

Polskie Towarzystwo Statystyczne
Oddział we Wrocławiu

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Silesian Statistical Review

Nr 14 (20)



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

RECENZENCI WSPÓŁPRACUJĄCY Z CZASOPISMEM

Milan Bašta, Tadeusz Borys, Mariusz Czekala, Jakub Fisher, Ewa Frątczak, Stanisława Hronová, Helena Jasiulewicz, Alina Jędrzejczak, Wojciech Kordecki, Ryszard Kryszewski, Dorota Kuchta, Jitka Langhamrová, Tomáš Loster, Ivana Malá, Krystyna Melich, Zofia Mielecka-Kubień, Witold Miszczak, Juliusz Siedlecki, Jaroslav Sixta, Włodzimierz Szkutnik, Jerzy Wawrzynek, Witold Więśław, Jiří Witzany, Emília Zimková

RADA NAUKOWA

Walenty Ostasiewicz (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska)

Tadeusz Bednarski (Uniwersytet Wrocławski, Polska)

Ivan Belko (Belarusian State University, Belarus)

Luisa Canal (University of Trento, Italy)

Karlheinz Fleischer (Philipps-Universität Marburg, Germany)

Francesca Greselin (University of Milano-Bicocca, Italy)

Stanisław Heilpern (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska)

Stanislava Hronová (VSE Prague, the Czech Republic)

Salvatore Ingrassia (University of Catania, Italy)

Jerzy Śleszyński (Uniwersytet Warszawski, Polska)

Halina Woźniak (Urząd Statystyczny we Wrocławiu, Polska)

Michele Zenga (University of Milano-Bicocca, Italy)

Emília Zimková (Matej Bel University Banská Bystrica, Slovakia)

Ricardas Zitikis (University of Western Ontario, Canada)

KOMITET REDAKCYJNY

Zofia Rusnak (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska) –
redaktor naczelny

Katarzyna Ostasiewicz (Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Polska)

Angiola Pollastri (University of Milano-Bicocca, Italy)

Grażyna Trzpiot (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Polska)

Reinhard Viertl (Vienna University of Technology, Austria)

Edyta Mazurek – sekretarz

edyta.mazurek@ue.wroc.pl

+48 71 71 36 80 325

Spis treści

Aims and scope 5

- Oscar Sheynin:** On the history of university statistics 7
- Marian Matloka:** h -Preinvex fuzzy processes 27
- Joanna Dębicka, Beata Zmyślona:** Construction of multi-state life tables for critical illness insurance – influence of age and sex on the incidence of health inequalities 41
- Wiktor Ejsmont:** Podstawowe pojęcia wolnej probabilistyki 65
- Edyta Mazurek:** Podatek dochodowy w kontekście rodziny 75
- Katarzyna Ostasiewicz:** Kto co konsumuje i czy wystarczająco dużo: gospodarka i bieda, czyli Nagroda imienia Nobla z dziedziny ekonomii dla Angusa Deatona (2015) 89
- Agnieszka Thier:** Analiza sposobów pomiaru oraz skutków deficytu zasobów wodnych na świecie 111
- Damian Gąska:** Wykorzystanie sieci bayesowskich do prognozowania bankructwa firm 131
- Walenty Ostasiewicz:** Metabometria 145
- Monika Hadaś-Dyduch:** Iluzja, marzenia a rzeczywistość – bezpośrednia i niebezpośrednia inwestycja w indeksy giełdowe na przykładzie produktów inwestycyjnych 185
- Agnieszka Marciniuk:** 23. Scientific Statistical Seminar “Wrocław-Marburg” 203
- 23. Scientific Statistical Seminar “Wrocław-Marburg”, Pottenstein-Kirchenbirkig, 28.09.2015 – 1.10.2015.**
Extended Abstracts 207
- Beata Zmyślona:** Application of Mathematics and Statistics in Economics. The 18th International Scientific Conference 229
- Tadeusz Gerstenkorn:** Włodzimierz Kryszicki matematyk-stochastyk (1905–2001) 233
- Walenty Ostasiewicz:** Profesor Ryszard Antoniewicz (19.08.1939 – 20.02.2015) 243
- Walenty Ostasiewicz:** Nobel, Non Nobel, Ig Nobel, and Alternative Nobel Prizes 251
- Agata Girul:** Ważniejsze dane społeczno-gospodarcze o województwach 255

