PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

323

Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski

Redaktorzy naukowi
Krzysztof Jajuga
Wanda Ronka-Chmielowiec

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Agnieszka Flasińska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
w Dolnośląskiej Bibliotece Cyfrowej www.dbc.wroc.pl,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiejkolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2013

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-351-9

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp 11

Adam Adamczyk: Poziom wewnętrznych źródeł finansowania jako determinanta inwestycji w działalność B + R przedsiębiorstw 13
Roman Asyngier: Ekonomiczne i prawne aspekty nieprawidłowości funkcjonowania rynku NewConnect. Ocena i propozycje zmian 23
Jacek Białek: Zastosowanie autorskiego indeksu wydajności pracy do analizy dynamiki cen jednostek rozrachunkowych OFE 34
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Zrównoważona Karta Wyników w zakładzie ubezpieczeń 43
Dawid Dawidowicz: Ocena efektywności nowych i pozostałych funduszy inwestycyjnych akcji polskich w latach 2000–2012 53
Ewa Dziwok: Weryfikacja modeli krzywej dochodowości na podstawie metod dynamicznych 66
Krzysztof Echaust: Zwroty dzienne a zwroty nocne – porównanie wybranych własności na przykładzie kontraktów *futures* notowanych na GPW w Warszawie 75
Urszula Gierałtowska: Inwestowanie w metale szlachetne jako alternatywna forma lokowania kapitału 88
Paweł Kliber: Spread WIBOR-OIS jako miara ryzyka kredytowego i premii płynnościowej 101
Karol Marek Klimczak: Struktura autoregresyjna zysku rezydualnego spółek z Polski, Niemiec i Francji 112
Anna Korzeniowska: Wybrane problemy rynku finansowego wynikające z sytuacji na rynku oszczędności gospodarstw domowych 120
Mieczysław Kowerski: Cateringowa teoria dywidend 128
Marzena Krawczyk: Adekwatność oferty instytucji rynku finansowego do potrzeb kapitałowych MŚP 142
Paweł Kufel, Magdalena Mosionek-Schweda: Wpływ doświadczenia giełdowego na koszt pozyskiwania kapitału na rynku Catalyst 151
Robert Kurek: Ewolucja konwergencji regulacji i sposobów nadzorowania na rynku ubezpieczeniowym UE 161
Sebastian Majewski, Mariusz Doszyń: Efekty wpływu czynników behawioralnych na stopy zwrotu z akcji spółek sektora budowlanego notowanych na GPW w Warszawie 170

Sebastian Majewski: Behawioralny portfel według Maslowa – analiza symulacyjna ... 180
Marta Małecka: Metody oceny jakości prognoz ryzyka rynkowego – analiza porównawcza ... 192
Aleksander R. Mercik: Wykorzystanie rozkładu *t*-Studenta do szacowania wartości zagrożonej ... 202
Artur Mikulec: Znormalizowany względem czasu τ wskaźnik Calmara i jego zastosowanie w analizie efektywności inwestycji portfelowych ... 212
Wojciech Misterek: Bariery w zakresie pozyskania zewnętrznych źródeł finansowania na realizacje projektów innowacyjnych przedsiębiorstw ... 223
Paweł Niszczota: Wpływ języka raportowania na płynność spółek zagranicznych notowanych na GPW ... 232
Dorota Pekasiewicz: Wyznaczanie współczynnika bezpieczeństwa na podstawie kwantyla rozkładu sumy roszczeń w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych ... 241
Agnieszka Perepeczo: Reakcja akcjonariuszy na decyzje o wypłacie dywidendy w spółkach publicznych – wyniki badań empirycznych ... 253
Tomasz Pisula: Metodyczne aspekty zastosowania modeli skoringowych do oceny zdolności kredytowej z wykorzystaniem metod ilościowych ... 265
Paweł Porcenaluk: Analiza wybranych miar ryzyka płynności dla akcji notowanych na GPW w Warszawie w latach 2001–2011 ... 289
Marcin Salamaga: Zastosowanie metody średniej kroczącej do badania zyskowności inwestycji na polskim rynku kapitałowym ... 298
Rafał Siedlecki: Prognozowanie trudności finansowych przedsiębiorstw z wykorzystaniem miary rozwoju Hellwiga ... 308
Anna Sroczyńska-Baron: Możliwości aplikacyjne gier mniejszościowych na Giełdzie Papierów Wartościowych ... 319
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Asymetria w ujęciu Boshnakova – propozycja metody szacowania miar asymetrii z próby ... 328
Piotr Staszkiewicz: Verification of the disclosure lemma applied to the model for reputation risk for subsidiaries of non-public group with reciprocal shareholding on the Polish broker-dealers market ... 337
Anna Szymańska: Bayesowskie szacowanie stawek składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych z wybranymi funkcjami straty ... 347
Jacek Welc: Prognozowana dynamika zysków spółek a obciążenie błędów prognoz – doświadczenia polskie ... 357
Jerzy Węcławski: Pożyczki hybrydowe jako alternatywna forma finansowania przedsiębiorstw ... 366
Ryszard Węgrzyn: Analiza wrażliwości zmienności implikowanej względem instrumentu podstawowego opcji – podejście dynamiczne ... 375
Stanisław Wieteska: Obciążenia obiektów budowlanych śniegiem jako element ryzyka w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych w Polskim obszarze klimatycznym ... 385

