PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 469 • 2017

Taksonomia 29 ISSN 1899-3192
Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania e-ISSN 2392-0041

Mateusz Baryła
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
e-mail: mateusz.baryla@uek.krakow.pl

ANALIZA ROZKŁADU PIERWSZEJ CYFRY ZNACZĄCEJ DANYCH FINANSOWYCH WYBRANYCH SPÓŁEK Z SEKTORA MEDIÓW NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE[1]

THE FIRST SIGNIFICANT DIGIT DISTRIBUTION ANALYSIS OF FINANCIAL DATA OF SELECTED COMPANIES FROM MEDIA SECTOR LISTED ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

DOI: 10.15611/pn.2017.469.01
JEL Classification: C12, C16, M41

Streszczenie: Do grona metod analizy danych zalicza się tzw. analizę cyfrową, w ramach której przeprowadza się m.in. test pierwszej cyfry znaczącej. Analizy cyfrowe, bazujące na prawie Benforda, znajdują swoje zastosowanie w procesie oceny jakości zbiorów danych liczbowych. Są one też wykorzystywane do wykrywania nieprawidłowości występujących w danych finansowych, w tym: oszustw podatkowych, księgowych itp. W artykule zaprezentowano wyniki analizy rozkładu pierwszej cyfry znaczącej dla danych zaczerpniętych ze sprawozdań finansowych wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Do oceny zgodności empirycznego rozkładu pierwszej cyfry znaczącej z rozkładem teoretycznym, jakim jest rozkład Benforda, wykorzystano: test istotności dla frakcji, test zgodności chi-kwadrat, średnie bezwzględne odchylenie (*MAD*). Przedstawiono również rankingi spółek, biorąc pod uwagę poziom zgodności rozkładu cyfr na pierwszej pozycji znaczącej z prawem Benforda.

Słowa kluczowe: analiza cyfrowa, prawo Benforda, test pierwszej cyfry (znaczącej).

Summary: Digital analysis belongs to the group of data analysis methods. It comprises, among others, the first significant digit test. Digital analysis tests, based on Benford’s Law, find their application in the process of data sets quality assessment. They are also employed in order to detect irregularities which appear in financial data, including: tax frauds, accounting frauds, etc. The paper presents the outcomes of the first significant digit analysis for data drawn from financial statements of selected companies listed on the Warsaw Stock Ex-

[1] Publikacja została dofinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

change. When assessing conformity of empirical distribution of the first significant digit with Benford's distribution, the following methods were used: test for a population proportion, chi-square goodness of fit test, and mean absolute deviation (*MAD*). Moreover, rankings of the analysed comapnies are presented, taking into account the level of agreement of the first significant digit distribution with Benford's Law.

Keywords: digital analysis, Benford's Law, first (significant) digit test.

1. Wstęp

W artykule [Nigrini, Mittermaier 1997] autorzy wprowadzili pojęcie analizy cyfrowej (*Digital Analysis*) na określenie systemu procedur służących wykrywaniu nieprawidłowo powtarzających się cyfr, kombinacji cyfr oraz określonych liczb w analizowanych zbiorach danych. We wzmiankowanej pracy zostało zaprezentowanych 6 analiz cyfrowych, mianowicie: test pierwszej cyfry, test drugiej cyfry, test dwóch pierwszych cyfr, test powielania liczb, test zaokrąglania liczb, test dwóch ostatnich cyfr. Oczywiście, owych 6 wymienionych z nazwy testów nie wyczerpuje w pełni wszystkich analiz cyfrowych, jakie można znaleźć w literaturze przedmiotu. W miarę kompleksowy przegląd metod tego typu prezentuje przykładowo książka [Nigrini 2012].

