for aqueous glucose and ethanol solutions as a research material. The PNT formalism and classical form of K-K equations for ternary non-electrolyte solutions was a research tool in this paper.

**Results.** The network form of K-K equations was presented for ternary solutions that contain solvent and two dissolved substances. For homogenous solutions, we calculated dependences of Peusner's coefficients  $W_{ij}$  and quotients  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  and  $W_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) on average concentration of one component ( $\bar{C}_1$ ) of the solution in a membrane when value of the second one is fixed ( $\bar{C}_2$ ). Calculations were made using experimentally determined coefficients of reflection ( $\sigma$ ), hydraulic permeability ( $L_p$ ) and solute permeability ( $\omega$ ).

**Conclusions.** The network form of K-K equations that contain Peusner's coefficients  $W_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) is a novel tool to study membrane transport. We showed that majority of the coefficients  $W_{ij}$  and quotients  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  and  $W_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) is sensitive for composition and concentration of solutions separated by a polymer membrane (**Polim. Med.** 2013, 43, 4, 241–256).

**Key words:** membrane transport, Peusner's network thermodynamics, Peusner's coefficients, Kedem-Katchalsky equations, ternary solution.

Polimery, biopolimery i tworzywa sztuczne są ważnymi desygnatami kształtującymi współczesną cywilizację i stanowią bazę dla różnych obszarów działalności człowieka zarówno o charakterze poznawczym, jak i utylitarnym [1]. Medycyna i leczenie są jednymi z najważniejszych obszarów działań społeczności ludzkiej o charakterze usługowym, wykorzystującymi produkty polimerowe pochodzące ze sfer gospodarczych o charakterze wytwórczym. Zalicza się do nich środki opatrunkowe, kleje medyczne, opakowania leków, sprzęt medyczny, materiały inteligentne (np. zachowujące kształt), protezy (implanty) i części narzędzi, środki krwiozastępcze, systemy z kontrolowanym uwalnianiem leków czy leki na nośnikach polimerowych [2–5].

Jednym z ważniejszych kierunków badań polimerów medycznych jest eliminacja substancji toksycznych z organizmu człowieka za pomocą hemoperfuzji i/lub hemodializy [3]. Hemoperfuzja polega na usuwaniu szkodliwych toksyn z krwi pacjenta i ich absorpcji w odpowiednich złożach polimerowych (np. agarozę z mikrosferami poliakroleinowymi) [1–3]. Z kolei hemodializa polega na dyfuzyjnym usuwaniu szkodliwych substancji z krwi pacjenta za pomocą selektywnych membran polimerowych o silnie rozwiniętej powierzchni (zwoje membranowe, wiązki porowatych włókien kapilarnych) [1, 3]. Pory w membranie mają średnicę 2–5 nm i stanowią barierę jedynie dla elementów morfotycznych krwi i cząsteczek białek, których średnica znacznie przekracza średnicę porów [2, 3]. Oznacza to, że membrana dla elementów morfotycznych krwi i tych cząsteczek białek jest półprzepuszczalna. Dla pozostałych składników krwi

(mocznika, glukozy, jonów elektrolitów etc.) jest selektywnie przepuszczalna albo nieselektywna [3]. Takie właściwości mają membrany z celulozy, celofanu, octanu celulozy, poliakrylonitrylu czy poliwęglanów [1, 2]. Przykładem membrany z octanu celulozy dawniej wykorzystywanej do hemodializy jest Nephrophan.

Możliwości aplikacyjne membrany są zdeterminowane przez jej właściwości transportowe, których miarą, zgodnie z formalizmem termodynamicznym Kedem-Katchalsky'ego, są współczynniki: przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ), odbicia ( $\sigma$ ) i przepuszczalności dyfuzyjnej ( $\omega$ ) [6]. Z utylitarnego punktu widzenia najważniejszą cechą membrany jest selektywność, której miarą jest współczynnik odbicia membrany ( $\sigma$ ), który może przyjmować wartości spełniające relację  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Należy zaznaczyć, że jeśli  $\sigma = 0$ , to membrana jest nieselektywna. Warunek  $\sigma = 1$  jest spełniony dla membrany półprzepuszczalnej. Z kolei w systemach kontrolowanego uwalniania leków stosowane są membrany selektywne, tzn. takie, dla których  $0 < \sigma < 1$ . Kontrolowane uwalnianie leków polega na regulowaniu (spowalnianiu lub przyspieszaniu) za pomocą odpowiednio dobranej membrany i wielkości siły termodynamicznej generującej transport, szybkości uwalniania leku z makro- lub mikrosystemu [1, 2]. Rola tych systemów w organizmie polega na zapewnieniu niezbędnego poziomu koncentracji leku, niezbędnego profilu oraz szybkości uwalniania leku, dostosowanych do aktualnego stanu fizjologicznego organizmu wyrażanego poprzez wartość temperatury, pH czy stężenia glukozy [1]. Taki sposób aplikacji leku do organizmu przedłuża działanie i zmniejsza częstotliwość jego po-

dawania. Zatem poznanie mechanizmów molekularnych transportu membranowego jest nie do przecenienia.

Do opisu transportu membranowego najczęściej są wykorzystywane modele opracowane w ramach termodynamiki nierównowagowej [7]. W ostatnim półwieczu do analizy transportu przez membrany polimerowe stosuje się także termodynamikę sieciową (NT) [8–14]. Podstawy owej termodynamiki, w latach 70. XX w., stworzyli George Oster, Alan Perelson i Aharon Katchalsky oraz Leonardo Peusner, wykorzystując pionierską ideę Meixnera [8–11]. W ramach NT są stosowane dwa równorzędne sposoby opisu danego zjawiska: metoda grafu połączeń (*bond graph method*) opracowana przez Paytnera i wprowadzona do NT przez Ostera et al. (Oster, Perelson i Katchalsky's NT) oraz metoda Peusnera wykorzystująca symbolikę i teorię analogowych obwodów elektrycznych (Peusner's NT) [8, 10–15]. Obecnie sieci są stosowane do badania układów otwartych w biologii, ekologii czy urbanistyce [16].

Termodynamika sieciowa Peusnera (PNT) została zbudowana dzięki syntezie kilku dyscyplin naukowych, a mianowicie termodynamiki nierównowagowej, teorii obwodów elektrycznych, teorii grafów oraz geometrii różniczkowej. Można z niej wyprowadzić metody, umożliwiające badanie dynamiki nierównowagowych procesów transportu masy, ładunku, energii i informacji w układach biologicznych [10–13]. W przypadku transportu membranowego binarnych roztworów nieelektrolitów w ramach PNT wprowadzono dwie grupy współczynników Peusnera: symetryczne ( $L_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ) i hybrydowe ( $H_{ij}$ ,  $P_{ij}$ ) ( $i, j \in \{1, 2\}$ ) [10–13]. Owe współczynniki występują w sieciowych formach równań Kedem-Katchalsky'ego (K-K), które mają postać równań macierzowych [10–14, 17–19].

W poprzednich pracach autorów sieciowe postaci równań Kedem-Katchalsky'ego (K-K), zawierające współczynniki Peusnera  $L_{ij}$ ,  $R_{ij}$  lub  $H_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) otrzymane w wyniku symetrycznych ( $L_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ) lub hybrydowych ( $H_{ij}$ ) transformacji sieci termodynamicznych Peusnera, zastosowano do opisu transportu ternarnych roztworów nieelektrolitów w warunkach jednorodności roztworów [20–22]. W pracach tych rozważano przypadek dwukierunkowego dwuportu termodynamiki sieciowej Peusnera dla trzech bodźców i trzech strumieni. Ów dwuport jest rozwinieciem klasycznego dwuportu Peusnera i ma pojedyncze wejścia dla przepływu  $J_1$  i sprzężonej z nim siły  $X_1$ , przepływu  $J_2$  i sprzężonej z nim siły  $X_2$  oraz przepływu  $J_3$  i sprzężonej z nim siły  $X_3$ . Oprócz wymienionych wyżej sieciowych postaci równań K-K można otrzymać sieciowe postaci równań K-K zawierające współczynniki Peusnera  $W_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $K_{ij}$  i  $P_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ). Poprzednia i obecna praca autorów jest poświęcona kolejnej kombinacji strumieni ( $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ) i sił termodynamicznych ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ), która ma następującą postać [23]:

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = [W] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Wykorzystując powyższy schemat, w pracy Batko et al. dokonano hybrydowej transformacji równań K-K, w celu otrzymania sieciowej postaci równań K-K zawierających współczynniki  $W_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ). W pracy tej obliczono zależności współczynników Peusnera  $W_{ij} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) dla roztworów zawierających rozpuszczalnik (wodę) i dwie, oznaczone indeksami „1” i „2”, rozpuszczone w niej substancje dla membrany celulozowej. Obliczenie zależności  $W_{ij} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) wykonano dla kilku różnych, ale ustalonych wartości  $\bar{C}_2$ . W obecnej pracy zależności  $W_{ij} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) zostaną obliczone dla jednej ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  i membrany polimerowej Nephrophan i porównane z odpowiednimi zależnościami dla współczynników  $H_{ij}$ ,  $L_{ij}$  i  $R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ) przedstawionymi w poprzednich pracach autorów poprzez obliczenie ilorazów  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  i  $H_{ij}/R_{ij}$  [20–22].