Zuzanna Wośko: Odporność sektora bankowego w Polsce na szoki zewnętrzne w kontekście ryzyka kredytowego. Badanie zależności między zmiennymi makroekonomicznymi ... 397
Anna Zamojska: Wskaźnik Sharpe'a w teorii i w praktyce ... 406
Aneta Zglińska-Pietrzak: Bootstrapowe prognozy zmienności stóp zwrotu na podstawie modelu GARCH ... 415
Monika Zielińska-Sitkiewicz: Ocena kondycji rynku nieruchomości mieszkaniowych na podstawie badania danych z raportów finansowych firm deweloperskich ... 423

Summaries

Adam Adamczyk: The level of internal sources of finance as a determinant of investment in R & D of enterprises ... 22
Roman Asyngier: Economic and legal aspects of irregularities in the functioning of the NewConnect market. Assessment and suggestions for changes ... 33
Jacek Białek: Application of the original index of labour productivity in the analysis of open pension funds' units dynamics ... 42
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Balanced Scorecard in insurance company ... 52
Dawid Dawidowicz: Evaluation of efficiency of new Polish equity investment funds in comparison to the other investment funds in the period 2000–2012 ... 65
Ewa Dziwok: Yield curve verification based on the correlation surface method ... 74
Krzysztof Echaust: Traded period returns and non-traded period returns – comparison of selected properties on the basis of futures contracts quoted on Warsaw Stock Exchange ... 87
Urszula Gierałtowska: Investing in precious metals as an alternative form of capital investment ... 100
Paweł Kliber: WIBOR-OIS spread as a measure of liquidity and default risk 111
Karol Marek Klimczak: Autoregressive structure of residual income of Polish, French and German firms ... 119
Anna Korzeniowska: Selected problems of financial market resulting from the situation on household savings market ... 127
Mieczysław Kowerski: Catering theory of dividends ... 141
Marzena Krawczyk: Adequacy of the offer given by financial market institution to capital needs of SMEs ... 150
Paweł Kufel, Magdalena Mosionek-Schweda: The impact of the stock-market experience on the cost of capital gained on the Catalyst market ... 160

Robert Kurek: The evolution in convergence of supervision regulations and methods on the European Union insurance market 169
Sebastian Majewski, Mariusz Doszyń: The effects of impact of behavioural factors on the rate of return of construction companies stocks listed on the Warsaw Stock Exchange..... 179
Sebastian Majewski: Behavioural portfolio according to Maslov – simulation analysis 191
Marta Małecka: Methods for evaluating Value-at-Risk forecasts – comparative analysis 201
Aleksander R. Mercik: Using the Student's *t* distribution in Value-at-Risk estimation..... 211
Artur Mikulec: Tau-normalized-Calmar ratio and its application in the analysis of portfolio investment efficiency 222
Wojciech Misterek: Barriers in obtaining external funding to the realization of innovative projects in companies 231
Paweł Niszczota: The language used in filings and the trading activity of foreign companies listed on the Warsaw Stock Exchange 240
Dorota Pekasiewicz: Determination of the safety factor based on quantile of the sum of claims distribution in the portfolio of automobile insurance 252
Agnieszka Perepeczo: Market reactions to dividend announcements in public companies – empirical evidence 264
Tomasz Pisula: Methodological aspects of the application of credit scoring models to assess the creditworthiness with the use of quantitative methods 288
Paweł Porcenaluk: The analysis of the selected liquidity risk measures for stocks listed on the Warsaw Stock Exchange in 2001–2011 period 297
Marcin Salamaga: An application of moving average rules for testing the profitability of Polish stock market..... 307
Rafał Siedlecki: Forecasting financial problems of companies based on Hellwig measurement of development 318
Anna Sroczyńska-Baron: The application of the minority games and gambling on the stock exchange..... 327
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Boshnakov's approach to asymmetry – proposal of estimation of sample asymmetry measures 336
Piotr Staszkiewicz: Weryfikacja lematu ujawnienia dla modelu ryzyka reputacji niepublicznych grup kapitałowych z powiązaniami wzajemnymi na polskim rynku firm inwestycyjnych 346
Anna Szymańska: Bayesian estimation of premium rates in motor insurance with selected loss functions 356
Jacek Welc: Forecasted earnings growth of companies and earnings forecast bias – Polish experience..... 365
Jerzy Węcławski: Hybrid loans as an alternative form of corporate finance .. 374