Summaries

- Oscar Sheynin:** On the history of university statistics 7
- Marian Matłoka:** h-Preinvex fuzzy processes 27
- Joanna Dębicka, Beata Zmyślona:** Construction of multi-state life tables for critical illness insurance – influence of age and sex on the incidence of health inequalities 41
- Wiktor Ejsmont:** Basic concepts of free probability theory 73
- Edyta Mazurek:** The income tax in the context of the family 87
- Katarzyna Ostasiewicz:** Who consumes what and is it enough: economy and poverty. Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel for Angus Deaton (2015) 110
- Agnieszka Thier:** Analysis of ways of measurement and the consequences of water shortage in the world 128
- Damian Gąska:** Bankruptcy prediction with Bayesian networks 143
- Walenty Ostasiewicz:** Metabometrics 182
- Monika Hadaś-Dyduch:** The illusion, dreams and reality – direct and indirect investment in stock indices on the example of investment products 201

Aims and scope

Aims and scope of this journal were determined already in the period of the historical changes that took place in 1989 in the Europe, which had a great meaning for Poland, especially for the subsequent political and economic transformations. The introduction of the democratic system, and the transition from the state-controlled economy to the free market one were the driving forces behind the new Polish economy.

In the early 1990s, Poland made great progress towards achieving a fully democratic government and a market economy. In November 1990, Lech Wałęsa was elected President for a 5-year term. In 1991 were held the first free parliamentary elections. In the same year, 1991, the first issue of the journal was published under the title *Statistical Review of Lower and Opole Silesia*. In the foreword of that first issue it was stated what follows. “The changes in the socio-economic life of Lower Silesia and Opole region caused the Council of Wrocław Branch of Polish Statistical Society to publish Statistical Review of Lower and Opole Silesia, starting from the year 1991. This idea could come to life thanks to the generous help of directors of Voivodeship Statistical Offices in Jelenia Góra, Legnica, Wałbrzych and Wrocław, with a special involvement of the director of Statistical Office in Wrocław”. The initial goal of the founders of the journal was to dedicate the journal to “ecological problems, demographic issues as well as social and economic well-being”.

Starting in the year 2002 the journal has been published with a new layout and under a new title: *Silesian Statistical Review*. Together with *Statistical Review (Przegląd Statystyczny)* and *Statistical News (Wiadomości Statystyczne)*, *Silesian Statistical Review* is now one of the three major journals in Poland dedicated to general statistical problems. Special attention has been focused on general methodological issues, as well as on the applications of various statistical methods in solving real social and economic problems. Papers concerning all topics of quality of life are published regularly. Historical essays are included on regular basis.

After 25 years of the existence, by entering in the next quarter of the century of its existence with the issue of 2016, the main scope of journal is amplified. This is again caused by changes which took place on the

whole planet. In order to meet the challenge mounted by dramatic consequences of human dominance over the planet the scope of journal has been amplified to include any problems concerning the quality of human life, respecting all other forms of lives and not compromising the possibilities for future generations to live their ways of life.

Starting from the year 2016, *Silesian Statistical Review* is considered as a *Journal of Oikometrics*

The name, derived from Greek words *οικος* and *μετρο*, suggests that the journal focus is upon Nature's house (*oikos*), as a subject matter of a study, and the measurement, as a prevailing methodology of study. The journal is treated as an *interdisciplinary forum on a sustainable livelihood*. Contrary to the inscription on the door of Plato's Academy: *let no one ignorant of geometry enter here*, over the door to *Journal of Oikometrics* there is hanged the signboard with the inscription: *Everyone who cares about, and interested in any issue of sustainable livelihood is welcomed here*.

The Journal welcomes therefore papers from specialists in sustainability science, ecology, ecological economics and any other alternatives to neoclassical economics. It encompasses – but is not limited to – the following topics:

- actuarial methods and their applications,
- social justice, inequality, polarization, and stratification,
- quality of institutional performance,
- social metabolism, its measurement and analysis,
- statistical education,
- sustainable development,
- environmentalism.

As the official journal of the Polish Statistical Society, Branch in Wrocław, it is designed also to attract papers that have direct relation with the activity of the Society, particularly in the field of education, promotion and rising awareness of the statistics role in the civilization development.