## Wyprowadzenie sieciowej postaci równań K-K zawierającej współczynniki Peusnera $W_{ij}$

Analogicznie jak w poprzednich pracach autorów, zostanie rozważony stacjonarny i izotermiczny transport przez membranę polimerową w układzie, w którym membrana (M), ustawiona w płaszczyźnie pionowej, rozdziela przedziały (l) i (h) [20–23]. Owe przedziały są wypełnione jednorodnymi (mieszanymi mechanicznie) roztworami tych samych substancji o stężeniach w chwili początkowej  $C_{kh}$  i  $C_{kl}$  ( $C_{kh} > C_{kl}$ ,  $k = 1, 2$ ). Membranę cechuje izotropowość, symetria strukturalna, elektroodbojność i selektywność dla wody i rozpuszczonych w niej dwóch substancji nieelektrolitycznych. Jednorodność roztworów powoduje, że stężenie rozpuszczonych w niej substancji rozpuszczonych jest takie samo na powierzchni styku każdego z roztworów z membraną, jak i daleko od membrany. Tradycyjnie, zgodnie z formalizmem Kedem-Katchalsky'ego, właściwości transportowe membrany zostaną określone za pomocą współczynników: przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ), odbicia ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ) i przepuszczalności substancji rozpuszczonych ( $\omega_{11}$ ,  $\omega_{22}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{12}$ ) [6]. Strumień objętościowy i strumienie substancji rozpuszczonych przez membranę oznacza się, zachowując symbolikę O. Kedem i A. Katchalsky'ego, odpowiednio przez  $J_v$ ,  $J_{s1}$  i  $J_{s2}$ . Owe strumienie, dla warunków jednorodności roztworów, można opisać za pomocą równań

Kedem-Katchalsky'ego dla ternarnych roztworów nie-elektrolitów [6, 24, 25]

$$J_v = L_p(\Delta P - \sigma_1 \Delta \pi_1 - \sigma_2 \Delta \pi_2) \quad (2)$$

$$J_{s1} = \omega_{11} \Delta \pi_1 + \omega_{12} \Delta \pi_2 + J_v(1 - \sigma_1) \bar{C}_1 \quad (3)$$

$$J_{s2} = \omega_{21} \Delta \pi_1 + \omega_{22} \Delta \pi_2 + J_v(1 - \sigma_2) \bar{C}_2 \quad (4)$$

gdzie:  $J_v$  – strumień objętościowy,  $J_{s1}$  i  $J_{s2}$  – strumienie solutu substancji „1” i „2” przez membranę w warunkach jednorodności roztworów,  $L_p$  – współczynnik przepuszczalności hydraulicznej,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  – współczynniki odbicia odpowiednio substancji „1” i „2”,  $\omega_{11}$  i  $\omega_{22}$  – współczynniki przepuszczalności solutu substancji „1” i „2” generowanej przez siły z indeksami „1” i „2”

oraz  $\omega_{12}$  i  $\omega_{21}$  – współczynniki krzyżowe przepuszczalności solutu substancji „1” i „2” generowanej przez siły z indeksami „2” i „1”.  $\Delta P = P_h - P_l$  – różnica ciśnień hydrostatycznych ( $P_h$ ,  $P_l$  oznacza wyższą i niższą wartość ciśnienia hydrostatycznego).  $\Delta \pi_k = RT(C_{kh} - C_{kl})$  jest różnicą ciśnień osmotycznych ( $RT$  oznacza iloczyn stałej gazowej i temperatury termodynamicznej, natomiast  $C_h$  i  $C_l$  – stężenia roztworów,  $k = 1, 2$ ).  $\bar{C}_k = (C_{kh} - C_{kl})[\ln(C_{kh} C_{kl}^{-1})]^{-1}$  – średnie stężenie solutu w membranie.

Dodając i odejmując od prawej strony równania (2) wyrazy  $L_p \Delta \pi_1$  i  $L_p \Delta \pi_2$  i mnożąc i dzieląc odpowiednie wyrazy równań (3) i (4) przez  $\bar{C}_1$  i  $\bar{C}_2$ , można przekształcić równania (2)–(4) do postaci zgodnej z lewą stroną równania (1). W wyniku tych operacji algebraicznych otrzyma się [23]:

$$J_v = L_p(\Delta P - \Delta \pi_1 - \Delta \pi_2) - L_p \bar{C}_1(1 - \sigma_1) \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} - L_p \bar{C}_2(1 - \sigma_2) \frac{\Delta \pi_2}{\bar{C}_2} \quad (5)$$

$$J_{s1} = \bar{C}_1(1 - \sigma_1)J_v + \bar{C}_1 \omega_{11} \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} + \bar{C}_2 \omega_{12} \frac{\Delta \pi_2}{\bar{C}_2} \quad (6)$$

$$\frac{\Delta \pi_2}{\bar{C}_2} = \frac{1}{\bar{C}_2 \omega_{22}} \left( J_{s2} - \bar{C}_2(1 - \sigma_2)J_v - \bar{C}_1 \omega_{21} \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} \right) \quad (7)$$

Z kolei uwzględniając równanie (6) w równaniu (5), równania (5) i (6) w równaniu (7) oraz równanie (5) w równaniu (6) otrzyma się

$$J_v = W_{11}(\Delta P - \Delta \pi_1 - \Delta \pi_2) + W_{12} \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} + W_{13} J_{s2} \quad (8)$$

$$J_{s1} = W_{21}(\Delta P - \Delta \pi_1 - \Delta \pi_2) + W_{22} \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} + W_{23} J_{s2} \quad (9)$$

$$\frac{\Delta \pi_2}{\bar{C}_2} = W_{31}(\Delta P - \Delta \pi_1 - \Delta \pi_2) + W_{32} \frac{\Delta \pi_1}{\bar{C}_1} + W_{33} J_{s2}, \quad (10)$$

gdzie:

$$W_{11} = \frac{L_p \omega_{22}}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (11)$$

$$W_{12} = \frac{L_p \bar{C}_1[(1 - \sigma_2)\omega_{21} - (1 - \sigma_1)\omega_{22}]}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (12)$$

$$W_{13} = -\frac{L_p(1 - \sigma_2)}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} = W_{31} \quad (13)$$

$$W_{21} = \frac{L_p[\omega_{22}(1 - \sigma_1)\bar{C}_1 - \omega_{12}(1 - \sigma_2)\bar{C}_2]}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (14)$$

$$W_{22} = \frac{\bar{C}_1\{A - L_p[\omega_{11}(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2 + \omega_{22}(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1 - (\bar{C}_1 \omega_{21} + \bar{C}_2 \omega_{12})(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)]\}}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (15)$$

$$W_{23} = \frac{\omega_{12} - L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)\bar{C}_1}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (16)$$

$$W_{32} = \frac{\bar{C}_1[L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)\bar{C}_2 - \omega_{21}]}{\bar{C}_2[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]} \quad (17)$$



$$W_{33} = \frac{1}{\bar{C}_2[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]} \quad (18)$$

$$A = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}$$

Z równań (12)–(14), (16) i (17) wynika, że  $W_{12} = W_{21}$ ,  $W_{13} \neq W_{31}$  oraz  $W_{23} \neq W_{32}$ . Ponadto z równań (11)–(18)

$$\begin{bmatrix} J_v \\ J_{s1} \\ \frac{\Delta\pi_2}{\bar{C}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P - \Delta\pi_1 - \Delta\pi_2 \\ \frac{\Delta\pi_1}{\bar{C}_1} \\ J_{s2} \end{bmatrix} = [W] \begin{bmatrix} \Delta P - \Delta\pi_1 - \Delta\pi_2 \\ \frac{\Delta\pi_1}{\bar{C}_1} \\ J_{s2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

## Wyniki obliczeń i omówienie

Korzystając z procedury przedstawionej w poprzednich pracach autorów, obliczono współczynniki  $W_{ij}$  występujące w macierzy  $[W]$  dla membrany polimerowej Nephrophan i roztworów ternarnych składających się z rozpuszczalnika (wody), substancji oznaczonej indeksem „1” i substancji oznaczonej indeksem „2” [20–23]. Stężenie substancji „1” w przedziale  $h$  zmienia się w zakresie od  $C_{1h} = 1 \text{ mol m}^{-3}$  do  $C_{1h} = 1001 \text{ mol m}^{-3}$ , natomiast stężenie substancji „2” w przedziale  $h$  było stałe i wynosiło  $C_{2h} = 201 \text{ mol m}^{-3}$ . Z kolei stężenie obydwu składników znajdujących się w przedziale  $l$  było stałe i wynosiło  $C_{1l} = C_{2l} = 1 \text{ mol m}^{-3}$ . Obliczenia współczynników Peusnera  $W_{11}$ ,  $W_{12}$ ,  $W_{13}$ ,  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$ ,  $W_{31}$ ,  $W_{32}$  i  $W_{33}$  wykonano na podstawie równań (11)–(18). Do obliczeń wykorzystano stałe wartości współczynników przepuszczalności hydraulicznej ( $L_p$ ), odbicia ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ), przepuszczalności dyfuzyjnej ( $\omega_{11}$ ,  $\omega_{22}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{12}$ ) wyznaczone dla jednorodnych roztworów rozdzielanych przez membranę oraz tzw. średnie stężenia składników roztworu w membranie ( $\bar{C}_1$ ,  $\bar{C}_2$ ) [20–22, 26]. Wartość tych współczynników wynosi:  $L_p = 4,9 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$ ,  $\sigma_1 = 0,068$ ,  $\sigma_2 = 0,025$ ,  $\omega_{11} = 0,8 \times 10^{-9} \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_{12} = 0,81 \times 10^{-13} \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$  i  $\omega_{22} = 1,43 \times 10^{-9} \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$  i  $\omega_{21} = 1,63 \times 10^{-12} \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$  [20–22, 26].

