PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

Nr 328

Taksonomia 23
Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania

Redaktorzy naukowi
Krzysztof Jajuga, Marek Walesiak

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2014

Redaktor Wydawnictwa: Barbara Majewska
Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz
Korektor: Barbara Cibis
Łamanie: Beata Mazur
Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
w Dolnośląskiej Bibliotece Cyfrowej www.dbc.wroc.pl,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Tytuł dofinansowany ze środków Narodowego Banku Polskiego
oraz ze środków Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS

ISSN 1899-3192 (Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu)
ISSN 1505-9332 (Taksonomia)

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 328 • 2014
Taksonomia 23 ISSN 1899-3192
Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania

Anna Domagała
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

O WYKORZYSTANIU ANALIZY GŁÓWNYCH SKŁADOWYCH W METODZIE *DATA ENVELOPMENT ANALYSIS*

Streszczenie: W artykule podjęto próbę porównania wybranych dwóch metod z grupy PCA-DEA, będących połączeniem analizy głównych składowych (PCA) z metodą *Data Envelopment Analysis* (DEA). Celem PCA-DEA jest poprawa rezultatów standardowej DEA, która w sytuacji zbyt małej liczby badanych obiektów i/lub zbyt dużej liczby cech opisujących obiekty traci moc dyskryminacyjną. Badanie polegało na porównaniu rezultatów uzyskiwanych przy zastosowaniu standardowego modelu DEA i modeli PCA-DEA w sytuacji prawidłowej oraz zbyt małej liczebności badanej grupy. Wykorzystano dane rzeczywiste i symulacyjne.

Słowa kluczowe: efektywność, DEA, PCA.

1. Wstęp

Metoda badania efektywności *Data Envelopment Analysis* (DEA), zaproponowana w 1978 roku przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [1978], zyskała już wielu zwolenników zarówno w świecie nauki, jak i wśród praktyków, gdzie wykorzystywana jest jako narzędzie wsparcia w procesie zarządzania.

Z uwagi na względny charakter rezultatów metody DEA[1] kwestią niezwykle istotną jest prawidłowy dobór zmiennych opisujących badane obiekty. Nabiera to szczególnego znaczenia w przypadku, kiedy badaniu poddawana jest niewielka liczba obiektów opisana dużą liczbą zmiennych. Wskaźniki efektywności DEA ulegają wtedy przeszacowaniu, tworząc tzw. chmurę w bliskim otoczeniu granicy efektywności, co z kolei osłabia siłę dyskryminacyjną metody. Dlatego zaleca się, aby minimalna liczba badanych obiektów wynosiła [Cooper, Seiford, Tone 2007, s. 284]:

$$n_{\min} = \max\left\{m \cdot s;\ 3 \cdot \left(m + s\right)\right\}. \tag{1}$$

[1] Efektywność danego obiektu w metodzie DEA obliczana jest w oparciu o obiekty uznane przez metodę za efektywne, a więc wzorcowe (*benchmarks*).

Oznacza to, iż zalecana liczba *n* badanych obiektów powinna zależeć od liczby *m* nakładów i *s* wyników opisujących dany obiekt. W sytuacji, gdy warunek ten nie jest spełniony należy rozważyć możliwość zwiększenia liczby badanych obiektów i/lub usunąć niektóre zmienne opisujące obiekty. Jeżeli nie można już bardziej zredukować liczby zmiennych i nie ma też możliwości zwiększenia liczebności badanej grupy, z pomocą może przyjść analiza głównych składowych, która umożliwia zredukowanie wymiarów modelu DEA, a mimo to pozwala na ujęcie w badaniu wszystkich pożądanych zmiennych.

Celem opracowania jest przedstawienie oraz porównanie wybranych dwóch proponowanych w literaturze (wskazanej poniżej) sposobów połączenia analizy głównych składowych z DEA oraz próba potwierdzenia hipotezy badawczej, według której wykorzystanie analizy głównych składowych może znacząco poprawić rezultaty metody DEA.