Ryszard Węgrzyn: Analysis of the sensitivity of implied volatility to the underlying instrument of option − a dynamic approach 384
Stanisław Wieteska: Overload of roofs of buildings with snow as an element of risk in property insurance in the Polish climate area..... 396
Zuzanna Wośko: Resilience of the Polish banking sector to external shocks in the context of credit risk. Analysis of the relationship between macroeconomic variables 405
Anna Zamojska: Sharpe ratio – theory and practice..... 414
Aneta Zglińska-Pietrzak: Bootstrap predictions of returns for GARCH processes 422
Monika Zielińska-Sitkiewicz: Assessment of the condition of the Polish real estate market based on the data analysis from the financial statements of developers 437

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 323 • 2013
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski ISSN 1899-3192

Anna Szymańska
Uniwersytet Łódzki

BAYESOWSKIE SZACOWANIE STAWEK SKŁADKI W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH Z WYBRANYMI FUNKCJAMI STRATY

Streszczenie: Ubezpieczenia komunikacyjne stanowią dużą część portfela ubezpieczeń majątkowych większości towarzystw ubezpieczeniowych. Dlatego w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych problem kalkulacji składki jest szczególnie istotny. W pracy przedstawiono zastosowanie metod bayesowskich do wyznaczania zwyżek i zniżek w taryfikacji *a posteriori.* Podjęto próbę oceny, czy funkcja straty wpływa na wartości estymatorów stawek składki.

Słowa kluczowe: stawka składki, estymator bayesowski, liczba roszczeń, ubezpieczenia komunikacyjne.

1. Wstęp

Rynek ubezpieczeń komunikacyjnych w Polsce rozwija się bardzo dynamicznie. Charakteryzuje się dużą koncentracją pod względem udziału poszczególnych towarzystw ubezpieczeniowych w rynku oraz bardzo silną konkurencją, o czym świadczy dynamika udziałów ubezpieczycieli w rynku ubezpieczeń komunikacyjnych. Dlatego towarzystwa ubezpieczeniowe muszą skutecznie wyceniać ryzyko w swoich taryfach. W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC taryfikacja jest dwuetapowa. W pierwszym etapie – nazywanym *a piori* – wyznacza się składkę bazową na podstawie znanych czynników ryzyka (najczęściej są to region rejestracji pojazdu i pojemność skokowa silnika). Następnie w składce bazowej uwzględnia się zwyżki i zniżki, głównie wynikające z przebiegu szkodowości w poprzednim okresie ubezpieczenia. Ten etap nazywany jest taryfikacją *a posteriori*. Zasady udzielania zwyżek i zniżek określane są indywidualnie przez dane towarzystwo ubezpieczeniowe i nazywane systemem *bonus-malus*. Zwyżki i zniżki są określane jako procent składki bazowej i nazywane stawkami składki netto.

W pracy przedstawiono zastosowanie metod bayesowskich do szacowania stawek składki netto w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych OC samochodów osobowych. Do konstrukcji estymatorów zastosowano funkcje straty kwadratową

i liniowo-wykładniczą. Składkę netto wyznaczono na podstawie zasady wartości oczekiwanej. Celem pracy jest ocena, czy postać funkcji straty wpływa istotnie na wartości stawek składki oraz jaki wpływ na wyniki estymacji parametru szkodowości ma dobór stałej w przypadku funkcji straty LINEX. Badania przeprowadzono na podstawie danych rzeczywistych.

2. Estymatory bayesowskie parametru θ dla różnych funkcji straty

Niech $(K_1, \ldots, K_n)$ będzie próbą losową prostą oraz K będzie zmienną losową, której rozkład zależy od parametru θ przybierającego wartości ze zbioru Θ. Oznaczmy przez D zbiór wszystkich możliwych decyzji, a przez d element tego zbioru będący jednowymiarową zmienną losową. Niech (Θ, D, L) będzie grą statystyczną ze zbiorem stanów Θ, zbiorem wszystkich możliwych decyzji D oraz funkcją straty L.

Funkcją straty nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\Theta \times D$, której wartościami są wielkości straty ponoszone na skutek podjęcia określonej decyzji d dotyczącej wartości parametru θ [Domański, Pruska (2000)].