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wartość współczynnika  $W_{11}$  nie zależy od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  i wynosi  $W_{11} = 5,59 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Niezależne od  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ , są także współczynniki  $W_{13} = W_{31}$  i  $W_{33}$ . Ich wartości są równe  $W_{13} = W_{31} = -0,78 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{mol}^{-1}$  i  $W_{33} = 0,21 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{N s mol}^{-2}$ . Z kolei wartości współczynników  $W_{12}$ ,  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$  i  $W_{32}$  są zależne od  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ , o czym świadczą wykresy przedstawione na ryc. 1–3.

Przedstawione na ryc. 1 charakterystyki (wykres 1)  $W_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  i  $W_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (wykres 2) obliczone odpowiednio na podstawie równań (14) i (12)

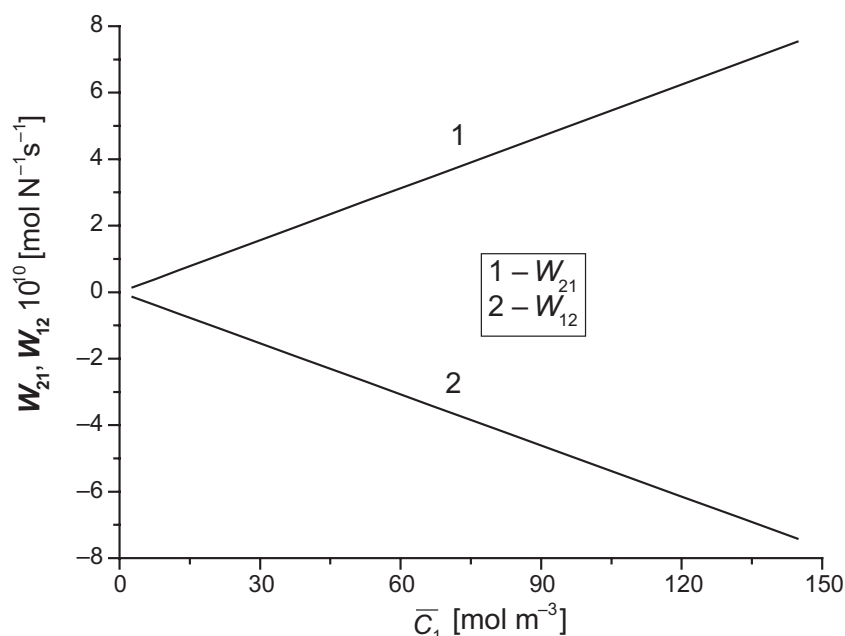
wynika, że jedynie współczynniki  $W_{12}$ ,  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$  i  $W_{32}$ , występujące w równaniu (19) są zależne od stężenia roztworów. Układ równań (8)–(16), stanowiący sieciową postać równań Kedem-Katchalsky'ego zawierających współczynniki Peusnera  $W_{ij}$ , opisujących transport ternarnych roztworów nieelektrolitów w warunkach ich jednorodności, można też zapisać w postaci równania macierzowego [23]:

są liniowe, rosną i pokazują, że wartości współczynnika  $W_{21}$  są dodatnie i rosną, a wartości współczynnika  $W_{12}$  są ujemne i maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Zamieszczona na ryc. 2 krzywa ilustrująca charakterystykę  $W_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  obliczoną na podstawie równania (15) jest parabolą i pokazuje, że wartości współczynnika  $W_{22}$  początkowo rosną, a po uzyskaniu wartości maksymalnej, dla  $\bar{C}_1 \approx 87 \text{ mol m}^{-3}$ , maleją wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Dla  $\bar{C}_1 \geq 165 \text{ mol m}^{-3}$  wartość współczynnika  $W_{22}$  zmienia znak z dodatniego na ujemny. Z przedstawionej na ryc. 3 charakterystyki  $W_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (wykres 1) obliczonej na podstawie wyrażenia (17) wynika, że wartości współczynnika  $W_{32}$  są dodatnie i rosną liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Prosta 2 ilustrująca charakterystykę  $W_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  obliczoną na podstawie wyrażenia (16) i zamieszczona na tej samej rycinie pokazuje, że wartości współczynnika  $W_{23}$  są dodatnie i maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ .

Porównamy teraz wartości współczynników  $W_{ij}$  z wartościami współczynników  $H_{ij}$ ,  $L_{ij}$  i  $R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), obliczając ilorazy  $W_{ij}/H_{ij}$ ,  $W_{ij}/L_{ij}$  i  $H_{ij}/R_{ij}$ . Wyrażenia opisujące współczynniki  $H_{ij}$  ( $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{13}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{31}$ ,  $H_{32}$  i  $H_{33}$ ),  $L_{ij}$  ( $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{13}$ ,  $L_{21}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{23}$ ,  $L_{31}$ ,  $L_{32}$  i  $L_{33}$ ) oraz  $R_{ij}$  ( $R_{11}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{21}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ ,  $R_{32}$  i  $R_{33}$ ) przedstawiono w poprzednich pracach autorów pracy [20–22]. Z kolei współczynniki  $W_{11}$ ,  $W_{12}$ ,  $W_{13}$ ,  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$ ,  $W_{31}$ ,  $W_{32}$  i  $W_{33}$  są opisane przez wyrażenia (11)–(18). Wykonując odpowiednie przekształcenia algebraiczne, można pokazać, że ilorazy  $H_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), w których współczynniki  $H_{ij}$  i  $R_{ij}$  mają takie same wskaźniki, przyjmują następującą postać:

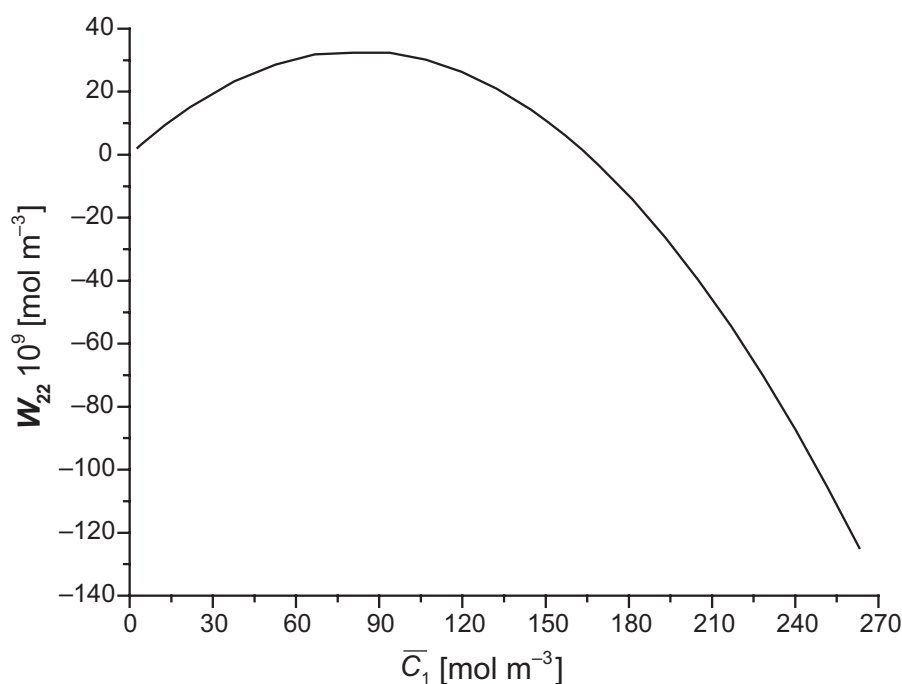
$$\frac{W_{11}}{H_{11}} = \frac{L_p^2 \omega_{22}}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (20)$$

$$\frac{W_{12}}{H_{12}} = -\frac{L_p \bar{C}_1 [(1 - \sigma_2)\omega_{21} - (1 - \sigma_1)\omega_{22}]}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2](1 - \sigma_1)} \quad (21)$$



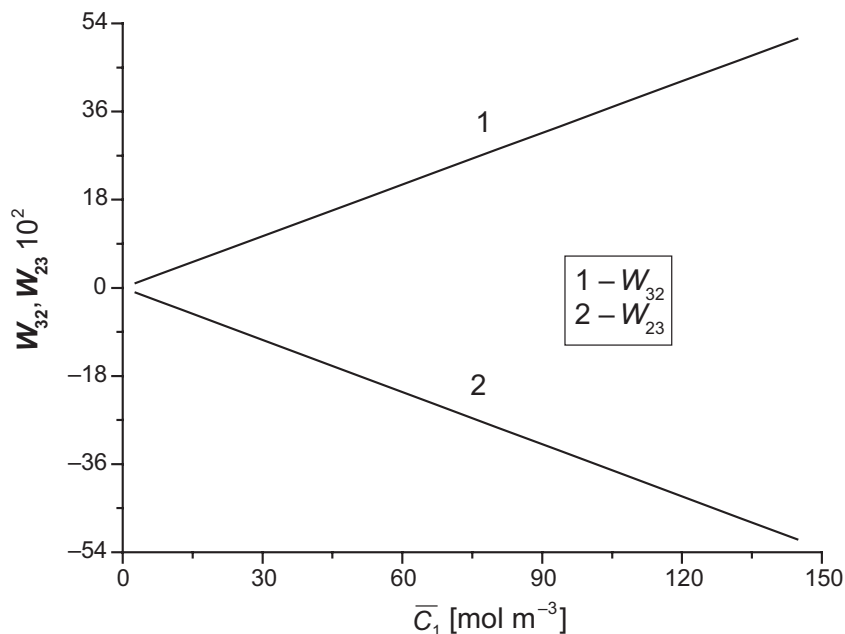
**Ryc. 1.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (prosta 1) i  $W_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (prosta 2) dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości współczynnika  $W_{21}$  obliczono na podstawie równania (14), a współczynnika  $W_{12}$  – na podstawie równania (12)

