B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 1 2004

Jan MIKUŚ*
Edward BIELENINIK**

UWAGI O METODZIE BOSTON CONSULTING GROUP (BCG)

W artykule zaproponowano sposób wyznaczania estymatorów współrzędnych środków kół i ich promieni w metodzie BCG, uwzględniający błędy pomiarowe na osi względnego udziału badanej jednostki strategicznej w rynku oraz na osi tempa wzrostu rynku. W sposobie tym wykorzystano przypadek ogólny KMNK z uwzględnieniem metody mnożników Lagrange'a przy nieliniowych równaniach więzów. Zamieszczono przykład ilustrujący zaproponowane podejście.

Słowa kluczowe: *metoda BGG, estymator, plan sytuacyjny, prognozowanie*

1. Wstęp

Jedną z najczęściej stosowanych metod portfolio jest metoda BCG, która polega na graficznej prezentacji pozycji przedsiębiorstwa na rynku względem jego największych konsumentów. Klasyczny wykres macierzy BCG, na którym za pomocą kół przedstawia się sprzedaż poszczególnych marek na rynku, wyznacza plan sytuacyjny przedsiębiorstwa. Równania okręgów wyrażają się wzorem

$$(t - t_0^{(i)})^2 + (s - s_0^{(i)})^2 = r_i^2 ,$$

w którym [5]

$$t_0^{(i)} = 1 + \log \frac{\text{sprzedaż własna}}{\text{sprzedaż konkurenta}} ,$$

$s_0^{(i)}$ – wzrost rynku w procentach,

* Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław.

** Zakład Informatyki Wydziału Informatyki i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

r_i – promienie kół; $r_i = \sqrt{\dfrac{\text{sprzedaż własna } i\text{-tego produktu}}{\pi}}$,

$i = 1, 2, ..., n$; n – liczba marek [5].

W metodzie bada się współzależność między tempem wzrostu rynku a względnym udziałem badanej jednostki w rynku. Względny udział w rynku można mierzyć za pomocą następujących mierników:

$$t = \frac{\text{sprzedaż danego produktu badanego przedsiębiorstwa}}{\text{ogólna sprzedaż produktu na rynku}}$$

lub

$$i = \frac{\text{sprzedaż danego produktu badanego przedsiębiorstwa}}{\text{sprzedaż łączna trzech największych konkurentów (lub jednego)}}.$$

2. Wyznaczanie estymatorów środków kół i ich promieni

Współrzędne środków kół i ich promienie, a ściślej estymatory tych wielkości można wyznaczyć analizując przypadek dopasowania okręgu do zespołu punktów leżących na płaszczyźnie (t, s). Rozważmy zatem ogólny przypadek, w którym związek między wielkościami mierzonymi i nieznanymi parametrami ma postać

$$f_k(\bar{x}, \bar{\eta}) = f_k(\bar{x}, \bar{y} + \bar{\varepsilon}) = 0, \tag{1}$$

w której:

$\bar{x}$ – v – wymiarowy wektor parametrów, których estymatory należy wyznaczyć,

$\bar{\eta}$ – n – wymiarowy wektor utworzony z wielkości mierzalnych,

$\bar{y}$ – wyniki pomiarów różniące się od rzeczywistych wielkości $\bar{\eta}$ o wielkość błędu $\bar{\varepsilon}$; zakładamy, że poszczególne błędy ε_j $(j = 1, 2, ..., m)$ podlegają normalnemu rozkładowi.

Jako pierwsze przybliżenie dla wektora $\bar{\eta}$ przyjmujemy $\bar{\eta}_0 = \bar{y}$ i zakładamy, że funkcje f_k są liniowe w otoczeniu $(\bar{x}_0, \bar{\eta}_0)$. Przy tych założeniach możemy dokonać rozwinięcia funkcji f_k [1]:

$$\begin{aligned} f_k(\bar{x}, \bar{\eta}) = f_k(\bar{x}_0, \bar{\eta}_0) &+ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}_{|\bar{x}_0, \bar{\eta}_0} (x_1 - x_{10}) + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_v}_{|\bar{x}_0, \bar{\eta}_0} (x_v - x_{v0}) \\ &+ \frac{\partial f_k}{\partial \eta_1}_{|\bar{x}_0, \bar{\eta}_0} (\eta_1 - \eta_{10}) + ... + \frac{\partial f_k}{\partial \eta_n}_{|\bar{x}_0, \bar{\eta}_0} (\eta_n - \eta_{n0}). \end{aligned} \tag{2}$$