Podstawę analiz cyfrowych stanowi prawo Benforda, które znane jest także pod nazwą prawa rozkładu cyfr znaczących. Najogólniej rzecz ujmując, prawo to powiada, że dla niektórych zbiorów danych rozkład cyfr w liczbach na określonych pozycjach znaczących odpowiada pewnemu rozkładowi teoretycznemu, którym jest rozkład Benforda. Odkrywcą tego prawa jest S. Newcomb, który zauważył, że rozkład częstości cyfr w liczbach różni się w zależności od rozpatrywanej pozycji znaczącej liczby. Wyniki swoich spostrzeżeń zawarł w artykule [Newcomb 1881], podając w nim m.in. rozkład prawdopodobieństwa dla pierwszej cyfry znaczącej. Do tych samych wniosków blisko 60 lat później doszedł F. Benford. W odróżnieniu od swojego poprzednika, autor pracy [Benford 1938] przedstawił w niej rezultaty szeroko zakrojonych jak na ówczesne czasy badań empirycznych. I to właśnie od jego nazwiska prawo rozkładu cyfr znaczących wzięło swoją nazwę.

Obecnie analizy cyfrowe znajdują coraz to szersze obszary zastosowań. Jednym z nich jest wykorzystanie technik opartych na prawie Benforda do badania zbiorów danych księgowych, a zatem i danych zaczerpniętych ze sprawozdań finansowych. Powszechnie wiadomo, że dane tego typu podlegają prawu rozkładu cyfr znaczących (zob. np. [Durtschi i in. 2004]). Potwierdzenie tej tezy można znaleźć zarówno na gruncie pewnych rozważań teoretycznych (zob. np. [Hill 1995]), jak i empirycznych (zob. np. [Nigrini 2012; Grabiński, Paszek 2013]). Sytuacja, w której dane księgowe nie czynią zadość prawu Benforda, wskazuje natomiast na możliwość występowania pewnych anomalii, które mogą być spowodowane nadużyciami finansowymi. Właśnie taki nurt badań, polegający na identyfikowaniu nieprawidłowości w zbiorach danych księgowych przy pomocy analiz cyfrowych, w literaturze światowej zyskuje dużą popularność. Przykładami takich opracowań są: [Thomas 1989; Kinnunen, Koskela 2003; Saville 2006; Slijepčević, Blašković 2014].

Głównym celem artykułu jest zweryfikowanie przypuszczenia, że dane pochodzące ze sprawozdań finansowych wybranej grupy spółek (z sektora mediów) notowanych na GPW w Warszawie podlegają prawu Benforda. W tym celu posłużono się testem pierwszej cyfry. Ponadto skonstruowano rankingi spółek ze względu na poziom zgodności analizowanych danych finansowych z prawem Benforda, biorąc pod uwagę rozkład pierwszej cyfry znaczącej.

2. Test pierwszej cyfry

Test pierwszej cyfry znaczącej (w skrócie: test pierwszej cyfry) jest niekiedy zaliczany do podstawowych testów prawa Benforda (zob. [Nigrini 2012]). Przed przystąpieniem do jego zdefiniowania konieczne staje się uprzednie wprowadzenie pojęcia pierwszej cyfry znaczącej oraz przedstawienie jej rozkładu wynikającego z prawa Benforda (tzw. rozkład Benforda dla pierwszej cyfry znaczącej).

Pierwszą cyfrą znaczącą liczby nazywamy pierwszą niezerową cyfrę tej liczby, poczynając śledzenie układu cyfr w liczbie od jej lewej strony. Jeżeli przez D oznaczymy zmienną losową opisującą cyfrę pojawiającą się na pierwszej pozycji znaczącej w liczbie, to prawdopodobieństwo przyjęcia przez tę zmienną wartości równej d jest wyznaczane zgodnie z następującą formułą:

$$P(D = d) = \log_{10}(1 + d^{-1}), \tag{1}$$

gdzie: $d \in \{1, 2, ..., 9\}$.

Obliczone wartości prawdopodobieństw z wykorzystaniem powyższego równania zestawiono w tab. 1. Na jej podstawie można zauważyć, że w rozkładzie Benforda prawdopodobieństwa dla kolejnych wartości pierwszej cyfry znaczącej wykazują tendencję zdecydowanie malejącą. Około 30,1% liczb rozpoczyna się jedynką jako pierwszą cyfrą znaczącą, podczas gdy dziewiątka jest pierwszą niezerową cyfrą w przypadku jedynie niespełna 4,6% liczb.