2. Charakterystyka wykorzystanych metod

DEA (*Data Envelopment Analysis*)

Opracowana przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [1978] wielowymiarowa, nieparametryczna, oparta na programowaniu liniowym metoda oceny względnej efektywności działania obiektów. Podstawowy model DEA to zorientowany na nakłady, radialny model CCR [Cooper, Seiford, Tone 2007, s. 43]. Obecnie pod nazwą *Data Envelopment Analysis* kryje się szeroki wachlarz modeli będących mniej lub bardziej zaawansowanymi modyfikacjami podstawowego modelu CCR[2].

PCA (*Principal Component Analysis*)

Analiza głównych składowych jest opartą na macierzy kowariancji lub macierzy korelacji wielowymiarową metodą ortogonalnej transformacji układu badanych cech, gdzie *p* obserwowalnych cech wejściowych przekształcanych jest w $r \leq p$ nieobserwowalnych i nieskorelowanych ze sobą cech zwanych głównymi składowymi, będącymi liniowymi kombinacjami cech wejściowych [Krzanowski 2008, s. 58]. Kolejne główne składowe charakteryzują się coraz mniejszą wariancją (będącą miarą ich zasobów informacyjnych), a więc pierwsza główna składowa wyjaśnia największy procent wariancji cech wejściowych. Jak pisze Krzanowski [2008, s. 66], podstawowym celem analizy głównych składowych jest redukcja liczby cech opisujących obiekty.

[2] Np. radialny model BCC, uwzględniający zmienne efekty skali, ale także modele nieradialne, takie jak model addytywny lub model SBM (*Slacks-Based Measure*) – więcej o metodzie DEA zob. np. [Cooper, Seiford, Tone 2007], a w polskiej literaturze [Guzik 2009].

PCA-DEA

Jest to grupa metod będących mniej lub bardziej zaawansowanym połączeniem metod PCA i DEA. Mimo różnic w sposobie powiązania obu metod, wszystkie podejścia posiadają wspólną ideę – dążenie do poprawy mocy dyskryminacyjnej DEA poprzez redukcję liczby zmiennych opisujących badane obiekty. Poniżej omówiono wybrane dwa podejścia.

1. Shanmugama i Johnsona [2007] – przebiega dwuetapowo: najpierw wyznaczane są główne składowe osobno dla zbioru nakładów i wyników, a następnie w wybranym do badania modelu DEA zastępuje się oryginalne nakłady i wyniki pierwszymi głównymi składowymi. Decyzję o tym, ile głównych składowych wprowadzić do modelu DEA (a więc jaki przyjąć procent wariancji zmiennych wyjaśniany przez wybrane główne składowe), podejmuje badacz[3].

2. Adler i Yazhemsky [2010] – polega na włączeniu głównych składowych (wyznaczanych osobno dla nakładów oraz wyników) bezpośrednio do formalnego zapisu danego modelu DEA. Przykładowo dla modelu CCR-I [Adler, Yazhemsky 2010, s. 275]:

$$\max U_o^T Y_o + U_{o,PC}^T Y_{o,PC} \tag{2}$$

przy warunkach:

(a) $V_o^T X_o + V_{o,PC}^T X_{o,PC} = 1,$

(b) $V_o^T X_j + V_{o,PC}^T X_{j,PC} - U_o^T Y_j - U_{o,PC}^T Y_{j,PC} \geq 0,$

(c) $V_o, U_o \geq 0,$ (d) $V_{o,PC}^T L_x, U_{o,PC}^T L_y \geq 0,$ (e) $V_{o,PC}^T, U_{o,PC}^T$ – bez ogr.

gdzie: X_o, X_j, Y_o, Y_j, V_o, U_o – tak jak w standardowym modelu CCR-I [por. Cooper, Seiford, Tone 2007, s. 43],
$X_{o,PC}$, $Y_{o,PC}$ – wektory głównych składowych związanych odpowiednio z nakładami i wynikami badanego obiektu *o*-tego[4],
$V_{o,PC}$, $U_{o,PC}$ – wektory wag związanych odpowiednio z $X_{o,PC}$ oraz $Y_{o,PC}$,
L_x, L_y – wektory ładunków głównych składowych związane odpowiednio z wektorem głównych składowych $X_{o,PC}$ oraz $Y_{o,PC}$.