Rozważmy funkcje straty: kwadratową oraz liniowo-wykładniczą (LINEX) odpowiednio dane wzorami

$$L^{(I)}(\theta, d) = c(d-\theta)^2, c > 0, \tag{1}$$

$$L^{(II)}(\theta, d) = b[\exp(a(\theta - d)) - a(\theta - d) - 1], a \neq 0, b > 0. \tag{2}$$

Klasycznie w estymacji bayesowskiej stosuje się kwadratową funkcję straty. Kwadratowa funkcja straty oznacza, że w przypadku przeszacowania i niedoszacowania nieznanego parametru θ o taką samą wartość ma jednakowe znaczenie dla decydenta. Jednak w przypadku ubezpieczeń nie zawsze musi tak być. Przeszacowanie składki może spowodować utratę klienta, a niedoszacowanie składki – straty dla firmy ubezpieczeniowej. A. Zellner zaproponował po raz pierwszy niesymetryczną funkcję straty nazywaną liniowo-wykładniczą [Zellner 1986]. W przypadku funkcji straty LINEX parametr b jest parametrem skali i najczęściej zakłada się że $b = 1$, parametr a jest parametrem kształtu, a jego znak odzwierciedla kierunek asymetrii. Im większy jest $|a|$, tym większa asymetria funkcji LINEX.

Niech K będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w danym roku dla pojedynczej polisy. Wówczas wektor $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ będzie wektorem zaobserwowanej przez t lat liczby szkód dla danej polisy. Parametr szkodowości θ_{t+1} w roku $t + 1$ dla polisy opisanej wektorem obserwacji $(k_1, \ldots, k_t)$ jest nieznany. Parametr ten można oszacować za pomocą estymatora bayesowskiego $\hat{\theta} = \lambda_{t+1}$ na podstawie wektora obserwacji $(k_1, \ldots, k_t)$.

Załóżmy, że rozkład liczby szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest rozkładem Poissona z parametrem θ

$$P(K=k)=\exp(-\theta)\frac{\theta^k}{k!},\ k=0,1,\ldots \tag{3}$$

Niech parametr θ będzie zmienną losową o rozkładzie *a priori* gamma z parametrami α i β o funkcji gęstości danej równaniem

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\beta\theta),\quad \theta>0,\ \alpha>0,\ \beta>0. \tag{4}$$

Wówczas rozkład liczby szkód w portfelu jest ujemny dwumianowy.

Estymatory bayesowskie parametru θ odpowiednio dla funkcji strat opisanych równaniami (1)–(2) są postaci [Lemaire 1985; Boratyńska 2008]:

$$\hat{\theta}_B^{(I)}=\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}=\frac{\alpha+k}{\beta+t}, \tag{5}$$

$$\hat{\theta}_B^{(II)}=\frac{1}{a}(\alpha+k)\ln\frac{\beta+t}{\beta+t-a}, \tag{6}$$

gdzie: $\beta+t-a>0$.

3. Estymatory stawek składki netto

W ubezpieczeniach komunikacyjnych indywidualna składka netto w okresie $t+1$ jest wyznaczana na podstawie równania [Lemaire 1985]:

$$\Pi(X,K)=(EX)\cdot(EK)\cdot b_{t+1}, \tag{7}$$

gdzie: $\Pi(X, K)$ – indywidualna składka netto w okresie $t+1$,
EX – wartość oczekiwana pojedynczej szkody,
EK – wartość oczekiwana liczby szkód z danej polisy,
b_{t+1} – stawka składki w okresie $t+1$.

Każde towarzystwo ubezpieczeniowe musi określić procentowe wartości b_{t+1} nazywane stawkami składki. Przyjmijmy, że $EX=1$ oraz że rozkład liczby szkód w portfelu jest ujemny dwumianowy, wtedy równanie (7) ma postać

$$\Pi(K)=\frac{\alpha}{\beta}\cdot b_{t+1}. \tag{8}$$

Stąd stawka składki wynosi

$$b_{t+1}=\frac{\beta}{\alpha}\Pi(K)\cdot 100\%. \tag{9}$$

Załóżmy, że składka netto jest wyznaczana na podstawie zasady wartości oczekiwanej danej wzorem

$$\Pi(K) = (1+Q)EK, \tag{10}$$

gdzie $Q \geq 0$ nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa. Współczynnik bezpieczeństwa jest ustalany indywidualnie przez każdego ubezpieczyciela, a jego wartość nie jest ujawniana. W pracy przyjęto wartość współczynnika bezpieczeństwa równą 100%. Uwzględniając założenia dotyczące postaci rozkładu liczby szkód oraz wykorzystując estymatory bayesowskie dane wzorami (5) i (6), otrzymujemy następujące postaci składki netto

$$\Pi^{(I)}(K) = (1+Q)\frac{\alpha+k}{\beta+t}, \tag{11}$$

$$\Pi^{(II)}(K) = (1+Q)\frac{1}{a}(\alpha+k)\ln\frac{\beta+t}{\beta+t-a}. \tag{12}$$