Tabela 1. Rozkład pierwszej cyfry znaczącej według prawa Benforda

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(D = d)$	0,3010	0,1761	0,1249	0,0969	0,0792	0,0669	0,0580	0,0512	0,0458

Źródło: opracowanie własne.

Test pierwszej cyfry znaczącej polega na weryfikowaniu hipotezy, że rozkład cyfr na pierwszej pozycji znaczącej w liczbach jest zgodny z rozkładem Benforda. Do oceny zgodności danych z prawem Benforda można posłużyć się różnymi metodami. W ramach niniejszego opracowania wykorzystano trzy niżej opisane metody.

1. Test zgodności chi-kwadrat.

W tym przypadku weryfikujemy hipotezę zerową głoszącą, że rozkład pierwszej cyfry znaczącej jest rozkładem typu Benforda, wobec hipotezy alternatywnej, zgodnie z którą rozkład pierwszych niezerowych cyfr w liczbach nie podlega rozkładowi Benforda. Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = n\sum_{d=1}^{9}\frac{(W_d - p_d)^2}{p_d}, \tag{2}$$

gdzie: n − liczebność próby (zbioru danych), W_d − częstość względna cyfry d jako pierwszej niezerowej cyfry w zbiorze liczbowym liczącym n elementów, p_d − prawdopodobieństwo wystąpienia cyfry d na pierwszej pozycji znaczącej w rozkładzie Benforda.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka dana wzorem (2) ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat o 8 stopniach swobody.

2. Średnie bezwzględne odchylenie.

Ponieważ test zgodności chi-kwadrat jest czasami postrzegany jako dość rygorystyczny (przy dużej liczebności próby jest on zbyt czuły na występowanie niewielkich odchyleń od rozkładu Benforda), niekiedy postuluje się, aby korzystać z innej miary, która nie zależy od liczebności zbioru danych. Najczęściej jest nią średnie bezwzględne odchylenie (*MAD – Mean Absolute Deviation*) postaci:

$$MAD = \frac{1}{9}\sum_{d=1}^{9}\left|w_d - p_d\right|, \tag{3}$$

gdzie: w_d to zaobserwowana w zbiorze n-elementowym częstość względna cyfry d na pierwszej pozycji znaczącej, zaś p_d oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia cyfry d jako pierwszej niezerowej cyfry w liczbie według prawa Benforda.

Miara opisana wzorem (3) wprawdzie bazuje na tzw. podejściu opisowym, jednak w literaturze można odnaleźć pewne jej wartości graniczne, w oparciu o które podejmuje się decyzje odnośnie do stopnia zgodności analizowanych zbiorów danych z prawem Benforda ze względu na rozkład pierwszej cyfry znaczącej. M. Nigrini wprowadził następujący podział (w nawiasach podano zakresy wartości miary *MAD*) [Nigrini 2012, s. 160]: duża zgodność (0,000-0,006), akceptowalna zgodność (0,006-0,012), minimalnie akceptowalna zgodność (0,012-0,015), brak zgodności (powyżej 0,015). Z definicji *MAD* wynika, że po przemnożeniu przez 100 wartości tej miary można wyrażać w procentach.

3. Test istotności dla frakcji.

Weryfikowanie za pomocą testu zgodności chi-kwadrat i średniego bezwzględnego odchylenia hipotezy, że dane podlegają prawu Benforda, odbywa się w oparciu o łączny rozkład cyfr na pierwszej pozycji znaczącej. Z kolei przy pomocy testu istotności dla frakcji możliwe jest badanie, czy udziały poszczególnych cyfr z osobna na pierwszej pozycji znaczącej pozostają w zgodzie z prawem Benforda. W takim przypadku weryfikujemy hipotezę zerową, która głosi, że odsetek liczb z cyfrą d na pierwszej pozycji znaczącej jest zgodny z prawem Benforda, wobec hipotezy alternatywnej, że odsetek ten różni się od odpowiedniej wartości wynikającej z rozkładu Benforda. Statystyka testowa przyjmuje następującą postać [Fleiss i in. 2003, s. 27]:

$$U_d = \frac{|W_d - p_d| - \frac{1}{2n}}{\sqrt{\frac{p_d(1-p_d)}{n}}}, \qquad (4)$$

przy czym pojawiające się w powyższym zapisie symbole: n, W_d, p_d mają takie samo znaczenie, jak w przypadku omówionego testu zgodności chi-kwadrat.