**Fig. 1.** Graphic illustration of dependencies  $W_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (line 1) and  $W_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (line 2) for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of the coefficient  $W_{21}$  were calculated on the basis of equation (14), and the coefficient  $W_{12}$  – on the basis of equation (12)



**Ryc. 2.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości współczynnika  $W_{21}$  obliczono na podstawie równania (15)

**Fig. 2.** Graphic illustration of dependence  $W_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of the coefficient  $W_{21}$  were calculated on the basis of equation (15)



**Ryc. 3.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (prosta 1) i  $W_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (prosta 2) dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości współczynnika  $W_{32}$  obliczono na podstawie równania (17) oraz współczynnika  $W_{23}$  – na podstawie równania (16)

**Fig. 3.** Graphic illustration of dependencies  $W_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (line 1) and  $W_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (line 2) for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of the coefficient  $W_{32}$  were calculated on the basis of equation (17), and the coefficient  $W_{23}$  – on the basis of equation (16)

$$\frac{W_{13}}{H_{13}} = \frac{L_p}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2] \bar{C}_2} \quad (22)$$

$$\frac{W_{21}}{H_{21}} = \frac{L_p[\omega_{22}(1 - \sigma_1)\bar{C}_1 - \omega_{12}(1 - \sigma_2)\bar{C}_2]}{\bar{C}_1(1 - \sigma_1)[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]} \quad (23)$$

$$\frac{W_{22}}{H_{22}} = \frac{A - L_p[\omega_{11}(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2 + \omega_{22}(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1 - (\bar{C}_1\omega_{21} + \bar{C}_2\omega_{12})(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)]}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]\omega_{11}} \quad (24)$$

$$\frac{W_{23}}{H_{23}} = \frac{\omega_{12} - L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)\bar{C}_1}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]\bar{C}_2\omega_{12}} \quad (25)$$

Wyrażenia dla ilorazów  $W_{ij}/L_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), w których współczynniki  $W_{ij}$  i  $L_{ij}$  mają takie same wskaźniki, można przedstawić w postaci:

$$\frac{W_{31}}{H_{31}} = -\frac{L_p}{\bar{C}_2[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]} = -\frac{W_{13}}{H_{13}} \quad (26)$$

$$\frac{W_{11}}{L_{11}} = \frac{\omega_{22}}{\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2} \quad (29)$$

$$\frac{W_{32}}{H_{32}} = \frac{L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)\bar{C}_2 - \omega_{21}}{\bar{C}_2[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]\omega_{21}} \quad (27)$$

$$\frac{W_{12}}{L_{12}} = -\frac{(1 - \sigma_2)\omega_{21} - (1 - \sigma_1)\omega_{22}}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2](1 - \sigma_1)} \quad (30)$$

$$\frac{W_{33}}{H_{33}} = \frac{1}{\bar{C}_2^2 \omega_{22}[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]}, \quad (28)$$

$$\frac{W_{13}}{L_{13}} = \frac{1}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]\bar{C}_2} \quad (31)$$

gdzie:  $A = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}$ .

$$\frac{W_{21}}{L_{21}} = \frac{\omega_{22}(1 - \sigma_1)\bar{C}_1 - \omega_{12}(1 - \sigma_2)\bar{C}_2}{\bar{C}_1(1 - \sigma_1)[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2]} \quad (32)$$

$$\frac{W_{22}}{L_{22}} = \frac{\bar{C}_1 \{A - L_p [\omega_{11}(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2 + \omega_{22}(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1 - (\bar{C}_1 \omega_{21} + \bar{C}_2 \omega_{12})(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)]\}}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2][\omega_{11} \bar{C}_1 + L_p(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1^2]} \quad (33)$$

$$\frac{W_{23}}{L_{23}} = \frac{\omega_{12} - L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_1}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2][\bar{C}_2 \omega_{12} + L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_1 \bar{C}_2]} \quad (34)$$

$$\frac{W_{31}}{L_{31}} = \frac{1}{[\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2] \bar{C}_2} = \frac{W_{13}}{L_{13}} \quad (35)$$

$$\frac{W_{32}}{L_{32}} = \frac{\bar{C}_1 [L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_2 - \omega_{21}]}{\bar{C}_2 [\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2][\omega_{21} \bar{C}_1 + L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_1 \bar{C}_2]} \quad (36)$$

$$\frac{W_{33}}{L_{33}} = \frac{1}{\bar{C}_2 [\omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2][\omega_{22} \bar{C}_2 + L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2^2]} \quad (37)$$

gdzie:  $A = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}$ .

Ilorazy  $W_{ij}/R_{ij}$  ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ), w których współczynniki  $W_{ij}$  i  $R_{ij}$  mają takie same wskaźniki, można zapisać w postaci:

$$\frac{W_{11}}{R_{11}} = \frac{L_p^2 \omega_{22} A}{B \{A + L_p [(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1 \omega_{22} + (1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2 \omega_{11} - (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)(\bar{C}_2 \omega_{12} - \bar{C}_1 \omega_{21})]\}} \quad (38)$$

$$\frac{W_{12}}{R_{12}} = -\frac{L_p \bar{C}_1 [(1 - \sigma_2) \omega_{21} - (1 - \sigma_1) \omega_{22}] A}{B [\omega_{21}(1 - \sigma_1) - \omega_{22}(1 - \sigma_1)]} \quad (39)$$

$$\frac{W_{13}}{R_{13}} = -\frac{L_p(1 - \sigma_2) A}{B [\omega_{21}(1 - \sigma_1) - \omega_{11}(1 - \sigma_2)]} \quad (40)$$

$$\frac{W_{21}}{R_{21}} = \frac{L_p [\omega_{22}(1 - \sigma_1) \bar{C}_1 - \omega_{12}(1 - \sigma_2) \bar{C}_2] [\omega_{12}(1 - \sigma_2) \bar{C}_2 - \omega_{22}(1 - \sigma_1) \bar{C}_1]}{\bar{C}_1 A B} \quad (41)$$

$$\frac{W_{22}}{R_{22}} = \frac{\bar{C}_1^2 \{A - L_p [\omega_{11}(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2 + \omega_{22}(1 - \sigma_1)^2 \bar{C}_1 - (\bar{C}_1 \omega_{21} + \bar{C}_2 \omega_{12})(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)]\} A}{B \omega_{22}} \quad (42)$$

$$\frac{W_{23}}{R_{23}} = -\frac{\bar{C}_1 [\omega_{12} - L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_1] A}{B \omega_{12}} \quad (43)$$

$$\frac{W_{31}}{L_{31}} = -\frac{L_p(1 - \sigma_2) \bar{C}_2 A}{B [\omega_{21}(1 - \sigma_1) \bar{C}_1 - \omega_{11}(1 - \sigma_2) \bar{C}_2]} \quad (44)$$

$$\frac{W_{32}}{R_{32}} = -\frac{\bar{C}_1 [L_p(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \bar{C}_2 - \omega_{21}] A}{B \omega_{21}} \quad (45)$$

$$\frac{W_{33}}{R_{33}} = \frac{A}{B \omega_{11}}, \quad (46)$$

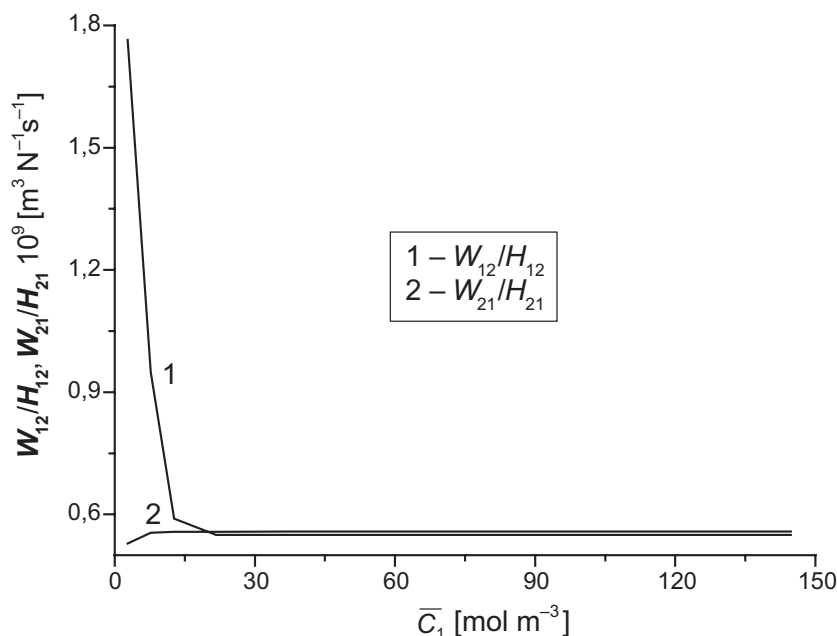
gdzie:  $A = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}$ ,  $B = \omega_{22} - L_p(1 - \sigma_2)^2 \bar{C}_2$ .