Uwzględniając równanie (9) oraz równania (11) i (12) oraz przyjmując $Q = 1$, otrzymujemy odpowiednio stawki składki netto, którą powinien płacić ubezpieczony, który po t latach zgłosił k szkód:

$$b_{t+1}^{(I)} = \frac{\beta(\alpha+k)}{\alpha(\beta+t)} \cdot 100\%, \tag{13}$$

$$b_{t+1}^{(II)} = \frac{\beta}{a\alpha}(\alpha+k)\ln\frac{\beta+t}{\beta+t-a} \cdot 100\%. \tag{14}$$

4. Badanie empiryczne

Badania przeprowadzono na podstawie danych pochodzących z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego dla portfela ubezpieczeń komunikacyjnych OC samochodów osobowych. Z portfela złożonego z 15 878 polis, wylosowano 1000 polis (próba prosta). Wśród wylosowanych polis średnia roczna liczba szkód i wariancja odpowiednio wynosiły $\bar{k} = 0{,}187$; $S_k^2 = 0{,}21$. Oceniono testem zgodności chi-kwadrat zgodność rozkładu liczby szkód z rozkładem ujemnym dwumianowym. Na poziomie istotności 0,05 brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że rozkład liczby szkód jest ujemny dwumianowy.

Estymatory parametrów α oraz β rozkładu ujemnego dwumianowego, wyznaczone metodą momentów [Domański, Pruska 2000], mają postać

$$\tilde{\beta} = \frac{\bar{k}}{S_k^2 - \bar{k}} \quad \text{i} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{k}^2}{S_k^2 - \bar{k}} \cdot \tag{15}$$

gdzie: $\overline{k}$ – wartość średniej liczby szkód,
S_k^2 – wariancja liczby szkód.

Wartości oszacowanych parametrów rozkładu liczby szkód wynoszą: $\widetilde{\beta} = 8{,}1304$ i $\widetilde{\alpha} = 1{,}5204$.

Na podstawie próby oszacowano stawki składki netto za pomocą wzorów (13) i (14), porównano ich wartości oraz zbadano wpływ doboru parametru *a* na kształt funkcji straty LINEX.

W tabeli 1 porównano stawki składki oszacowane dla funkcji straty kwadratowej oraz linowo-wykładniczej z parametrem *a* = 0,4. Otrzymane stawki składki są nieznacznie większe w przypadku kwadratowej funkcji straty. W tabelach 2 i 3 oraz na wykresach 1, 2 przedstawiono stawki składki otrzymane dla funkcji liniowo-wykładniczej z różnymi parametrami kształtu *a*. W literaturze parametr kształtu funkcji straty LINEX często jest związany z miarą awersji do ryzyka Arrowa-Pratta

Tabela 1. Stawki składki netto (%) oszacowane z wykorzystaniem kwadratowej funkcji straty (SQR) oraz liniowo-wykładniczej funkcji straty (LINEX, *a* = 0,4)

k	*t*							
	0		1		2		3	
	SQR	LINEX	SQR	LINEX	SQR	LINEX	SQR	LINEX
0	100	100	89	88	80	79	73	72
1			148	147	133	132	121	120
2			206	205	186	184	169	167
3			265	263	239	236	217	215
4			323	321	291	289	265	262

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Stawki składki netto (%) oszacowane z wykorzystaniem liniowo-wykładniczej funkcji straty (LINEX) dla *t* = 0 i *t* = 1 oraz różnych wartości parametru *a* funkcji LINEX

k	*t*											
	0						1					
	a						*a*					
	–8,1	–5,4	–0,4	0,4	5,4	8,1	–8,1	–5,4	–0,4	0,4	5,4	8,1
0	100	100	100	100	100	100	92	91	89	88	82	39
1							152	151	147	147	136	65
2							213	210	206	205	190	90
3							273	270	264	263	244	116
4							333	330	323	321	298	142

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Stawki składki netto (%) oszacowane z wykorzystaniem liniowo-wykładniczej funkcji straty (LINEX) dla $t = 2$ i $t = 3$ oraz rożnych wartości parametru a funkcji LINEX

k	t											
	2						3					
	a						a					
	–8,1	–5,4	–0,4	0,4	5,4	8,1	–8,1	–5,4	–0,4	0,4	5,4	8,1
0	85	84	80	79	70	29	79	77	73	72	61	23
1	141	138	133	132	116	48	131	128	121	120	101	39
2	197	193	186	184	162	67	183	179	169	167	141	54
3	252	248	239	236	208	86	235	230	218	215	181	69
4	308	303	292	289	254	104	287	281	266	262	221	85