Walenty Ostasiewicz

PROFESOR RYSZARD ANTONIEWICZ (19.08.1939 – 20.02.2015)

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 14(20)

Walenty Ostasiewicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739
e-ISSN 2449-9765

DOI: 10.15611/sps.2016.14.15

Ryszard Antoniewicz, syn Ireny i Mieczysława, urodził się 19 sierpnia 1939 r. w Weronowie koło Wilna. Zaraz po wojnie, w 1945 r., w ramach repatriacji, cała rodzina osiedliła się we Wschowie. Wschowa jest to miejscowość mająca ważne miejsce w historii Polski. Znana co najmniej od 1136 r., jako wieś biskupów gnieźnieńskich. Uważana była później za nieoficjalną, drugą stolicę Polski. Król Polski August III Wettin (1696–1763) w Polsce nie lubił przebywać, wolał Drezno. Wschowa (niem. Fraustadt) leżała blisko Drezna, więc król tu przyjeżdżał (jeśli musiał). Obradował tu także senat. R. Antoniewicz zaś rozpoczął tu swoją edukację. Ukończył tu szkołę podstawową oraz Liceum Ogólnokształcące. W 1958 r. rozpoczął studia na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii na Uniwersytecie Wrocławskim, specjalizując się na kierunku fizyki teoretycznej. Jeszcze w trakcie studiów, w 1960 r., w czasie wakacji, ożenił się z Anną Dawidowicz, studentką medycyny. Dwa lata po poślubie, 5 października 1962 r., jeszcze jako studenci, zostali rodzicami córki Beaty Katarzyny. Studia ukończył w 1964 r., po obronie pracy magisterskiej *Teoria estymacji a teoria informacji*, przygotowanej pod kierunkiem R.S. Ingardena. Po ukończeniu studiów, od 16 października 1964 do 30 września 1968 r. pracował w Zakładzie Niskich Temperatur w Instytucie Fizyki PAN we Wrocławiu, najpierw jako asystent, później jako starszy asystent. Tam też rozpoczął przygotowywanie rozprawy doktorskiej *Temperatury wyższych rzędów w uogólnionej termodynamice statystycznej promieniowania koherentnego w wyższym rzędzie* pod kierunkiem prof. R.S. Ingardena. W związku z przejściem prof. Ingardena do pracy na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, R. Antoniewicz 1 października 1968 r. także rozpoczął pracę w Toruniu w Katedrze Termodynamiki i Teorii Promieniowania. Pracował tam jednak tylko



do 30 września 1969 r., gdyż z powodów rodzinnych postanowił wrócić do Wrocławia. Jako nauczyciel pracował w słynnej wrocławskiej siódemce oraz w Technikum Mechanicznym.

KWESTIONARIUSZ OSOBOWY						
1. Dane ogólne						
a) nazwisko i imię imię ojca		a) Antoniewicz Ryszard, Mieczysław				
b) nazwisko panieńskie (dla mężatek)		b) nie dotyczy				
c) w przypadku zmiany podać nazwisko rodowe		c) nie dotyczy				
2. Data i miejsce urodzenia		19. VIII. 1939 Wieronowo (ZSRK)				
3. Narodowość	4. Obywatelstwo	5. Pochodzenie społeczne	6. Stan cywilny	7. Stan rodzinny		
Polska	Polska	robotnicze	żonaty	trzy osoby		
8. Wykształcenie (podać nazwy zakładów naukowych):						
Uniwersytet Wrocławski, Wydział Mat.-Fiz.-Chem.						

1 października 1970 r. został zatrudniony jako starszy asystent w Zakładzie Chemii Nieorganicznej ówczesnej Wyższej Szkoły Ekonomicznej we Wrocławiu (dzisiejszy Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu).

Pracę doktorską obronił 19 kwietnia 1973 r. na Uniwersytecie w Toruniu. Tego samego roku złożył podanie do Rektora WSE z prośbą o przeniesienie go do Instytutu Metod Rachunku Ekonomicznego kierowanego przez prof. Z. Hellwiga. Od 1 października 1973 r. pracował jako adiunkt w Katedrze Statystyki, będącej w ramach tego Instytutu. W 1989 r. uzyskał tytuł doktora habilitowanego na podstawie rozprawy *Metoda najmniejszych kwadratów dla zależności niejawnych i jej zastosowania w ekonomii*, opublikowanej w 1988 r. w *Pracach Naukowych Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 445.

W 1990 r., za porozumieniem kierowników Katedr Statystyki (prof. Z. Hellwiga) i Matematyki (prof. A. Smoluka) przeszedł do pracy w Katedrze Matematyki, gdzie pracował do 2005 r.