Z obliczeń wykonanych na podstawie równań (20)–(22), (26), (28)–(31), (35), (40) i (46) wynika, że  $W_{11}/H_{11} = 2,73 \times 10^{-27} \text{ m}^6 \text{N}^{-2} \text{s}^{-2}$ ,  $W_{13}/H_{13} = -W_{31}/H_{31} = 1,04 \times 10^{-4} \text{ m}^6 \text{mol}^{-2}$ ,

$W_{32}/H_{32} = 2,16 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{Ns mol}^{-2}$ ,  $W_{33}/H_{33} = 3,92 \times 10^{-4} \text{ m}^6 \text{N}^2 \text{s}^2 \text{mol}^{-4}$ ,  $W_{11}/L_{11} = -W_{12}/L_{12} = 1,14$ ,  $W_{13}/L_{13} = W_{31}/L_{31} = -1,51 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{Ns mol}^{-2}$ ,  $W_{33}/L_{33} = 3,49 \times 10^{14} \text{ m}^6 \text{N}^2 \text{s}^2 \text{mol}^{-4}$ ,  $W_{13}/R_{13} = 5,59 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$  i  $W_{33}/R_{33} = 1,14$ . Pozostałe ilorazy, tj.  $W_{12}/H_{12}$ ,  $W_{21}/H_{21}$ ,  $W_{22}/H_{22}$ ,  $W_{21}/L_{21}$ ,  $W_{22}/L_{22}$ ,  $W_{23}/L_{23}$ ,  $W_{11}/R_{11}$ ,  $W_{12}/R_{12}$ ,  $W_{21}/R_{21}$ ,  $W_{22}/R_{22}$ ,  $W_{23}/R_{23}$ ,  $W_{32}/R_{32}$  oraz  $W_{31}/R_{22}$  są zależne od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ , co ilustrują wykresy przedstawione na rycinach 4–14.

Na ryc. 4 przedstawiono graficzną ilustrację zależności  $W_{12}/H_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (krzywa 1) i  $W_{21}/H_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2 = \text{const.}}$  (krzywa 2) obliczonych na podstawie równań odpowiednio (21) i (23). Z wykresów zamieszczonych na tej rycinie wynika, że krzywe 1 i 2, umiejscowione w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, pokazują, że wartość  $W_{12}/H_{12}$  maleje, a wartość  $W_{21}/H_{21}$  rośnie nieliniowo do ustalonej wartości minimalnej wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości





**Ryc. 4.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{12}/H_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (krzywa 1) i  $W_{21}/H_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (krzywa 2) dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{12}/H_{12}$  obliczono na podstawie równania (21) oraz współczynnika  $W_{21}/H_{21}$  – na podstawie równania (23)

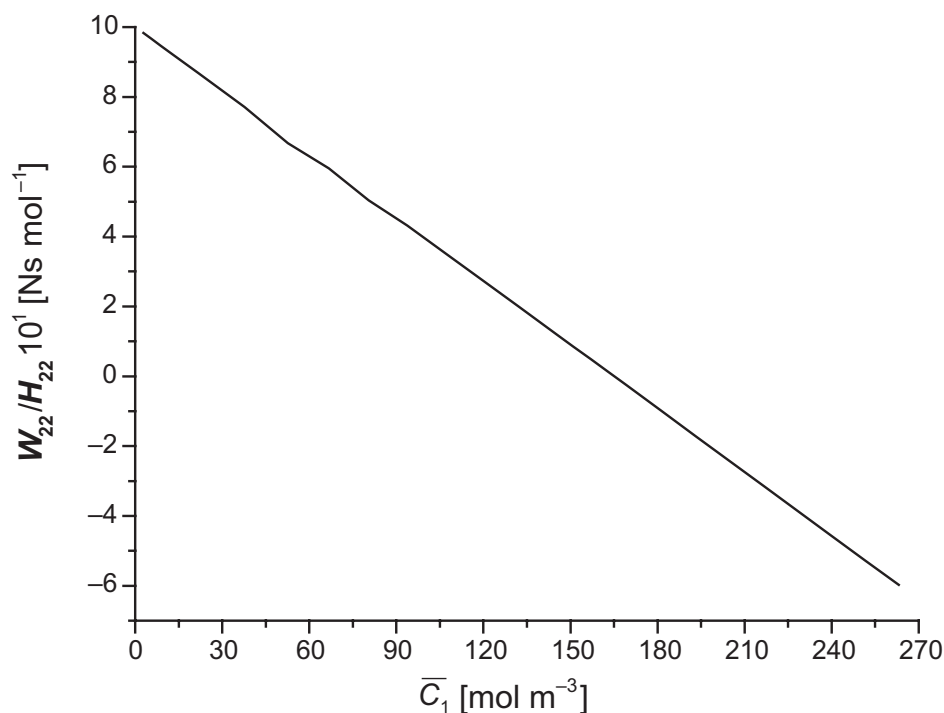
**Fig. 4.** Graphic illustration of dependence  $W_{12}/H_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (curve 1) and  $W_{21}/H_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (curve 2) for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{12}/H_{12}$  were calculated on the basis of equation (21) and coefficient  $W_{21}/H_{21}$  – on the basis of equation (23)

$\bar{C}_2$ , którą obydwie krzywe osiągają dla  $\bar{C}_1 \geq 21,67 \text{ mol m}^{-3}$ . Dla krzywej 1  $(W_{12}/H_{12})_{\min} = 0,55 \text{ m}^3 \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$ , a dla krzywej 2 –  $(W_{21}/H_{21})_{\min} = 0,56 \text{ m}^3 \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Z kolei zależności  $W_{22}/H_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  i  $W_{23}/H_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$ , przedstawione na ryc. 5 i 6 i obliczone odpowiednio na podstawie równań (24) i (25) pokazują, że zarówno  $W_{22}/H_{22}$  jak i  $W_{23}/H_{23}$  maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Można zauważyć, że dla  $\bar{C}_1 \leq 116 \text{ mol m}^{-3}$   $W_{22}/H_{22}$  przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla  $\bar{C}_1 > 116 \text{ mol m}^{-3}$ , stosunek  $W_{22}/H_{22}$  jest dodatni. Z kolei  $W_{23}/H_{23}$  przyjmuje wartości ujemne w całym zakresie  $\bar{C}_1$ .

Na rycinie 7 przedstawiono zależność  $W_{21}/L_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  obliczoną na podstawie równania (30). Przebieg krzywej zamieszczonej na tej rycinie wskazuje, że w  $W_{21}/L_{21}$  maleje od wartości  $W_{21}/L_{21} = 1,15 \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$  do wartości  $W_{21}/L_{21} = 1,12 \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$  przedziale  $2,97 \text{ mol m}^{-3} \leq \bar{C}_1 \leq 12,72 \text{ mol m}^{-3}$ . Dla  $\bar{C}_1 > 21,67 \text{ mol m}^{-3}$ ,  $W_{21}/L_{21} \approx 1,14 \text{ mol N}^{-1} \text{s}^{-1}$ . Zamieszczona na ryc. 8 krzywa ilustrująca zależność  $W_{22}/L_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  pokazuje, że wartość  $W_{22}/L_{22}$  maleje liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Dla  $\bar{C}_1 \leq 166 \text{ mol m}^{-3}$   $W_{22}/L_{22} > 0$ , a dla  $\bar{C}_1 > 166 \text{ mol m}^{-3}$   $W_{22}/L_{22} < 0$ . Z kolei na ryc. 9 pokazano krzywą ilustrującą zależność  $W_{23}/L_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$ . Z przebiegu tej krzywej wynika, że największy spadek wartości  $W_{23}/L_{23}$  pojawia się w przedziale  $2,97 \text{ mol}$

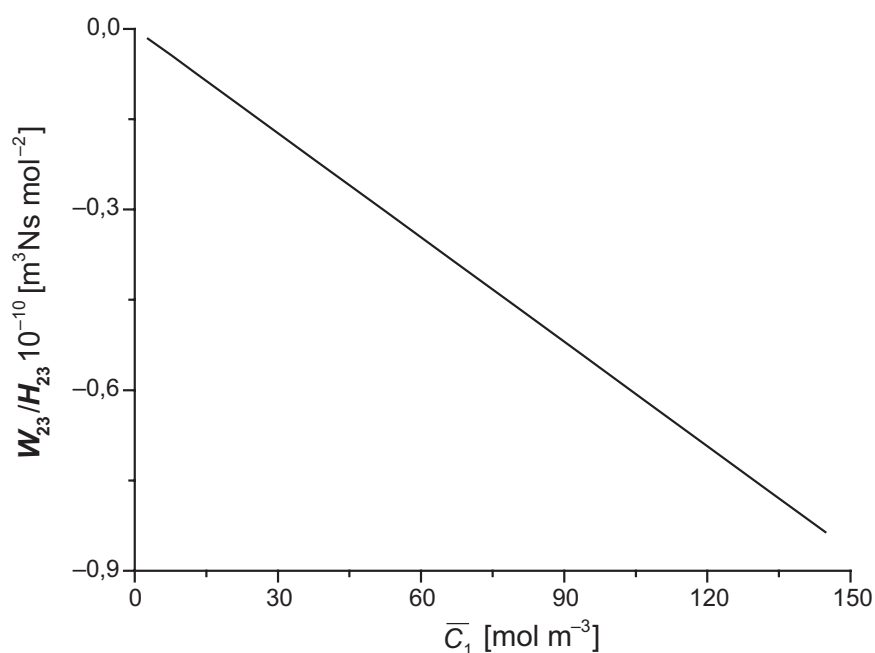
$\text{m}^{-3} \leq \bar{C}_1 \leq 12,72 \text{ mol m}^{-3}$ , a dla  $\bar{C}_1 > 21,67 \text{ mol m}^{-3}$ ,  $W_{23}/L_{23} = 2,11 \text{ m}^3 \text{Ns mol}^{-3}$ , z dokładnością do drugiej cyfry znaczącej.