Występujące w liczniku przywołanej statystyki wyrażenie $1/(2n)$ jest uwzględniane jedynie wtedy, gdy co do wartości jest ono mniejsze od wartości pierwszego wyrażenia z licznika. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka (4) ma rozkład normalny standaryzowany.

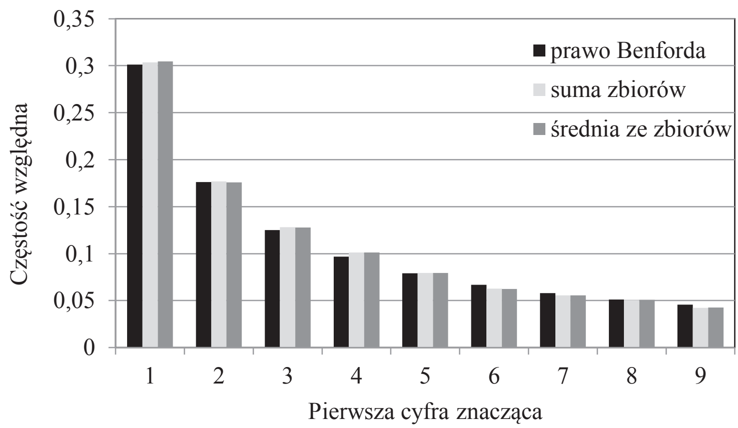
3. Charakterystyka danych

Podstawą prowadzonych badań empirycznych były dane pochodzące z kwartalnych skonsolidowanych sprawozdań finansowych (bilans, rachunek zysków i strat, rachunek przepływów pieniężnych) 11 spółek notowanych na GPW w Warszawie, które na dzień 26.08.2016 r. wchodziły w skład sektora mediów. Badaniem objęto następujące spółki (w nawiasach podano skrótowe nazwy przedsiębiorstw, jakimi posługiwano się w dalszej części pracy): 4fun Media (4FM), Agora (AGO), ATM Grupa (ATG), Cyfrowy Polsat (CPS), iAlbatros (IAG), K2 Internet (K2I), KCI (KCI), Kino Polska TV (KPL), Lark.pl (LRK), MUZA (MZA), PMPG Polskie Media (PGM). Dane finansowe zostały pobrane z serwisu Notoria (http://ir.notoria.pl/) i obejmowały one okres od pierwszego kwartału 2012 r. do pierwszego kwartału 2016 r. Wyjątek stanowiła spółka KCI, w przypadku której nie były dostępne informacje za pierwszy kwartał 2014 r. W analizie nie uwzględniono trzech innych spółek z sektora mediów (Comperia.pl, HubStyle, Wirtualna Polska Holding) z uwagi na występujące braki w danych w serwisie Notoria dla większej liczby kwartałów. Ostatecznie, po usunięciu zer pojawiających się na niektórych pozycjach w sprawozdaniach finansowych, otrzymano 11 zbiorów danych, które zawierały zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Liczebności tych zbiorów wahały się od 1042 do 1419.

4. Wyniki badań empirycznych

Badania empiryczne rozpoczęto od zweryfikowania hipotezy, że dane zaczerpnięte ze sprawozdań finansowych spółek z sektora mediów notowanych na GPW w Warszawie podlegają prawu Benforda ze względu na rozkład pierwszej cyfry znaczącej. Przypuszczenie to zostało poddane weryfikacji zarówno dla całego sektora mediów (w skład którego wchodziło 11 analizowanych przedsiębiorstw), jak i poszczególnych 11 spółek z osobna.