Warunki (d) i (e) rozwiązują ewentualny problem ujemnych wartości głównych składowych[5]. Decyzję o tym, ile głównych składowych wprowadzić do modelu DEA, podobnie jak poprzednio, podejmuje badacz.

W tabeli 1 podsumowano najważniejsze wady i zalety obu podejść z grupy PCA-DEA.

---

[3] Zaleca się postępowanie zgodne z zasadami przyjętymi w analizie głównych składowych, a więc np. kryterium wartości własnej Kaisera czy wykres osypiska Cattella. Patrz: np. [Panek 2009, s. 181].

[4] $X_{o,PC}$ oraz $Y_{o,PC}$ w modelu DEA traktowane są jak oryginalne nakłady i wyniki.

[5] Ujemne wartości głównych składowych mogą wynikać tylko z ujemnych wartości ich ładunków, gdyż oryginalne zmienne wykorzystywane w modelu CCR-I są dodatnie.

Tabela 1. Wady i zalety PCA-DEA

Podejście/cechy	Wady	Zalety
Shanmugam i Johnson [2007]	brak równoważności rezultatów PCA-DEA i DEA przy 100% wyjaśnionej wariancji utrudnieniem mogą stać się ujemne ładunki głównych składowych[6]	prostota obliczeniowa (dzięki dwuetapowości podejścia) możliwość zastosowania z dowolnym modelem DEA (także korzystając z dostępnych programów komputerowych dedykowanych standardowej DEA)
Adler i Yazhemsky [2010]	rozbudowana postać modelu DEA (pakiety komputerowe z oprogramowanymi standardowymi modelami DEA nie znajdą zastosowania)[7]	równoważność rezultatów analizy DEA i PCA-DEA w przypadku ujęcia w modelu (2) wszystkich głównych składowych uwzględnienie ryzyka wystąpienia ujemnych głównych składowych

Źródło: opracowanie własne.

3. Warianty badania

W przeprowadzonym badaniu empirycznym porównano działanie standardowej DEA i omówionych powyżej podejść PCA-DEA. Dla ułatwienia pierwsze podejście PCA-DEA będzie nazywane w skrócie „Shan_John", a drugie – „Adl_Yaz". Przykładowo, symbol „Shan_John_2_1" będzie związany z rezultatami badania metodą PCA-DEA w wersji zaproponowanej przez Shanmugama i Johnsona [2007], w której wykorzystano dwie pierwsze główne składowe opisujące nakłady oraz (jedną) pierwszą główną składową opisującą wyniki danego obiektu.

Badanie przeprowadzono w dwóch wariantach, które szczegółowo opisano w tabeli 2.

W wariancie I wykorzystano dane rzeczywiste – przeżywalność kobiet i mężczyzn w chorobie nowotworowej (rak skóry) – podane przez Shanmugama i Johnsona [2007] i porównano rezultaty metody DEA oraz obu wersji PCA-DEA. Wykorzystano model BCC-O, gdyż model ten zastosowano w pracy Shanmugama i Johnsona [2007]. Badaniu poddano 45 krajów opisanych czterema nakładami i dwoma wynikami.

[6] Wydaje się jednak, iż ewentualny problem można rozwiązać albo przez zmianę wszystkich znaków ładunków na przeciwne (co prawdopodobnie wykorzystali w swoim podejściu autorzy), albo poprzez rotację układu osi, która została wykorzystana w niniejszym badaniu.

[7] Adler i Yazhemsky [2010] udostępniają swój autorski program komputerowy, jednak obejmuje on tylko trzy modele DEA – radialne modele CCR i BCC oraz model addytywny.