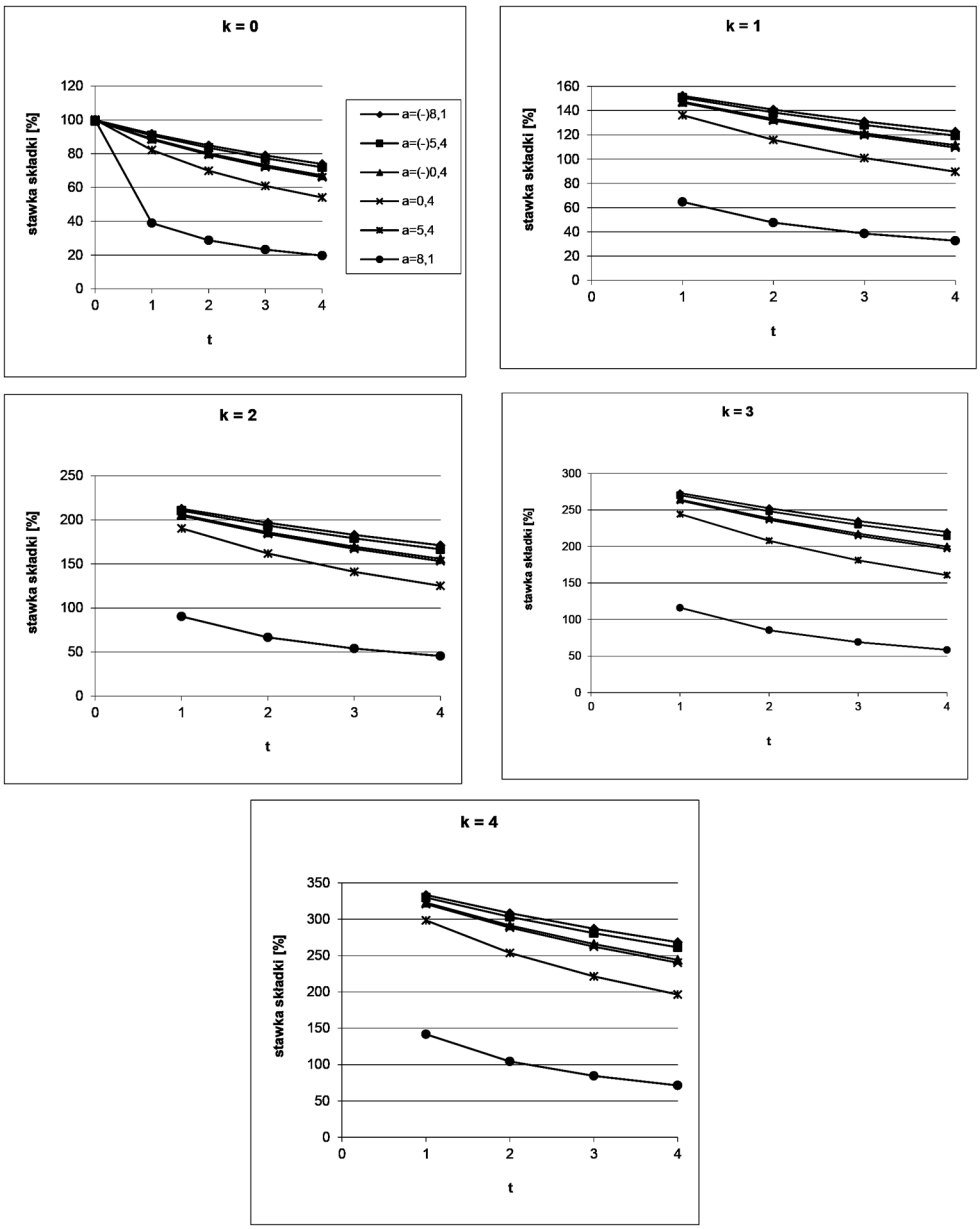
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Stawki składki netto oszacowane z wykorzystaniem liniowo-wykładniczej funkcji straty (LINEX) dla $t = 4$ oraz rożnych wartości parametru a funkcji LINEX

k	$t = 4$					
	a					
	–8,1	–5,4	–0,4	0,4	5,4	8,1
0	74	72	67	66	54	20
1	123	119	112	110	90	33
2	171	167	156	153	125	46
3	220	214	200	197	161	59
4	268	261	244	240	196	72