Przy wyznaczaniu empirycznego rozkładu pierwszej cyfry znaczącej dla całego sektora mediów postępowano dwojako. W pierwszym podejściu został on wyznaczony w oparciu o zbiór sumaryczny (powstały jako mieszanka 11 zbiorów), liczący 13 912 elementów, w drugim zaś – jako średnia arytmetyczna z częstości względnych cyfr na pierwszej pozycji znaczącej dla 11 rozpatrywanych zbiorów danych (uśredniona liczebność zbioru to 1265). Oba te rozkłady, wraz z rozkładem wynikającym z prawa Benforda, zaprezentowano na rys. 1.



Rys. 1. Rozkład pierwszej cyfry znaczącej dla danych finansowych spółek z sektora mediów

Źródło: opracowanie własne.

Wizualna ocena rozkładów pierwszej cyfry znaczącej prowadzi do wniosku, że oba empiryczne rozkłady nie różnią się w sposób znaczący od rozkładu Benforda. Potwierdzają to rezultaty przeprowadzonego testu zgodności chi-kwadrat (zob. przedostatni wiersz w tab. 2), które nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej zakładającej zgodność rozkładu pierwszej cyfry znaczącej z prawem Benforda przy poziomie istotności równym 0,05. Wykorzystanie średniego bezwzględnego odchylenia wskazuje natomiast na dużą zgodność obu rozkładów empirycznych z rozkładem Benforda (zob. ostatni wiersz w tab. 2). Wartości miary *MAD* dla rozkładu sumarycznego i uśrednionego wynoszą po ok. 0,24%.

W tab. 2 zawarto również wyniki badania zgodności rozkładu poszczególnych dziewięciu cyfr z osobna na pierwszej pozycji znaczącej z prawem Benforda za pomocą testu istotności dla frakcji (zastosowano test dwustronny). Jak widać, w żadnym przypadku na 18 przeprowadzonych testowań, przy prawdopodobieństwie popełnienia błędu pierwszego rodzaju na poziomie 0,01, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej głoszącej, że odsetek liczb z cyfrą d (d = 1, 2,..., 9) jako pierwszą niezerową cyfrą jest równy odpowiedniemu odsetkowi wynikającemu z prawa Benforda.

Tabela 2. Wyniki badania zgodności danych finansowych z prawem Benforda ze względu na rozkład pierwszej cyfry znaczącej dla całego sektora mediów

Cyfra	Suma zbiorów		Średnia ze zbiorów	
	wartość statystyki U_d	p-value	wartość statystyki U_d	p-value
1	0,6205	0,5349	0,2392	0,8109
2	0,2608	0,7942	0,0263	0,9790
3	1,0860	0,2775	0,2635	0,7922
4	1,7278	0,0840	0,4587	0,6464
5	0,0606	0,9517	0,0279	0,9777
6	1,9968	0,0458	0,5741	0,5659
7	1,2436	0,2136	0,2892	0,7725
8	0,3900	0,6965	0,0114	0,9909
9	1,9101	0,0561	0,4902	0,6240
	χ^2 = 13,139	0,1072	χ^2 = 1,1533	0,9971
	MAD = 0,2434%	–	*MAD* = 0,2389%	–

Źródło: opracowanie własne.

Następnie analizie poddano rozkład cyfr na pierwszej pozycji znaczącej dla poszczególnych 11 spółek, a wyniki tej analizy przedstawiono w tab. 3. Patrząc na rezultaty testu zgodności chi-kwadrat, w przypadku 5 spółek należy odrzucić hipotezę zerową zakładającą zgodność rozkładu pierwszej cyfry znaczącej z rozkładem Benforda (α = 0,001). Test ten wskazuje na występowanie istotnych statystycznie różnic w porównywanych rozkładach dla spółek: 4fun Media, Agora, ATM Grupa, Kino Polska TV, MUZA. Na podstawie otrzymanych wartości miary *MAD* trzeba natomiast stwierdzić, że tylko w przypadku spółki ATM Grupa dane finansowe nie czynią zadość prawu Benforda.