Tabela 2. Warianty badania empirycznego

Wariant / charakterystyka	Wariant I dane rzeczywiste	Wariant II dane symulacyjne
Dane	rzeczywiste, źródło: [Shanmugam, Johnson 2007]	symulacyjne: funkcja Cobba-Douglasa (stałe efekty skali) z nałożoną nieefektywnością na nakłady lub wyniki wybranych obiektów, źródło: badania własne
Liczba zmiennych (nakłady + wyniki)	4 + 2	6 + 3
Liczba obiektów i zalecana dla DEA minimalna liczba obiektów zgodnie ze wzorem (1)	45 krajów zalecana: $n_{min} = 18$	15 obiektów zalecana: $n_{min} = 27$
Zastosowany model DEA	BCC-O	CCR-I

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Liczba głównych składowych wykorzystana w wariantach badania

Wykorzystana w PCA-DEA liczba głównych składowych (procent wyjaśnionej wariancji nakładów oraz wyników)	
Wariant I	**Shan_John_2_1** (99,53% oraz 92,94%), **Adl_Yaz_2_1** (99,54% oraz 92,94%)
Wariant II	a) nieefektywność po stronie wszystkich nakładów: **Shan_John_2_1** (98,41% oraz 93,94%), **Adl_Yaz_2_1** (98,42% oraz 93,94%) b) nieefektywność dla dwóch podgrup nakładów: **Shan_John_2_1** (98,51% oraz 93,94%), **Adl_Yaz_2_1** (98,52% oraz 93,94%) c) nieefektywność po stronie wszystkich wyników: **Shan_John_2_1** (97,82% oraz 92,00%), **Adl_Yaz_2_1** (97,84% oraz 92,02%)

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać w tabeli 3[8], w wariancie I w obu wersjach analizy PCA-DEA wykorzystano dwie pierwsze główne składowe dla nakładów (99,5% wyjaśnionej wariancji nakładów) i pierwszą główną składową dla wyników (92,9% wariancji wyników).

W wariancie II wygenerowano dane sztuczne[9]. Utworzono 15 obiektów opisanych 6 nakładami i 3 wynikami. Nakłady podzielono na dwie równoliczne podgrupy o wysokiej korelacji wewnętrznej[10] i niskiej korelacji zewnętrznej[11]. Wyniki

[8] Różnice dla obu podejść PCA-DEA w zakresie stopnia wyjaśnionej wariancji wynikają z faktu, iż w obliczeniach metodą Shanmugama i Johnsona [2007] w przypadku ujemnych głównych składowych dokonywano rotacji osi. W podejściu Adler i Yazhemsky [2010] nie dokonuje się rotacji.

[9] Z uwagi na ograniczoną objętość tekstu szczegóły sposobu symulacji danych nie zostaną omówione.

[10] Współczynniki korelacji liniowej Pearsona w obu podgrupach przekraczały 0,9.

także były silnie ze sobą skorelowane. Otrzymano w ten sposób grupę 15 jednostek efektywnych w sensie DEA. Następnie dla wybranych obiektów wprowadzono: a) nieefektywność po stronie wszystkich nakładów, b) nieefektywność osobno w dwóch podgrupach nakładów oraz c) nieefektywność po stronie wszystkich wyników[12]. W wariancie II przyjęto taką liczbę pierwszych głównych składowych, która wyjaśnia ponad 90% wariancji nakładów i wyników[13].

4. Rezultaty badania i wnioski

W wariancie I zbadano 45 krajów, opisanych czterema nakładami i dwoma wynikami. Oznacza to, iż zastosowanie metody PCA-DEA nie jest tutaj konieczne[14] i należy oczekiwać, iż jej rezultaty będą zbliżone do rezultatów standardowej DEA. Badania potwierdziły te przypuszczenia (wysokie wartości współczynników korelacji[15] w tabeli 4), ale pokazały także coś więcej.

Tabela 4. Współczynniki korelacji pomiędzy rezultatami DEA i PCA-DEA (wariant I)

Metoda / współczynniki korelacji z rezultatami standardowej DEA (model BCC-O)	Współczynnik korelacji liniowej Pearsona	Współczynnik korelacji tau Kendalla
PCA-DEA w wersji Shan_John_2_1 (model BCC-O)	0,9218	0,7815
PCA-DEA w wersji Adl_Yaz_2_1 (model BCC-O)	0,9227	0,7568

Źródło: opracowanie własne.