Układ równań (2) możemy przepisać, używając zapisu macierzowego

$$\mathbf{A}\overline{\xi} + \mathbf{B}\overline{\delta} + \overline{\mathbf{C}} = 0 \tag{3}$$

w którym

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mv} \end{bmatrix}, \quad a_{kl} = \frac{\partial f_k}{\partial x_l}_{|\overline{x}_0, \overline{\eta}_0} \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad b_{kl} = \frac{\partial f_k}{\partial \eta_l}_{|\overline{x}_0, \overline{\eta}_0} \tag{5}$$

$$\mathbf{C}_k = f_k(\overline{x}_0, \overline{\eta}_0), \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$\overline{\xi} = \overline{x} - \overline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ \cdots \\ x_v - x_{v0} \end{bmatrix}, \quad \overline{\delta} = \overline{\eta} - \overline{\eta}_0.$$

Do wyznaczenia estymatorów parametrów $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_v)$ wykorzystamy metodę mnożników Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a ma następującą postać:

$$L = \overline{\delta}^T G_y \overline{\delta} + 2\overline{\mu}^T (A\overline{\xi} + B\overline{\delta} + \overline{C}),$$

w której $\overline{\mu}$ jest m-wymiarowym wektorem mnożników Lagrange'a. Przyrównując do zera różniczkę zupełną równania (3) względem δ otrzymujemy

$$G_y \overline{\delta} + B^T \overline{\mu} = 0 \tag{6}$$

stąd

$$\overline{\delta} = -G_y^{-1} B^T \overline{\mu}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\mathbf{G}_y$ – macierz wag, $g_j = \dfrac{1}{\sigma_j^2}$, $\sigma_j^2 = E(\varepsilon_j^2)$, ε_j – błąd pomiaru.

Ze wzorów (3) i (7) wynika, że

$$A\overline{\xi} - BG_y^{-1} B^T \overline{\mu} + \overline{C} = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\overline{\mu} = G_B(A\overline{\xi} + \overline{C}) = (BG_y^{-1} B^T)^{-1}(A\overline{\xi} + \overline{C}). \tag{8}$$

Posługując się wzorem (7), możemy wyznaczyć

$$\begin{gathered} \overline{\delta} = G_y^{-1} B^T G_B (A\overline{\xi} + \overline{C}), \\ G_B = (BG_y B^T)^{-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a osiąga minimum również ze względu na $\overline{\xi}$, otrzymamy

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\xi}} = 2\overline{\mu}^T A = 0. \tag{10}$$

Transponując równość (9) i podstawiając za $\overline{\mu}$ prawą stronę zależności (8), otrzymujemy po pewnych formalnych przekształceniach

$$\tilde{\overline{\xi}} = -(A^T G_B A)^{-1} A^T G_B \overline{C}. \tag{11}$$

Wykorzystując równość (10) i wzory (8), (9), otrzymujemy estymatory dla odchylenia $\overline{\delta}$ i mnożników Lagrange'a $\overline{\mu}$ [1]:

$$\tilde{\overline{\delta}} = -G_y^{-1} B^T G_B (\overline{C} - A(A^T G_B A)^{-1} A^T G_B \overline{C}), \tag{12}$$

$$\tilde{\overline{\mu}} = G_B A(\overline{C} - A(A^T G_B A)^{-1} A^T G_B \overline{C}). \tag{13}$$

Ostatecznie estymatory nieznanych parametrów $\overline{x}$ i poprawionych pomiarów $\overline{\eta}$ (zob. (1)) wynoszą odpowiednio

$$\tilde{\bar{x}} = x_0 + \tilde{\bar{\xi}}, \quad \tilde{\bar{\eta}} = \bar{\eta}_0 + \tilde{\bar{\delta}}. \tag{14}$$