Ostatnia kolumna w tab. 3 ukazuje liczbę cyfr, dla których nastąpiło odrzucenie hipotezy zerowej głoszącej, że frakcja cyfry d (d = 1, 2,..., 9) na pierwszej pozycji znaczącej jest zgodna z prawem Benforda przy poziomie istotności równym 0,001 (u_d > 3,291). Przyjmując α = 0,001, widać, iż w przypadku spółek, co do których stwierdzono zgodność danych z prawem Benforda za pomocą miary *MAD*, występuje maksymalnie jedna taka cyfra, a dla spółki ATM Grupa są to 3 cyfry.

Podjęto też próbę uszeregowania przedsiębiorstw ze względu na poziom zgodności rozkładu pierwszej cyfry znaczącej z prawem Benforda. Uczyniono to na podstawie 4 miar, które miały charakter destymulant (im wyższą wartość przyjmowały,

Tabela 3. Rezultaty badania zgodności danych finansowych z prawem Benforda ze względu na rozkład pierwszej cyfry znaczącej dla poszczególnych spółek

Spółka	Test zgodności χ^2		Średnie bezwzględne odchylenie		$u_d > 3{,}291$
	χ^2	*p*-value	*MAD* (w %)	stopień zgodności*	
4FM	30,570	0,0002	1,3008	min. akcept. zgod.	1
AGO	29,679	0,0002	1,4944	min. akcept. zgod.	0
ATG	61,519	0,0000	2,2040	brak zgodności	3
CPS	12,184	0,1432	0,9253	akcept. zgod.	0
IAG	15,565	0,0491	0,8151	akcept. zgod.	0
K2I	11,976	0,1523	1,0437	akcept. zgod.	0
KCI	7,2440	0,5106	0,8135	akcept. zgod.	0
KPL	34,028	0,0000	1,2924	min. akcept. zgod.	1
LRK	23,196	0,0031	1,0966	akcept. zgod.	0
MZA	36,182	0,0000	1,4869	min. akcept. zgod.	1
PGM	25,699	0,0012	1,3119	min. akcept. zgod.	1

* akcept. zgod. = akceptowalna zgodność, min. akcept. zgod. = minimalnie akceptowalna zgodność.

Źródło: opracowanie własne.

tym obserwowano słabszą zgodność z rozkładem Benforda). Były to: statystyka χ^2, statystyka χ^2/n (wyeliminowano wpływ liczebności próby), średnie bezwzględne odchylenie, a także $\overline{u}$ (tj. średnia arytmetyczna z dziewięciu wartości statystyki U_d).

Tabela 4. Rankingi otrzymane dla 11 spółek z sektora mediów

Spółka	Rangi (χ^2)	Rangi (χ^2/n)	Rangi (*MAD*)	Rangi ($\overline{u}$)
4FM	8	9	7	7
AGO	7	7	10	10
ATG	11	11	11	11
CPS	3	2	3	2
IAG	4	4	2	4
K2I	2	3	4	3
KCI	1	1	1	1
KPL	9	8	6	9
LRK	5	5	5	6
MZA	10	10	9	8
PGM	6	6	8	5

Źródło: opracowanie własne.

Z tab. 4 wynika, iż w żadnym z czterech przypadków nie otrzymano identycznych uporządkowań spółek. Jednak w każdym rankingu pierwsze i ostatnie miejsce zajmują te same przedsiębiorstwa. Spółką odznaczającą się najwyższym stopniem zgodności rozkładu pierwszej cyfry znaczącej z prawem Benforda jest KCI (przypisano jej rangę 1), zaś spółką o najniższym stopniu zgodności – ATM Grupa (nadano jej rangę 11). Aby porównać wyniki uporządkowań spółek za pomocą 4 rozważanych metod, posłużono się współczynnikiem korelacji rangowej Spearmana (tab. 5).