Niższy współczynnik korelacji rang (tau Kendalla) wskazuje, iż nastąpiła zmiana pozycji rankingowych niektórych obiektów. Wynika to między innymi z faktu, iż standardowa DEA wskazała 9 obiektów efektywnych (w analizie Adl_Yaz_2_1 pojawiły się 3, a w Shan_John_2_1 tylko 2 obiekty wzorcowe). Wydawałoby się, iż PCA-DEA błędnie szacuje efektywność, jednak bliższe przyjrzenie się rezultatom obu analiz oraz danym wejściowym zdaje się wskazywać, iż to właśnie PCA-DEA lepiej oddaje efektywność obiektów. Warto dokładniej przyjrzeć się trzem krajom: Kostaryka i Trynidad oraz Singapur. Dane tych krajów (na-

[11] Współczynniki korelacji pomiędzy nakładami należącymi do różnych podgrup nie przekraczały 0,2.

[12] Wprowadzanie nieefektywności polegało na zwiększeniu nakładów przy niezmienionych wynikach (nieefektywność po stronie nakładów) lub zmniejszeniu wyników bez zmiany nakładów (nieefektywność po stronie wyników).

[13] Patrz: tabela 3.

[14] Warunek opisany wzorem (1) jest spełniony.

[15] Oddających podobieństwo pomiędzy rezultatami danego podejścia PCA-DEA a rezultatami standardowej DEA. Wszystkie podane współczynniki są statystycznie istotne (wartość $p < 0,01$).

kłady oznaczono symbolem x_i, a wyniki y_r) i wskaźniki efektywności uzyskane w przypadku standardowej DEA oraz obu wersji PCA-DEA zawarto w tabeli 5.

Tabela 5. Dane wejściowe oraz rezultaty DEA oraz PCA-DEA (wariant I badania)

Dane i typ analizy / obiekty	Nakłady				Wyniki		Wskaźniki efektywności (model BCC-O)		
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	DEA	PCA-DEA w wersji Shan_ John_2_1	PCA-DEA w wersji Adl_Yaz_2_1
Kostaryka	10	63 600	2064	275	0,89	0,99	100%	94,95%	96,12%
Trynidad	10	63 600	2064	275	0,97	0,98	99,49%	98,48%	98,62%
Singapur	1	64 700	2127	225	0,97	0,99	100%	98,99%	100%

Źródło: opracowanie własne.

Kostaryka (wraz z Singapurem) charakteryzuje się najwyższą wartością wyniku y_2 (na tle wszystkich 45 badanych obiektów) i z tego tylko względu osiąga w standardowym modelu DEA efektywność 100%[16]. Pozycja Trynidadu, który przy tych samych nakładach ma nieznacznie tylko niższą wartość tego wyniku, a dużo wyższą wartość wyniku y_1 jest już niższa. Wydawałoby się, iż to Trinidad powinien uzyskać wyższą wartość wskaźnika efektywności, a oceniony jest przez DEA słabiej. Jeżeli jednak spojrzymy na rezultaty analizy PCA-DEA zawarte w tabeli 5, okazuje się, iż tu obiekty zostały ocenione poprawniej. Najwyższą efektywnością charakteryzuje się zgodnie z oczekiwaniami Singapur, na drugiej pozycji znajduje się Trinidad, a na trzeciej Kostaryka.

Analizując rezultaty badania w wariancie I, można zatem spróbować wysunąć ostrożny wniosek, iż zastosowanie PCA-DEA w przypadku odpowiednio dużej liczby badanych obiektów[17] nie zmienia znacząco rezultatów analizy efektywności (co potwierdzają współczynniki korelacji), ale pozwala pokonać wskazaną wyżej wadę radialnego modelu DEA[18].