Niech teraz równanie (1) ma postać równania okręgu:

$$s^2 + t^2 - 2ss_0 - 2tt_0 + s_0^2 + t_0^2 - r^2 = 0. \tag{15}$$

Należy więc znaleźć estymatory środka koła s_0, t_0 i jego promienia *r*. Zgodnie z dotychczasowymi oznaczeniami: $x_1 = s_0$, $x_2 = t_0$, $x_3 = r$. Punkty pomiarowe s_i, t_i $(i = 1, 2, ..., m)$ oznaczamy następująco:

$$y_{2i-1} = s_i, \; y_{2i} = t_i, \quad \text{tzn.} \quad y_1 = s_1, \; y_2 = t_1, \; y_3 = s_2, \; y_4 = t_2, ...$$

W nowych oznaczeniach równanie (15) przyjmuje postać

$$y_{2i-1}^2 + y_{2i}^2 - 2x_1 y_{2i-1} - 2x_2 y_{2i} + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

a macierze (4) i (5) wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2y_1 + 2x_{10} & -2y_2 + 2x_{20} & -2x_{30} \\ -2y_3 + 2x_{10} & -2y_4 + 2x_{20} & -2x_{30} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -2y_{2m-1} + 2x_{10} & -2y_{2m} + 2x_{20} & -2x_{30} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2y_1 - 2x_{10} & 2y_2 - 2x_{20} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 - 2x_{10} & 2y_4 - 2x_{30} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2y_{2m-1} - 2x_{10} & 2y_{2m} - 2x_{20} \end{bmatrix}.$$

Zgodnie ze wzorami (11) i (14) estymatory parametrów $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ można zapisać w postaci

$$\tilde{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \bar{x}_0 - (A^T G_B A)^{-1} A^T G_B \bar{C}. \tag{16}$$

Uwzględniając wprowadzone wcześniej oznaczenia, za pomocą wzoru (16) możemy wyznaczyć estymatory współrzędnych środków kół $s_0^{(i)}, t_0^{(i)}$ i ich promieni r_i, jeśli założymy, że związek między wielkościami mierzonymi i nieznanymi parame-

trami jest liniowy. W przypadku równań nieliniowych (zob. (15)) stosujemy proces iteracyjny, przyjmując jako $\overline{x}_0$ wartość $\tilde{\overline{x}}$ uzyskaną z poprzedniej iteracji i obliczając ponownie macierze (4), (5), które następnie wykorzystuje się we wzorze (16). Proces iteracyjny powtarzamy aż do uzyskania zadowalającego wyniku. Zauważmy, że jeśli korzystamy ze wzoru (16), to zachodzi potrzeba wyznaczenia pierwszego przybliżenia parametrów $s_0^{(i)}, t_0^{(i)}, r_i$. W pracy [2] proponuje się metodę polegającą na wykorzystaniu trzech punktów dla przeprowadzenia symetralnych obu odcinków łączących sąsiednie punkty. Przecięcie symetralnych wyznacza środek koła w przypadku, gdy punkty byłyby zmierzone bezbłędnie. Promień dany jest przez odległość od środka do któregokolwiek z punktów pomierzonych. Ostatecznie w praktyce dopasowanie okręgu do punktów obarczonych błędami pomiarowymi na osi rzędnych (tempo wzrostu rynek – wzrost sprzedaży) i osi odciętych (względny udział w rynku) sprowadza się do wykorzystania algorytmu uwzględniającego następujące kroki [1]:

- zebranie punktów pomiarowych $(t_i, s_i), i = 1, 2, ..., m$ położonych na płaszczyźnie (t, s); błędy pomiarowe określa macierz kowariancji o wymiarze 2×2

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \Delta s_i^2 & C_i^2 \\ C_i^2 & \Delta t_i^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

w której $\mathbf{C}_i = \Delta s_i \Delta t_i \rho_i$, a ρ_i jest współczynnikiem korelacji pomiędzy błędami pomiarowymi Δs_i i Δt_i;

- zbudowanie (z wartości s_i i t_i) wektora pomiarów $\overline{y}$ i macierzy kowariancji $\mathbf{C}_y$;
- przyjęcie założenia, że punkty, których współrzędne są przedmiotem pomiarów leżą na okręgu o środku (x_1, x_2) i promieniu x_3; wypisanie równań więzów $f_k(\overline{x}, \overline{\eta}) = 0$;
- wprowadzenie do programu wartości $\Delta t, \Delta s, \rho$;
- generowanie m punktów pomiarowych (t_i, s_i) z dwuwymiarowych rozkładów normalnych, których wartości średnie położone są w jednakowych odstępach na okręgu jednostkowym $(x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1)$; macierz kowariancji rozkładów określona jest wzorem (17), gdzie $\Delta s_i = \Delta s, \Delta t_i = \Delta t, C = \Delta s \Delta t \rho$;
- wyznaczenie parametrów okręgu przechodzącego przez pierwsze trzy punkty pomiarowe; otrzymane wartości służą jako pierwsze przybliżenie przy dopasowaniu parametrów x_1, x_2, x_3;
- dopasowanie okręgu do wszystkich punktów pomiarowych.