Na ryc. 10 przedstawiono obliczoną na podstawie równania (38) krzywą ilustrującą zależność  $W_{11}/R_{11} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$ . Z tej ryciny wynika, że  $W_{11}/R_{11} > 0$ , w całym zakresie wartości  $\bar{C}_1$  oraz że  $W_{11}/R_{11}$  maleje nieliniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Z kolei na ryc. 11 przedstawiono graficzną ilustrację zależności  $W_{12}/R_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (wykres 1) i  $W_{21}/R_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (wykres 2), obliczonych na podstawie równań odpowiednio (39) i (41). Zamieszczone wykresy są liniowe i pokazują, że wartości  $W_{12}/R_{12}$  są dodatnie i rosną, a wartości  $W_{21}/R_{21}$  są ujemne i maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Przedstawiona na ryc. 12 krzywa ilustrująca zależność  $W_{22}/R_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  została obliczona na podstawie równania (42). Z przebiegu tej krzywej można wywnioskować, że wartość  $W_{22}/R_{22}$  początkowo rośnie nieliniowo aż do osiągnięcia wartości maksymalnej  $(W_{22}/R_{22})_{\max} = 25,21 \times 10^{-16} \text{ mol}^3 \text{m}^{-6} \text{N}^{-1} \text{s}^{-1}$  dla  $\bar{C}_1 = 106,21 \text{ mol m}^{-3}$  oraz  $\bar{C}_2 = 37,71 \text{ mol m}^{-3}$ . Następnie po osiągnięciu wartości maksymalnej  $W_{22}/R_{22}$  maleje nieliniowo. Dla  $2,97 \text{ mol m}^{-3} \leq \bar{C}_1 \leq 166,83 \text{ mol m}^{-3}$ ,  $W_{22}/R_{22} > 0$ , a dla  $\bar{C}_1 > 166,83 \text{ mol m}^{-3}$ ,  $W_{22}/R_{22} < 0$ . Na ryc. 13 przedstawiono graficzną postać zależności  $W_{23}/R_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (wykres 1) i  $W_{32}/R_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$



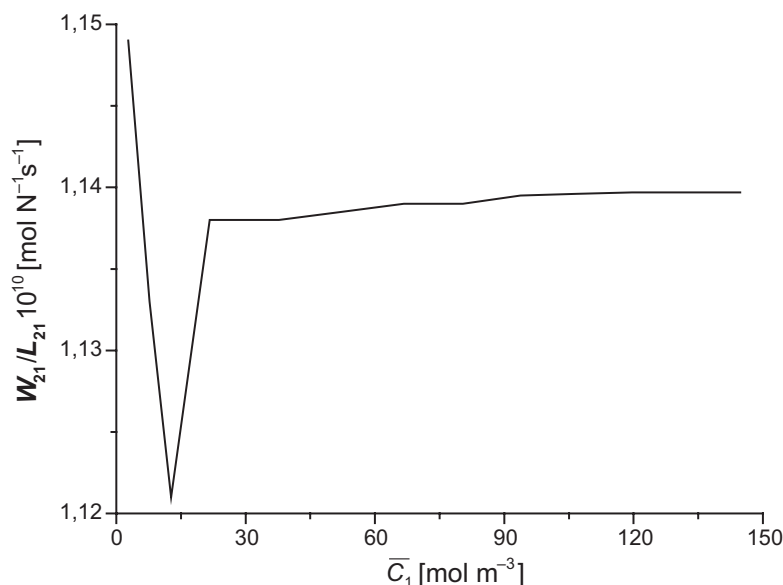
**Ryc. 5.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{22}/H_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{22}/H_{22}$  obliczono na podstawie równania (24)

**Fig. 5.** Graphic illustration of dependence  $W_{22}/H_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{22}/H_{22}$  were calculated on the basis of equation (24)



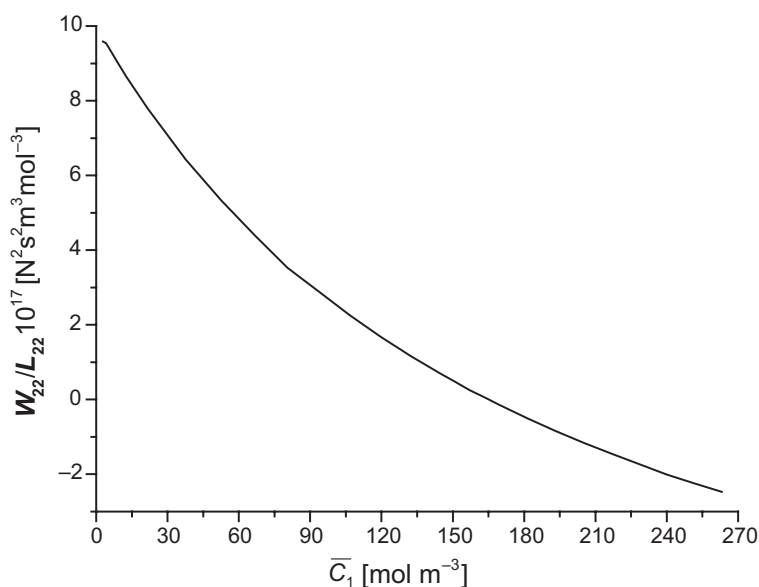
**Ryc. 6.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{23}/H_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{23}/H_{23}$  obliczono na podstawie równania (25)

**Fig. 6.** Graphic illustration of dependence  $W_{23}/H_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{23}/H_{23}$  were calculated on the basis of equation (25)



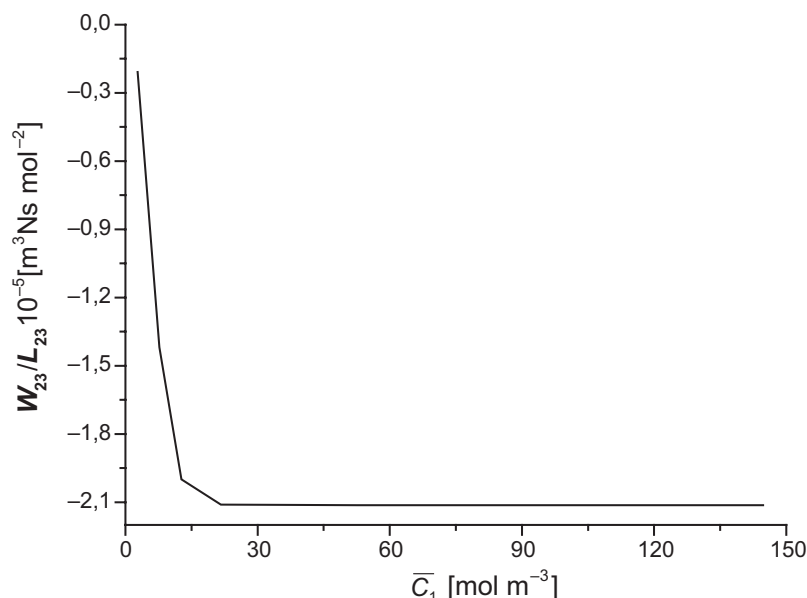
**Ryc. 7.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{21}/L_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{21}/L_{21}$  obliczono na podstawie równania (30)

**Fig. 7.** Graphic illustration of dependence  $W_{21}/L_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{21}/L_{21}$  were calculated on the basis of equation (30)



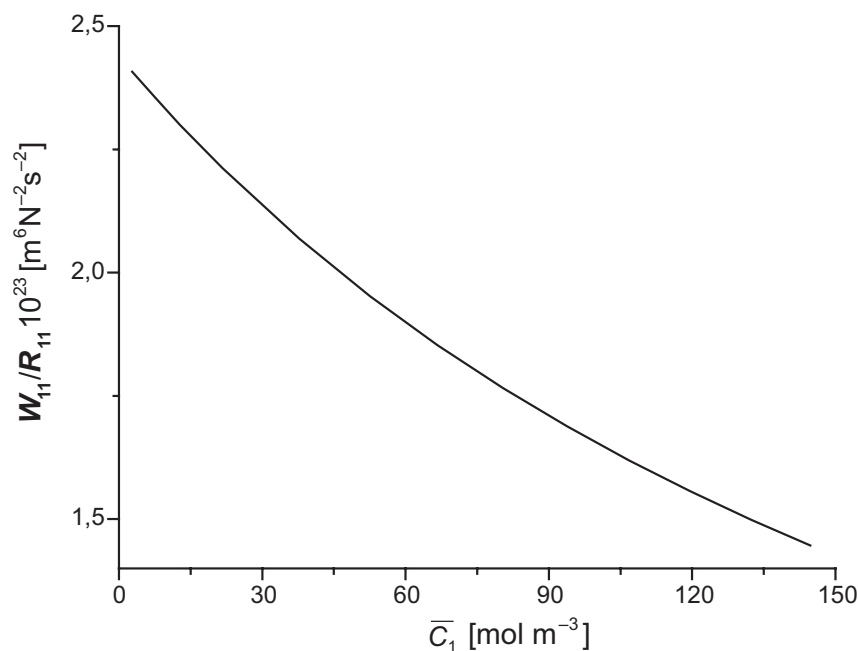
**Ryc. 8.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{22}/L_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{22}/L_{22}$  obliczono na podstawie równania (33)