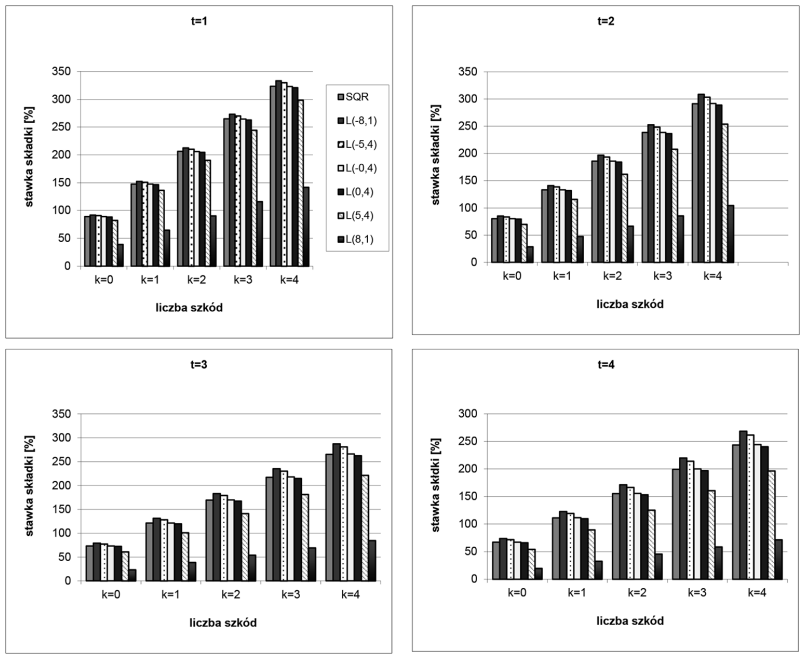
Źródło: obliczenia własne.

i przyjmowany w granicach $0{,}4 \le a \le 11{,}5$. Jednak w literaturze aktuarialnej można znaleźć opracowania, w których rozważa się różne wartości tego parametru, łącznie z ujemnymi [Boratyńska 2008; Jasiulewicz, Kordecki [2011]. W przypadku danych rzeczywistych ograniczeniem jest dziedzina $\beta + t - a$ □ 0 logarytmu we wzorze (14), czyli $|a| < \widetilde{\beta}$. Stąd w pracy parametr kształtu $a \in (-8{,}1304;\ 8{,}1304)$. W analizowanych przypadkach największe stawki uzyskano dla najmniejszej przyjętej wartości parametru kształtu funkcji LINEX, natomiast najmniejsze stawki dla największej wartości parametru a. Rysunek 3 prezentuje postać funkcji LINEX w zależności od parametru kształtu a i wartości straty.



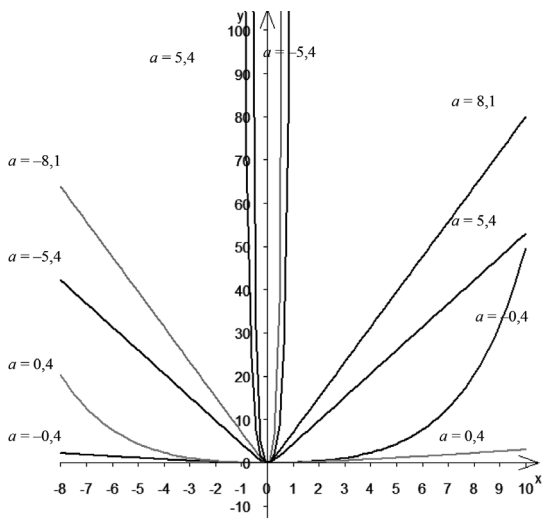
Rys. 1. Wartości stawek składki netto oszacowane z wykorzystaniem funkcji straty LINEX w zależności od parametru kształtu *a* funkcji LINEX dla różnej liczby szkód *k*

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wartości stawek składki netto w zależności od funkcji straty oraz liczby szkód *k* dla różnych wartości *t*

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Funkcja LINEX w zależności od parametru kształtu *a* oraz straty $x = \theta - d$

Źródło: opracowanie własne.