Ryszard Antoniewicz był człowiekiem o wyrazistej i ciekawej, acz skomplikowanej osobowości. Był pogodnym, dobrym i życzliwym kolegą. Miał przysłowiową duszę słowiańską. Obce mu było uczucie zawiści czy zazdrości, bardziej ekstrawertyk niż zamknięty w sobie introwertyk. Lubił spotkania koleżeńskie, prawie wszystkie obfitowały w dyskusje naukowe. Bardzo lubił współpracować, większość jego prac powstawała we współautorstwie. On jednak był zawsze pomy-

śłodawcą, miał bowiem osobowość twórcy. Wiele osób skorzystało z jego sugestii, wiele osób dzięki tej współpracy wspięło się po drabinie kariery naukowej, ale, jak to w życiu bywa, o wdzięczności się nie pamięta. Zacytuję tu powtarzane wielokrotnie przez Antoniewicza rzekome powiedzenie Stalina o tym, co to jest wdzięczność, miał ponoć odpowiedzieć: *eto sobaczaja bolezn*. O należną mu wdzięczność jednak nie zabiegał, nie domagał się jej. Z tymi zaś, którzy nawet zupełnie brutalnie, choć niejawnie, demonstrowali swą wrogość wobec Niego, nie walczył, nie było to w jego charakterze, takich po prostu lekceważył. Charakter miał dość skomplikowany, bo z jednej strony bardzo łagodny, a z drugiej – stanowczy, a nawet apodyktyczny. Wychowywał się w warunkach raczej surowych. Bez wyrzutu jednak czy żalu, a raczej z aprobatą i dumą podkreślał dyscyplinę, jaka panowała w domu. Wzorce ze swego dzieciństwa i młodości, w unowocześnionej formie, chciał stosować w założonej przez siebie rodzinie. Nie bardzo rozumiał, dlaczego jego wysiłki nie spotykały się ze zrozumieniem. Był bardzo pryncypialny, przestrzegania zasad, które uważał za słuszne, oczekiwał też od innych. Nie wymagał tego, ale oczekiwał. To oczywiście nie przysparzało mu przyjaciół. Z dużą estymą odnosił się do osób mądrych, poważnie traktujących pracę naukową i zajęcia ze studentami, mających wyraźną osobowość. Jedną z takich osób był prof. Zdzisław Hellwig, który bardzo cenił Ryszarda Antoniewicza, często z nim dyskutował, dyskusje dotyczyły i spraw czysto naukowych, i problemów filozoficznych. Obaj z dużą sympatią odnosili się do „Wschodu”, obaj przecież pochodzili z tych samych terenów Wileńszczyzny. Ogromną estymą darzył powszechnie szanowanego i lubianego Profesora Kazimierza Zajęca z Krakowa. Nie potrafił nawet ukrywać swego braku szacunku dla miernoty naukowej czy tzw. celebrytów naukowych. Osoby takie charakteryzował cytatami z Gombrowicza, którego chyba bardzo lubił. Mimo iż miał powody ku temu, sam zarozumiały nie był. Był wszechstronnie odczytany i wykształcony, był przecież fizykiem z wykształcenia, znał więc matematykę nie tylko ze strony formalnej, ale też znał jej związki ze światem realnym, czyli fizycznym. Nieobca mu była filozofia. Inklinacje materialistyczne uwidaczniał między innymi częstym cytowaniem Lukrecjusza. Z kolei do Kotarbińskiego odnosił się z dużą rezerwą, wręcz niechęcią. Nie znał jednak Tatarkiewicza, po mojej entuzjastycznej opinii o jego trzytomowej historii filozofii, postanowił z niej zrobić prezent na osiemnaste urodziny swej ukochanej córeczki Kasi, gdyż zawsze używał jej drugiego imienia. Był miłośnikiem przyrody, na

polance leśnej w Ostrowinie miał swoją własną pasiekę złożoną z pięciu uli. Kochał życie.