Tabela 5. Wartości współczynnika korelacji rangowej Spearmana pomiędzy uszeregowaniami spółek

	Rangi (χ^2)	Rangi (χ^2/n)	Rangi (MAD)	Rangi ($\bar{u}$)
Rangi (χ^2)	1,0000	0,9818	0,8545	0,9182
Rangi (χ^2/n)	0,9818	1,0000	0,8727	0,9091
Rangi (MAD)	0,8545	0,8727	1,0000	0,8818
Rangi ($\bar{u}$)	0,9182	0,9091	0,8818	1,0000

Źródło: opracowanie własne.

Na poziomie istotności 0,05 wszystkie współczynniki korelacji rangowej są statystycznie istotne (właściwa wartość krytyczna współczynnika korelacji rangowej dla testu dwustronnego to 0,618). Można zatem stwierdzić, że istnieje istotna statystycznie zgodność uporządkowań spółek ze względu na zastosowane metody.

5. Podsumowanie

Wyniki analiz empirycznych prowadzą do następujących wniosków. Po pierwsze, dane pochodzące ze sprawozdań finansowych, zagregowane dla 11 rozpatrywanych spółek z sektora mediów z giełdy warszawskiej, nie wykazały znaczących różnic względem prawa Benforda przy uwzględnieniu rozkładu pierwszej cyfry znaczącej. Po drugie, tylko dla spółki ATM Grupa stwierdzono brak występowania zgodności łącznego empirycznego rozkładu cyfr na pierwszej pozycji znaczącej z rozkładem Benforda, przy wykorzystaniu zarówno testu zgodności chi-kwadrat, jak i miary *MAD*. Dla tej samej spółki zidentyfikowano też największą liczbę pierwszych niezerowych cyfr, których frakcje były niezgodne z prawem Benforda. Po trzecie, szeregowanie spółek ze względu na poziom podobieństwa rozkładu pierwszej cyfry z rozkładem Benforda, za pomocą czterech ujętych w badaniu metod, doprowadziło do uzyskania zbieżnych wskazań.

Literatura

Benford F., 1938, *The law of anomalous numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society, vol. 78, no. 4, s. 551-572.

Durtschi C., Hillison W., Pacini C., 2004, *The effective use of Benford's law to assist in detecting fraud in accounting data*, Journal of Forensic Accounting, vol. V, s. 17-33.

Fleiss J.L., Levin B., Paik M., 2003, *Statistical Methods for Rates and Proportions*, Third Edition, Wiley, New Jersey.

Grabiński K., Paszek Z., 2013, *Examining reliability of large financial datasets using Benford's law*, Ekonomske teme, vol. 51, no. 3, s. 515-524.

Hill T.P., 1995, *A statistical derivation of the significant-digit law*, Statistical Science, vol. 10, no. 4, s. 354-363.

Kinnunen J., Koskela M., 2003, *Who is miss world in cosmetic earnings management? A cross-national comparison of small upward rounding of net income numbers among eighteen countries*, Journal of International Accounting Research, vol. 2, issue 1, s. 39-68.

Newcomb S., 1881, *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers*, American Journal of Mathematics, vol. 4, no. 1, s. 39-40.

Nigrini M.J., 2012, *Benford's Law: Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection*, Wiley, New Jersey.

Nigrini M.J., Mittermaier L.J., 1997, *The use of Benford's law as an aid in analytical procedures*, Auditing: A Journal of Practice & Theory, vol. 16, no. 2, s. 52-67.

Saville A.D., 2006, *Using Benford's law to detect data error and fraud: An examination of companies listed on the Johannesburg stock exchange*, South African Journal of Economic and Management Sciences, vol. 9, no. 3, s. 341-354.

Slijepčević S., Blašković B., 2014, *Statistical detection of fraud in the reporting of Croatian public companies*, Financial Theory and Practice, vol. 38, no. 1, s. 81-96.

Thomas J.K., 1989, *Unusual patterns in reported earnings*, The Accounting Review, vol. LXIV, no. 4, s. 773-787.