5. Wnioski

We wszystkich przypadkach estymatory stawek składki rosną wraz ze wzrostem liczby spowodowanych szkód k dla danego t (por. rys. 2). Dla danej liczby szkód natomiast maleją wraz ze wzrostem t (por. rys. 1), czyli wraz z dłuższą historią szkodowości kierowcy. Świadczy to o poprawności oszacowań. Maksymalne stawki składki netto otrzymano dla $k = 4$ i $t = 1$. Przy tym wartości estymatorów zależą od przyjętej funkcji straty, a w przypadku założenia liniowo-wykładniczej funkcji straty od parametru kształtu tej funkcji. Im parametr kształtu funkcji starty LINEX jest mniejszy, tym wyższe stawki składki. W przypadku najwyższych stawek składki, czyli dla $k = 4$ i $t = 1$, mamy: dla $a = -8{,}1$ stawkę 333%, dla $a = 8{,}1$ stawkę 142%, dla kwadratowej funkcji straty stawka wynosi 323%. Im parametr kształtu funkcji straty LINEX jest bliższy zera, tym stawki bardziej zbliżone do stawek oszacowanych z wykorzystaniem kwadratowej funkcji straty, czego można było oczekiwać. Okazuje się, że duże różnice parametrów kształtu funkcji LINEX skutkują dość dużymi różnicami w stawkach składki netto. Dla $a = 8{,}1$ stawki składki są w granicach od 20% (dla $k = 0$ i $t = 4$) do 142% (dla $k = 4$ i $t = 1$); dla $a = -8{,}1$ stawki składki są w granicach od 67% (dla $k = 0$ i $t = 4$) do 333% (dla $k = 4$ i $t = 1$). Dla kwadratowej funkcji straty stawki są w granicach od 67% do 323%. Już A. Zellner [1986] zauważył, że niedoszacowanie i przeszacowanie estymowanego parametru o tę samą wartość nie prowadzą do jednakowych skutków ekonomicznych i społecznych. Przyjmując kwadratową funkcję straty, zakładamy, że skutki ekonomiczne przeszacowania i niedoszacowania składki o tę samą wartość są jednakowe. Jest zatem uzasadnione stosowanie asymetrycznej funkcji straty n.. liniowo-wykładniczej. Jeżeli $a < 0$, to strata jest liniowa przy przeszacowaniu estymatora parametru θ, wykładnicza przy niedoszacowaniu estymatora parametru θ (por. rys. 3). Dla $a > 0$ odwrotnie. Zatem dla $a < 0$ niedoszacowanie spowoduje dużo większe straty niż przeszacowanie. W przypadku $a > 0$ odwrotnie. Bardziej problematyczny jest wybór wartości parametru $|a|$. Rozsądną wartością wydaje się w tym przypadku uśredniona wartość z dopuszczalnego przedziału ze względu na ograniczenia wyznaczane przez rynek, co do wartości stawek składki w funkcjonujących na rynku towarzystwach ubezpieczeniowych. Dalsze badania można prowadzić z wykorzystaniem metod symulacyjnych. Można również spróbować tak dobrać parametr a, aby zminimalizować ryzyko bayesowskie. W pracy nie poddano ocenie ryzyka bayesowskiego w przypadku rozważanych funkcji straty, co może stanowić temat dalszych badań. Problem odporności bayesowskiej przedstawiono np. w pracy [Męczarski 1998]. Według autora estymatory bayesowskie w szacowaniu składek ubezpieczeniowych są „możliwie stabilnymi rozwiązaniami, «nieufnymi» wobec chwilowych głębokich zniżek empirycznego poziomu ryzyka, ale także nie zawyżającymi tego poziomu (i nie odstraszającymi przeciętnych klientów przesadnymi składkami) w sytuacji istniejących szans wystąpienia wielkich szkód" [Męczarski 1998, s. 151]. Z punktu widzenia ubezpieczyciela ocena wyników estymacji stawek składki sprowadza się do oceny efektywności funkcjonowania systemu *bonus-malus*.

Literatura

Boratyńska A., 2008, *Posterior Regret Gamma-Minimax Estimation of Insurance Premium in Collective Risk Model*, ASTIN Bulletin 38, s. 277–291.

Domański C., Pruska K., 2000, *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa.

Jasiulewicz H., Kordecki W., 2011 *Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 207.

Lemaire J., 1985, *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Kluwer, Boston.

Męczarski M., 1998, *Problemy odporności bayesowskiej w analizie statystycznej*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.

Zellner A., 1986, *Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions*, Journal of American Statistical Association, vol. 81, no. 394, s. 446–451.

BAYESIAN ESTIMATION OF PREMIUM RATES IN MOTOR INSURANCE WITH SELECTED LOSS FUNCTIONS

Summary: Motor insurance is a large part of the portfolio of property insurance of most insurance companies. Therefore, in the case of motor vehicle insurance the problem of premium calculation is particularly important. This paper presents an application of Bayesian methods to determine the increases and reductions in *a posteriori* tariffs. An attempt of the evaluation whether the loss function influences values of estimators of premium rates was made.

Keywords: Rates of premiums, Bayes estimator, claim frequency, civil responsibility car insurance.