Aktywność naukowa i towarzyska znacznie straciła impet po poważnym wypadku samochodowym. Po tym wypadku, który wydarzył się na pl. Grunwaldzkim, Ryszard Antoniewicz przyszedł na Uczelnię przy ulicy Komandorskiej, aby odwołać zajęcia, a następnie udał się na Pogotowie Ratunkowe, gdzie pracowała jego żona Anna, i tam dopiero stracił przytomność. Dość długo był w szpitalu, gdzie przeszedł skomplikowaną operację. Od tego czasu inaczej spoglądał na świat. Sam pobyt w szpitalu przeżył bardzo boleśnie. Z czym musiał się tam zmagać, niech świadczy chociażby to, że do toalety udał się wraz z całą kroplówką. Na moje zdziwienie, odrzekł: jak mogłem inaczej? Ciągłot „rewolucyjnych” nie miał, zdecydowanie stał jednak po stronie Solidarności. Przez jakiś czas to właśnie w mieszkaniu Antoniewiczów ukrywał się Kornel Morawiecki, założyciel Solidarności Walczącej. Posługiwał się nawet dowodem osobistym R. Antoniewicza, o czym jego żona Anna z przerażeniem się dowiedziała dopiero w momencie, gdy ten dowód był mu zwrócony w jej obecności.

W 2005 r. Ryszard Antoniewicz zdecydował się przejść na wcześniejszą emeryturę. Decyzja ta nie była chyba łatwa, ale „jedynie słuszna”. Złożyło się na nią kilka przyczyn. Z nieznanymi mi powodów dał się wciągnąć w nieszkodliwe intrygi, bardzo infantylne, raczej śmieszne niż groźne. Niektórzy jednak bezkrytycznie traktowali te plotkę wzmacniane „podchody” niemal jak przygotowywanie zamachu stanu. W chwilach potrzeby został opuszczony nawet przez tych, od których spodziewał się zasłużonego uznania, a przede wszystkim wsparcia. Po cichu, bez narzekań, z filozoficznym spokojem w 2005 r. definitywnie odszedł z Uczelni, zrywając z nią wszelkie kontakty. Jego śmierć nie została nawet w żaden sposób oficjalnie odnotowana na Uczelni. Po dziesięciu latach prawie o Nim zapomniano. Jego wyniki naukowe na pewno nie będą zapomniane. W historii nauki wiele jest przykładów gdy nawet przełomowe osiągnięcia odkrywane są na nowo nawet po kilkudziesięciu latach.

Jest duże prawdopodobieństwo, że w przyszłości ktoś napisze pracę o aproksymacji zadanego zbioru punktów za pomocą krzywych algebraicznych, a ktoś inny odkryje, że niejaki Antoniewicz wiele lat temu napisał książkę na ten temat, opublikowaną w lokalnym Wydawnictwie, którą mało kto się wówczas zainteresował. Nie znam przyczyn, dla których ta książka nie została opublikowana w znanej serii Komitetu Ekonometrii i Statystyki PAN. Z rekomendacją, w po-

staci pisma do W. Sadowskiego, o opublikowanie jej wystąpił Zdzisław Hellwig.

Problematyka, której Prof. Ryszard Antoniewicz poświęcił wiele prac, dotyczyła geometrii analitycznej. Twórcą jej był Kartezjusz, który w 1637 r. wynalazł sposób badania obiektów geometrycznych za pomocą środków algebry i analizy matematycznej. Niedługo po tym zaczęto też badać zagadnienie odwrotne, tzn. dla danego obiektu geometrycznego poszukiwano jego opisu analitycznego. Badane obiekty były jednak dość „regularne”, musiały przede wszystkim mieć gładkie brzegi. Dopiero po 300 latach matematyk ukraiński W.Ł. Rwaczew opracował teorię R -funkcji pozwalającą analitycznie opisywać dowolne obiekty geometryczne, nawet zadane oddzielnymi kawałkami. Ryszard Antoniewicz „odkrył” tę pracę, znał bowiem chyba wszystko, co dotyczyło matematyki i było wydane po rosyjsku. Wydawano zaś dużo ciekawych książek, które można było kupić w tzw. ruskich księgarniach po bardzo przystępnych cenach. Jeśli czegoś nie mógł kupić w Polsce, to kupował nawet w braterskiej Czechosłowacji. W swojej monografii o uogólnionej metodzie najmniejszych kwadratów Ryszard Antoniewicz przedstawił teorię Rwaczewa. Sądzę, że jest to jedyne opracowanie w języku polskim tej teorii. Oryginalnej pracy Rwaczewa nie ma prawdopodobnie w żadnej bibliotece w Polsce. Chociażby z tego względu rozprawa habilitacyjna Ryszarda Antoniewicza stanowi wyjątkową pozycję w polskim piśmiennictwie naukowym. Rozprawa ta jest wyjątkowa także z innego względu. Każda rozprawa habilitacyjna, jak to jasno wynika z ich recenzji, stanowi „wielki wkład do nauki”, czasem jest on „istotnym” wkładem. Rozprawa Ryszarda Antoniewicza jest jedną z nielicznych, w której ten wkład jest konkretny, niemal na każdej stronie są konkretne wyniki własnych dociekań naukowych lub też własne, nowe i ciekawe spojrzenie i nowa interpretacja wyników znanych już wcześniej.