Wariant II zakładał porównanie działania omawianych metod w przypadku niespełnienia warunku (1) dotyczącego liczebności grupy. Osłabiona wtedy moc dys-

[16] W przypadku modeli radialnych zorientowanych na wyniki (a takim jest model BCC-O) wystarczy, aby jeden z wyników obiektu miał wartość najwyższą (na tle pozostałych obiektów), a metoda wskaże ten obiekt jako efektywny. Stąd też standardowa DEA wskazuje Kostarykę jako efektywną, zrównując ją tym samym z Singapurem (który powinien uzyskać dużo wyższą pozycję rankingową niż Kostaryka).

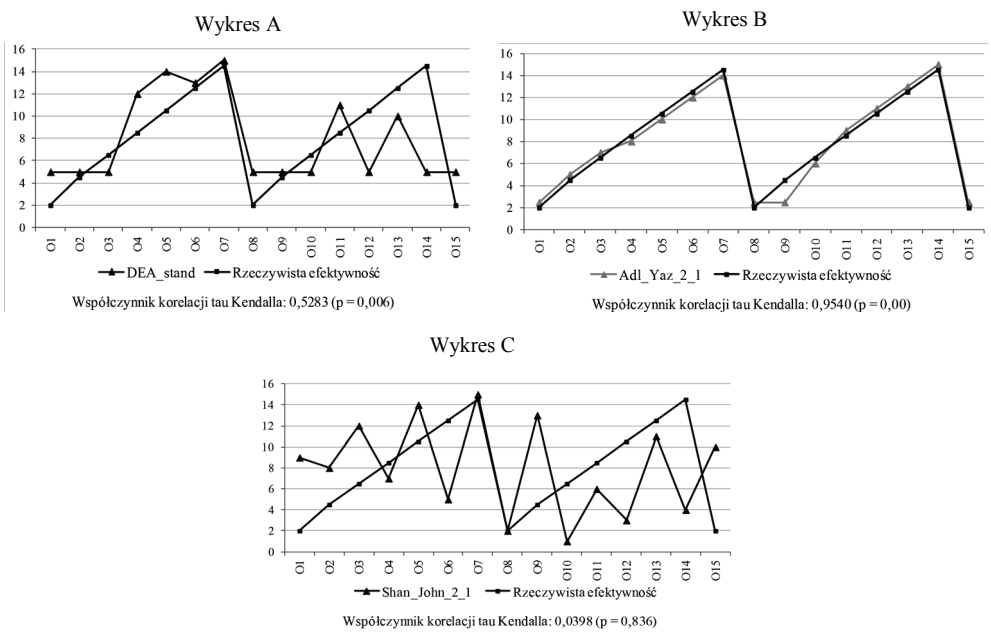
[17] Spełniającej więc warunek określony wzorem (1).

[18] Wniosek nazwano ostrożnym, gdyż wymaga on potwierdzenia w dodatkowych badaniach, które autorka planuje przeprowadzić.

kryminacyjna standardowej DEA powoduje, iż rezultaty tej metody nie są wiarygodne. Aby móc zweryfikować działanie metod z grupy PCA-DEA, trzeba zatem analizować obiekty sztuczne, których faktyczna efektywność jest z góry ustalona i znana.

Jak już wspomniano, badaniu poddano tu 15 obiektów, opisanych 6 nakładami i 3 wynikami, co oznaczało celowe niespełnienie warunku (1). Jak się okazało, bez względu na sposób wprowadzenia nieefektywności (po stronie nakładów lub wyników), rezultaty obliczeń były bardzo podobne – ocenę efektywności najbardziej zbliżoną do rzeczywistej każdorazowo uzyskiwano za pomocą podejścia PCA-DEA zaproponowanego przez Adler i Yazhemsky [2010]. Poniżej przedstawiono zatem dokładniej tylko rezultaty badania przy nieefektywności po stronie wszystkich nakładów (zob. wariant II w tabeli 3, pkt a).

Na zamieszczonych na rysunku 1 wykresach zestawiono rzeczywiste miejsca rankingowe badanych 15 obiektów z miejscami rankingowymi wskazywanymi przez standardową DEA (wykres A) oraz oba podejścia PCA-DEA (wykresy B oraz C). Występują rangi wiązane[19]. Podano również wartości współczynników korelacji tau Kendalla.