**Fig. 8.** Graphic illustration of dependence  $W_{22}/L_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{22}/L_{22}$  were calculated on the basis of equation (33)



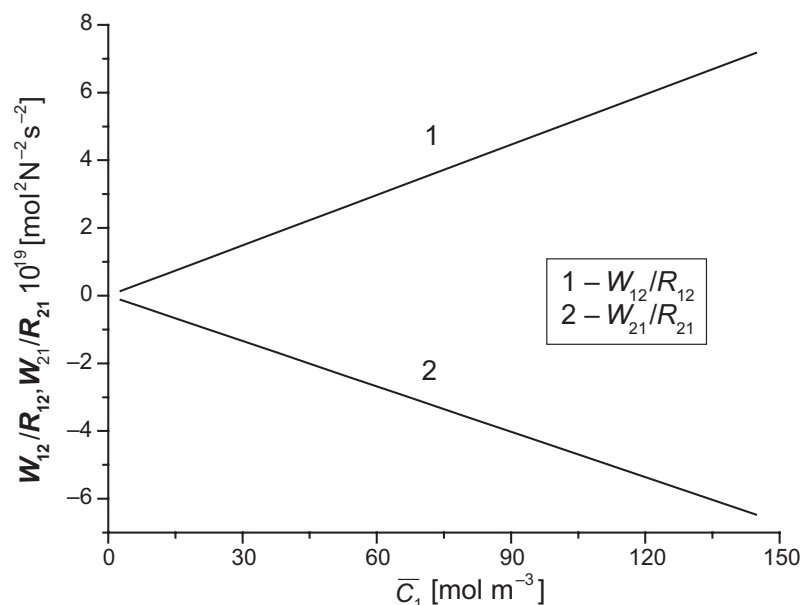
**Ryc. 9.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{23}/L_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{23}/L_{23}$  obliczono na podstawie równania (34)

**Fig. 9.** Graphic illustration of dependence  $W_{23}/L_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{23}/L_{23}$  were calculated on the basis of equation (34)



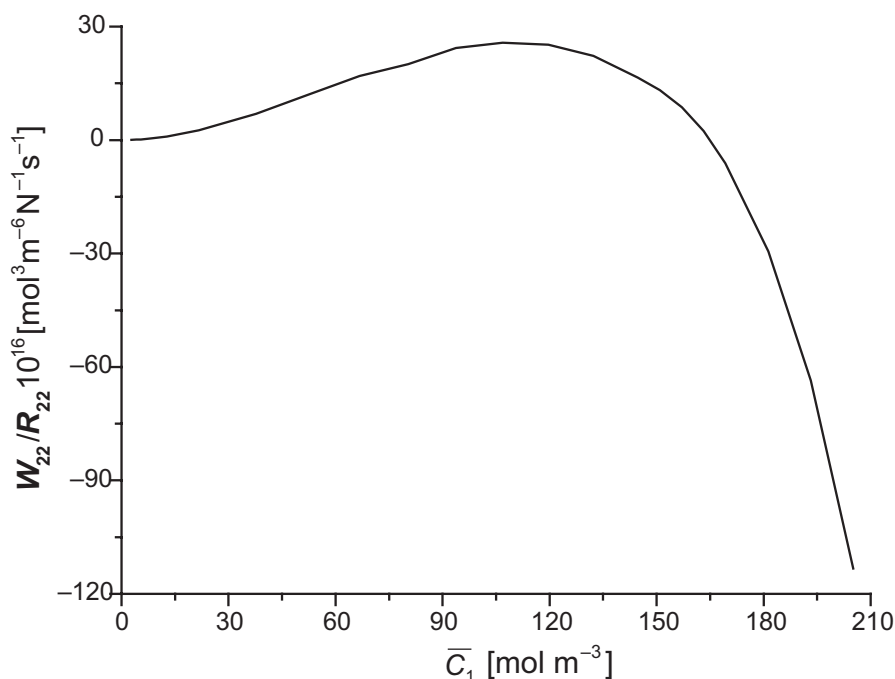
**Ryc. 10.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{11}/R_{11} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{11}/R_{11}$  obliczono na podstawie równania (39)

**Fig. 10.** Graphic illustration of dependence  $W_{11}/R_{11} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{11}/R_{11}$  were calculated on the basis of equation (38)



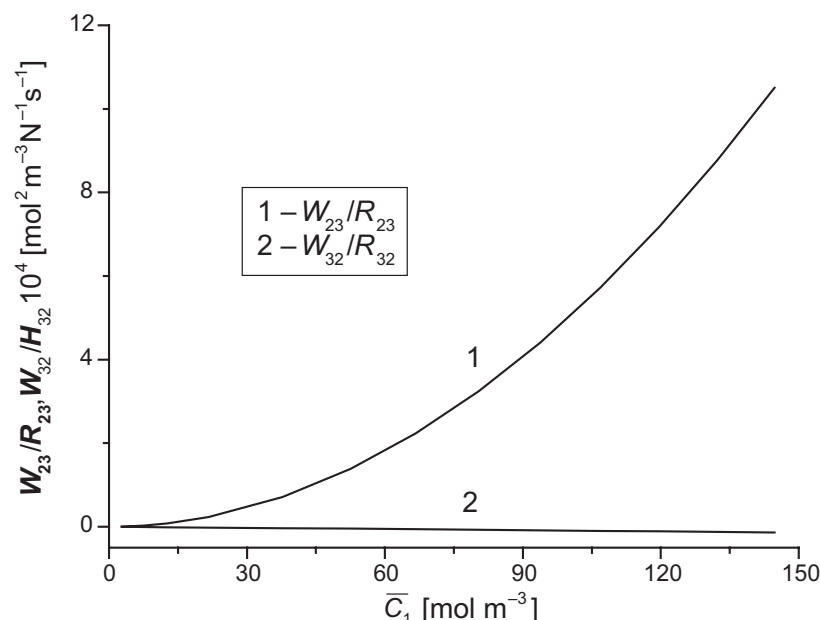
**Ryc. 11.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{12}/R_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (prosta 1) i  $W_{21}/R_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (prosta 2) dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{12}/R_{12}$  obliczono na podstawie równania (40) oraz  $W_{21}/R_{21}$  na podstawie równania (41)

**Fig. 11.** Graphic illustration of dependence  $W_{12}/R_{12} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (line 1) and  $W_{21}/R_{21} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (line 2) for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{12}/R_{12}$  were calculated on the basis of equation (40) and  $W_{21}/R_{21}$  on the basis of equation (41)



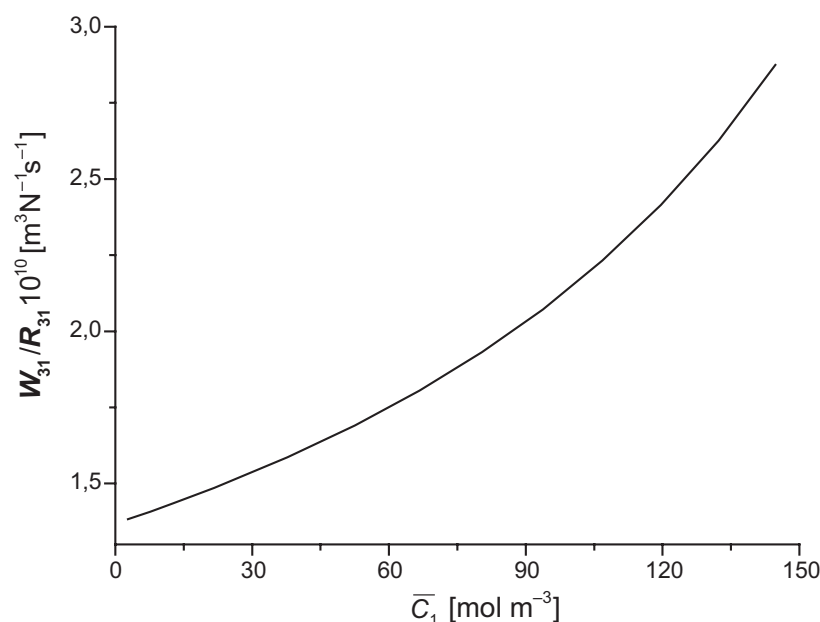
**Ryc. 12.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{22}/R_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{22}/R_{22}$  obliczono na podstawie równania (42)

**Fig. 12.** Graphic illustration of dependence  $W_{22}/R_{22} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{22}/R_{22}$  were calculated on the basis of equation (42)



**Ryc. 13.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{23}/R_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (krzywa 1) oraz  $W_{32}/R_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (prosta 2) dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{23}/R_{23}$  obliczono na podstawie równania (43) oraz  $W_{32}/R_{32}$  na podstawie równania (45)

**Fig. 13.** Graphic illustration of dependence  $W_{23}/R_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (curve 1) and  $W_{32}/R_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  (line 2) for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{23}/R_{23}$  were calculated on the basis of equation (43) and  $W_{32}/R_{32}$  on the basis of equation (45)



**Ryc. 14.** Graficzna ilustracja zależności  $W_{31}/R_{31} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  dla roztworów składających się z rozpuszczalnika i dwóch substancji rozpuszczonych oznaczonych indeksami „1” i „2”. Stężenie substancji oznaczonej indeksem „2” było stałe. Wartości  $W_{31}/R_{31}$  obliczono na podstawie równania (44)

**Fig. 14.** Graphic illustration of dependence  $W_{31}/R_{31} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  for solutions consisting of solvent and two dissolved substances identified by two indexes “1” and “2”. The substance concentration designated by the subscript “2” was constant. The values of  $W_{31}/R_{31}$  were calculated on the basis of equation (44)



(wykres 2), obliczonych na podstawie równań odpowiednio (43) i (45). Krzywa ilustrująca zależność  $W_{23}/R_{23} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  jest półparabolą, leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Z kolei zależność  $W_{32}/R_{32} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  jest liniowa, a wartości  $W_{23}/R_{23}$  maleją wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$ , przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Półparabolą, leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, jest także zależność  $W_{31}/R_{31} = f(\bar{C}_1)_{\bar{C}_2=const.}$  przedstawiona na ryc. 14. Tę zależność obliczono na podstawie równania (44) i przedstawiono na ryc. 7.

## Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych badań można sformułować następujące wnioski:

Współczynniki  $W_{11}$ ,  $W_{33}$  i ilorazy  $W_{11}/H_{11}$ ,  $W_{13}/H_{13}$ ,  $W_{33}/H_{33}$ ,  $W_{11}/L_{11}$ ,  $W_{13}/L_{13}$ ,  $W_{33}/L_{33}$ ,  $W_{13}/R_{13}$ ,  $W_{33}/R_{33}$  są stałe i dodatnie, a współczynniki  $W_{13} = W_{31}$  oraz ilorazy  $W_{31}/H_{31}$ ,  $W_{12}/L_{12}$ ,  $W_{31}/L_{31}$  – stałe i ujemne. Wartości współczynników  $W_{12}$ ,  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$  i  $W_{32}$  oraz ilorazów  $W_{12}/H_{12}$ ,  $W_{21}/H_{21}$ ,  $W_{22}/H_{22}$ ,  $W_{23}/H_{23}$ ,  $W_{21}/L_{21}$ ,  $W_{22}/L_{22}$ ,  $W_{23}/L_{23}$ ,  $W_{11}/R_{11}$ ,  $W_{12}/R_{12}$ ,  $W_{21}/R_{21}$ ,  $W_{22}/R_{22}$ ,  $W_{23}/R_{23}$ ,  $W_{32}/R_{32}$  oraz  $W_{31}/R_{32}$  są zależne od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ .

Wartości współczynników  $W_{32}$ ,  $W_{21}$  i  $W_{12}/R_{12}$  są dodatnie i rosną liniowo, a współczynniki  $W_{12}$  i  $W_{23}$  oraz ilorazów  $W_{23}/H_{23}$ ,  $W_{21}/R_{21}$  i  $W_{32}/R_{32}$  są ujemne i maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$ . Wartości  $W_{22}/H_{22}$  maleją liniowo wraz ze zwiększeniem wartości  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  i znajdują się w pierwszej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych,

Krzywe ilustrujące nieliniowe zależności współczynnika  $W_{22}$  i ilorazu  $W_{22}/R_{22}$  od wartości  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  znajdują się w pierwszej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych.

Krzywe ilustrujące zależności ilorazów,  $W_{12}/L_{12}$  i  $W_{11}/R_{11}$  od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  są hiperbolami znajdującymi się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, krzywa ilustrująca zależność ilorazu  $W_{23}/L_{23}$  od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  jest hiperbolą znajdującą się w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, a krzywa ilustrująca zależność ilorazu  $W_{22}/L_{22}$  od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  jest hiperbolą znajdującą się w pierwszej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych.

Krzywe ilustrujące zależności ilorazów  $W_{23}/R_{23}$  i  $W_{31}/R_{31}$  od  $\bar{C}_1$  przy ustalonej wartości  $\bar{C}_2$  są półparabolami znajdującymi się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

## Literatura

- [1] Rabek J.F.: Współczesna wiedza o polimerach. Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2009.
- [2] Ulbricht M.: Advanced functional polymer membranes. *Polymer* 2006, 47, 2217–2262.
- [3] Baker R.: Membrane technology and applications. John Wiley & Sons, New York 2004.
- [4] Klemm D., Schumann D., Udhardt U., Marsch S.: Bacterial synthesized cellulose – artificial blood vessels for microsurgery. *Prog. Polym. Sci.* 2001, 26, 1561–1603.
- [5] Czaja W., Krystynowicz A., Bielecki S., Brown Jr R.M.: Microbial cellulose – the natural power to heal wounds. *Biomaterials* 2006, 27, 145–151.
- [6] Katchalsky A., Curran P.F.: Nonequilibrium thermodynamics in biophysics. Harvard Univ. Press, Cambridge 1965.
- [7] Koter S.: Transport przez membrany jonowymienne. Model kapilarny. Wyd. UMK, Toruń 2001.
- [8] Oster G.F., Perelson A.S., Katchalsky A.: Network Thermodynamics. *Nature* 1971, 234, 393–399.
- [9] Perelson A.S.: Network thermodynamics. *Biophys. J.* 1975, 15, 667–685.
- [10] Peusner L.: The principles of network thermodynamics and biophysical applications. PhD Thesis, Harvard Univ., Cambridge 1970.
- [11] Peusner L.: Studies in Network Thermodynamics. Elsevier, Amsterdam 1986.
- [12] Peusner L.: Hierarchies of irreversible energy conversion systems: a network thermodynamics approach. I. Linear steady state without storage. *J. Theoret. Biol.* 1983, 102, 7–39.
- [13] Peusner L.: Hierarchies of irreversible energy conversion systems. II. Network derivation of linear transport equations. *J. Theoret. Biol.* 1985, 115, 319–335.
- [14] Mikulecky D.: The circle that never ends: can complexity be made simple? [in:] Complexity in chemistry, biology and ecology. Eds.: D.D. Bonnychev, D. Rouvaray, Springer, Berlin 2005, 97–153.
- [15] Playtner H.: Analysis and design of engineering systems. MIT, Cambridge 1961.
- [16] Bristow D.N., Kennedy C.A.: Maximizing the use energy in cities using an open systems network approach. *Ecological Modelling* 2013, 250, 155–164.
- [17] Ślęzak A.: Zastosowanie sieci termodynamicznych do interpretacji transportu w mikroukładach: transport jednorodnych roztworów nieelektrolitów przez membranę polimerową. *Polim. Med.* 2011, 41, 30–41.
- [18] Ślęzak A., Grzegorzczyn S., Batko K.M.: Resistance coefficients of polymer membrane with concentration polarization. *Transp. Porous Med.* 2012, 95, 151–170.
- [19] Batko K., Ślęzak-Prochazka I., Grzegorzczyn S., Ślęzak A.: Membrane Transport in Concentration Polarization Conditions: Network Thermodynamics Model Equations. *J. Porous Media* 2014, 17, w druku.
- [20] Batko K., Ślęzak-Prochazka I., Ślęzak A.: Sieciowa postać równań Kedem-Katchalsky'ego dla ternarnych roztworów nieelektrolitów. 1. Ocena współczynników Peusnera  $R_{ij}$  membrany polimerowej. *Polim. Med.* 2013, 43, 93–102.

- [21] **Batko K., Ślęzak-Prochazka I., Ślęzak A.:** Sieciowa postać równań Kedem-Katchalsky'ego dla ternarych roztworów nieelektrolitów. 2. Ocena współczynników Peusnera  $L_{ij}$  membrany polimerowej. Polim. Med. 2013, 43, 103–109.
- [22] **Batko K., Ślęzak-Prochazka I., Ślęzak A.:** Sieciowa postać równań Kedem-Katchalsky'ego dla ternarych roztworów nieelektrolitów. 3. Ocena współczynników Peusnera  $H_{ij}$  membrany polimerowej. Polim. Med. 2013, 43, 111–118.
- [23] **Batko K., Ślęzak-Prochazka I., Ślęzak A.:** Kedem-Katchalsky-Peusner model-equations for the membrane transport of ternary non-electrolyte solutions. Transp. Porous Med. (2013) złożona w Redakcji.
- [24] **Kargol M., Przestalski S., Suchanek G.:** Practical description of passive transport through membranes separating multi-component solutions. Studia Biophys. 1987, 121, 143–152.
- [25] **Suchanek G.:** Mechanistic equations for multicomponent solutions. Gen. Physiol. Biophys. 2006, 25, 53–63.
- [26] **Ślęzak A.:** Irreversible thermodynamic model equations of the transport across a horizontally mounted membrane. Biophys. Chem. 1989, 34, 91–102.

#### Adres do korespondencji

Kornelia Batko  
Katedra Informatyki Ekonomicznej  
Uniwersytet Ekonomiczny  
ul. Bogucicka 3 B  
40-287 Katowice  
e-mail: kornelia.batko@ue.katowice.pl

Konflikt interesów: nie występuje.

Praca wpłynęła do Redakcji: 23.09.2013 r.

Po recenzji: 27.01.2014 r.

Zaakceptowano do druku: 27.01.2014 r.

Received: 23.09.2013

Revised: 27.01.2014

Accepted: 27.01.2014