Jeden z problemów, którymi się zajmował i który rozwiązał, polegał na tym, aby zadany skończony zbiór punktów (obserwacji, pomiarów) zastąpić wzorem funkcji matematycznej, której wykres przebiega najbliżej tych punktów.

Idę teorii Antoniewicza łatwo uchwycić, gdy się ograniczy do przypadku dwuwymiarowego.

Założmy, że dwie wielkości (ekonomiczne, fizyczne, psychiczne) związane są ze sobą według prawa opisanego za pomocą niejawniej funkcji $f(x, y) = 0$. Założmy, że danych jest n pomiarów obu wielkości, traktowanych jako zbiór: $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Jeżeli dwie wielkości są rzeczywiście związane według podanego prawa oraz pomiary są dokładne, to dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ mamy następującą równość: $f(x_i, y_i) = 0$. Oznacza to, że wszystkie punkty spełniają równanie $f(x, y) = 0$. Zwykle albo „prawo” znamy tylko w przybliżeniu, albo pomiary są obciążone błędem. W przypadku takim, podane równanie nie będzie spełnione przez wszystkie punkty. Jako miarę niespełnienia równania Ryszard Antoniewicz przyjmuje wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$\Delta(f, A) = \sum_A f^2(x, y).$$

Załóżmy, że dana jest funkcja $f: R^2 \rightarrow R$ występująca w tym wzorze, oraz że na zbiorze $A \subset R^2$ określona jest miara dodatnia μ . Uważamy, że element (punkt) $(x, y) \in R^2$ spełnia równanie $f(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^2(x, y)\mu(dxdy) = 0$.

Miara niespełnienia równania $f(x, y) = 0$ przez elementy zbioru A jest następująca:

$$\Delta(f, A) = \int_A f^2(x, y)\mu(dxdy).$$

W przypadku ogólnym ma ona postać:

$$\Delta(f, A) = \int_A f^2(z)\mu(dz),$$

gdzie $f: R^n \rightarrow R$, $z \in R^n$, oraz $A \subset R^n$.

Na podstawie tej miary niespełnienia równania Ryszard Antoniewicz zdefiniował uogólnioną metodę najmniejszych kwadratów dla funkcji uwikłanych. Przyjął w tym celu, że zadana jest pewna klasa funkcji $f \in \Phi$ oraz zbiór elementów A .

Idea uogólnionej metody najmniejszych kwadratów polega na tym, że w zadanym zbiorze Φ szukamy takiej funkcji, dla której równanie $g(x) = 0$ jest najlepiej spełnione przez punkty zbioru A . „Najlepiej” oznacza spełnienie następującej równości:

$$\min_{f \in \Phi} \Delta(f, A) = \Delta(g, A).$$

Przyjmijmy dla przykładu, że dany jest zbiór punktów na prostej rzeczywistej.

Jeśli chcemy go aproksymować za pomocą JEDNEGO punktu, to jako zbiór Φ przyjmujemy zbiór funkcji $\{x - m = 0 \mid m \in R\}$, czyli równań określających jeden punkt. Korzystając z równania dwóch punktów, $(x - m_1)(x - m_2) = 0$, możemy zastąpić zadany zbiór punktów dwoma punktami. Jeśli zaś są to punkty na płaszczyźnie

i chcemy je zastąpić JEDNYM punktem, to korzystamy z równania określającego jeden punkt na płaszczyźnie: $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 0$. Równanie dwóch punktów $((x - a)^2 + (x - b)^2)((x - c)^2 + (x - d)^2) = 0$ służy do znalezienia dwóch punktów (a, b) , i (c, d) , które najlepiej aproksymują zadany zbiór. Te dwa punkty Ryszard Antoniewicz nazywał *biśrednią* skończonego układu punktów na płaszczyźnie. Współrzędne biśredniej określają następujące wzory (wyprowadzone w pracy *O średnich i przeciętnych*, wydanej w 2005 r. przez Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu):