Rys. 1. Rankingi obiektów – nieefektywność po stronie nakładów

Źródło: opracowanie własne.

[19] Z tego względu przykładowo obiekty efektywne (których było więcej niż jeden) nie miały rang równych 1. Obiekty efektywne, a więc zajmujące najwyższe pozycje rankingowe, odzwierciedlają punkty leżące na rysunkach najniżej.

Duża liczba obiektów efektywnych[20] wskazanych przez standardową metodę DEA potwierdza, iż metoda ta w przypadku niespełnionego warunku (1) traci moc dyskryminacyjną (choć nadal poprawnie rozpoznaje obiekty faktycznie efektywne). Jeśli chodzi o metodę PCA-DEA, widać wyraźnie, iż tylko w podejściu Adler i Yazhemsky [2010] efektywność została oceniona właściwie. W metodzie Shanmugama i Johnsona [2007] zaobserwowano zaskakująco słabą zbieżność między efektywnością wskazywaną przez tę metodę a faktyczną efektywnością badanych obiektów.

Powyższe wnioski należy traktować jako wstępne i bardzo ostrożne. Badania z wykorzystaniem danych symulacyjnych będą przez autorkę kontynuowane, w celu zweryfikowania hipotezy o przewadze podejścia Adler i Yazhemsky [2010] nad podejściem zaproponowanym przez Shanmugama i Johnsona [2007].

5. Podsumowanie oraz kierunki dalszych badań

Pomysł wykorzystania analizy głównych składowych w metodzie DEA wydaje się być bardzo obiecujący, jednak różnice pomiędzy proponowanymi w literaturze metodami z grupy PCA-DEA wskazują konieczność wnikliwego porównania generowanych przez nie rezultatów.

Ponadto należy podkreślić, iż niniejsza praca miała na celu jedynie porównanie i sprawdzenie samego działania danego podejścia PCA-DEA. Kolejnym obszarem, w którym należy prowadzić badania, to obszar praktycznego wykorzystania uzyskanych rezultatów. Wprowadzenie do modeli DEA głównych składowych zamiast[21], lub obok[22], oryginalnych nakładów i wyników opisujących obiekty może utrudniać interpretację rezultatów badania.

Warto również przyjrzeć się możliwościom oprogramowania poszczególnych modeli PCA-DEA, gdyż dostępne programy komputerowe pozwalają na wykorzystanie tylko modeli podstawowych. Duży potencjał wydaje się drzemać w środowisku typu „R".

Literatura

Adler N., Yazhemsky E. (2010), *Improving discrimination in data envelopment analysis: PCA–DEAor variable reduction*, „European Journal of Operational Research" No. 202, s. 273-284.

Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. (1978), *Measuring the Efficiency of Decision Making Units*, „European Journal of Operational Research" 2, s. 429-444.

Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K. (2007), *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Springer, New York.

[20] Na rysunku 1 są to punkty położone najniżej, na poziomie „5" (z uwagi na występujące rangi wiązane).

[21] Jak to się dzieje w podejściu Shanmugama i Johnsona [2007].

[22] Podejście Adler i Yazhemsky [2010].

Guzik B. (2009), *Podstawowe modele DEA w badaniu efektywności gospodarczej i społecznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
Krzanowski W.J. (2008), *Principles of Multivariate Analysis. A User's Perspective*, Oxford University Press, New York.
Panek T. (2009), *Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie – Oficyna Wydawnicza, Warszawa.
Shanmugam R., Johnson C. (2007), *At a crossroad of data envelopment and principal component analyses*, „Omega", No. 35, s. 351-364.

ABOUT USING PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Summary: The article presents a comparison of two selected methods of PCA-DEA which are a connection of Principal Component Analysis (PCA) and Data Envelopment Analysis (DEA). The aim of PCA-DEA methods is to improve the results of a traditional DEA which discriminatory power weakens when the number of variables that describe objects increases and/or when the number of objects decreases. The results of a traditional DEA and PCA-DEA were compared in case of correct and too small group of studied objects. Real and simulated data sets were used.

Keywords: efficiency, DEA, PCA.