$$a = \frac{(c^2+d^2)[x]-2c[x^2]-2d[xy]+[x^3+xy^2]}{(c^2+d^2)[1]-2c[x]-2d[y]+[x^2+y^2]} ,$$

$$b = \frac{(c^2+d^2)[y]-2d[y^2]-2c[xy]+[x^3+xy^2]}{(c^2+d^2)[1]-2c[x]-2d[y]+[x^2+y^2]} ,$$

$$c = \frac{(c^2+d^2)[x]-2a[x^2]-2b[xy]+[x^3+xy^2]}{(c^2+d^2)[1]-2c[x]-2d[y]+[x^2+y^2]} ,$$

$$d = \frac{(c^2+d^2)[y]-2b[y^2]-2a[xy]+[x^3+xy^2]}{(c^2+d^2)[1]-2c[x]-2d[y]+[x^2+y^2]} ,$$

gdzie $[x^k] = \sum_A x_i^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ są to symbole (oznaczenia) Gaussa, które Ryszard Antoniewicz konsekwentnie stosował w swoich pracach. Przykładowo dla $k = 0, 1$ i 2 mamy

$$[x^0] = \sum_A 1 , \quad [x] = \sum_A x_i , \quad [x^2] = \sum_A x_i^2 .$$

Do obliczenia wartości współrzędnych trzeba zastosować metodę iteracyjną.

Do aproksymacji linią prostą służy równanie $y - xa - b = 0$, które określa linię prostą. Miara niespełnienia tego równania przez punkty ze zbioru A wynosi $\Delta(f, A) = \Delta(a, b, A) = \sum_A (y - xa - b)^2$. Minimalizując tę miarę względem a oraz b , uzyskujemy znane wzory MNK. Tradycyjna metoda najmniejszych kwadratów jest więc szczególnym przypadkiem metody Antoniewicza.

Zaletą metody Antoniewicza polega na tym, że zadany skończony zbiór punktów, na przykład na płaszczyźnie, możemy przybliżać za pomocą okręgu, dwóch okręgów, dwóch prostych. Ogólnie, możemy przybliżać śladem algebraicznym dowolnego stopnia. Śladem algebraicznym nazywa się zbiór punktów, na którym wielomian określonego stopnia się zeruje.

Aproksymację zbioru punktów na płaszczyźnie za pomocą śladu wielomianu drugiego stopnia Ryszard Antoniewicz nazywa *regresją stożkową*. Regresję stożkową zmiennej y względem zmiennej x okre-

śla wielomian drugiego stopnia: $\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2 + \delta x - y + \varphi_1 = 0$.

W celu wyznaczenia parametrów tej regresji należy rozwiązać następujący układ równań:

$$[x^4]\alpha_1 + [x^3y]\beta_1 + [x^2y^2]\gamma_1 + [x^3]\delta + [x^2]\varphi_1 = [x^2y],$$

$$[x^3y]\alpha_1 + [x^2y^2]\beta_1 + [xy^3]\gamma_1 + [x^2y]\delta + [xy]\varphi_1 = [xy^2],$$

$$[x^2y^2]\alpha_1 + [xy^3]\beta_1 + [y^4]\gamma_1 + [xy^2]\delta + [y^2]\varphi_1 = [y^3],$$

$$[x^3]\alpha_1 + [x^2y]\beta_1 + [xy^2]\gamma_1 + [x^2]\delta + [x]\varphi_1 = [xy],$$

$$[x^2]\alpha_1 + [xy]\beta_1 + [y^2]\gamma_1 + [x]\delta + [1]\varphi_1 = [y].$$

Zauważmy, że w zależności od wartości tych parametrów, regresja stożkowa może być elipsą, parabolą, hiperbolą, czyli dowolną krzywą drugiego stopnia. Jeśli okaże się, że regresję stożkową stanowi elipsa, to Ryszard Antoniewicz nazywał ją regresją eliptyczną, podobnie używał określeń regresja paraboliczna czy hiperboliczna. Do wyznaczenia regresji stożkowej zmiennej x względem zmiennej y trzeba zastosować równanie:

$$\alpha_2 x^2 + \beta_2 xy + \gamma_{21} y^2 + \varepsilon y - x + \varphi_2 = 0.$$

Do opracowania tych wspomnień skorzystałem z danych udostępnionych mi z Archiwum Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, z dokumentacji znajdującej się w Katedrze Matematyki, a także z informacji udzielonej mi przez Annę Antoniewicz.