3. Analiza numeryczna

Okres retrospektywny

Rozważmy sytuację przedsiębiorstwa na rynku w zakresie przykładowo jednego produktu, którego sprzedaż, jak również sprzedaż największego konkurenta i dynamikę wzrostu (4%), przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Dynamika, udziały w rynku badanego przedsiębiorstwa, głównego konkurenta oraz branży

Okres/Rok	Sprzedaż [szt.]			Macierz wzrostu udziału w rynku	
	Badana firma S_{bf}	Główny konkurent S_{gk}	Branża S_b	Względny udział badanej firmy w rynku (t)	Dynamika wzrostu rynku (w %) d_w
1	2	3	4	5	6
(t_1)					
styczeń	$S^{(1)}_{bf;1}$	$S^{(1)}_{gk;1}$	$S^{(1)}_{b;1}$	$t_{1;1}$	$d^{(1)}_{w;1}$
luty	$S^{(1)}_{bf;2}$	$S^{(1)}_{gk;2}$	$S^{(1)}_{b;2}$	$t_{1;2}$	$d^{(1)}_{w;2}$
marzec	$S^{(1)}_{bf;3}$	$S^{(1)}_{gk;3}$	$S^{(1)}_{b;3}$	$t_{1;3}$	$d^{(1)}_{w;3}$
kwiecień	$S^{(1)}_{bf;4}$	$S^{(1)}_{gk;4}$	$S^{(1)}_{b;4}$	$t_{1;4}$	$d^{(1)}_{w;4}$
maj	$S^{(1)}_{bf;5}$	$S^{(1)}_{gk;5}$	$S^{(1)}_{b;5}$	$t_{1;5}$	$d^{(1)}_{w;5}$
czerwiec	$S^{(1)}_{bf;6}$	$S^{(1)}_{gk;6}$	$S^{(1)}_{b;6}$	$t_{1;6}$	$d^{(1)}_{w;6}$
lipiec	$S^{(1)}_{bf;7}$	$S^{(1)}_{gk;7}$	$S^{(1)}_{b;7}$	$t_{1;7}$	$d^{(1)}_{w;7}$
sierpień	$S^{(1)}_{bf;8}$	$S^{(1)}_{gk;8}$	$S^{(1)}_{b;8}$	$t_{1;8}$	$d^{(1)}_{w;8}$
wrzesień	$S^{(1)}_{bf;9}$	$S^{(1)}_{gk;9}$	$S^{(1)}_{b;9}$	$t_{1;9}$	$d^{(1)}_{w;9}$
październik	$S^{(1)}_{bf;10}$	$S^{(1)}_{gk;10}$	$S^{(1)}_{b;10}$	$t_{1;10}$	$d^{(1)}_{w;10}$
listopad	$S^{(1)}_{bf;11}$	$S^{(1)}_{gk;11}$	$S^{(1)}_{b;11}$	$t_{1;11}$	$d^{(1)}_{w;11}$
grudzień	$S^{(1)}_{bf;12}$	$S^{(1)}_{gk;12}$	$S^{(1)}_{b;12}$	$t_{1;12}$	$d^{(1)}_{w;12}$

1	2	3	4	5	6
(t_2)					
styczeń	$S^{(2)}_{bf;1}$	$S^{(2)}_{gk;1}$	$S^{(2)}_{b;1}$	$t_{2;1}$	$d^{(2)}_{w;1}$
luty	$S^{(2)}_{bf;2}$	$S^{(2)}_{gk;2}$	$S^{(2)}_{b;2}$	$t_{2;2}$	$d^{(2)}_{w;2}$
marzec	$S^{(2)}_{bf;3}$	$S^{(2)}_{gk;3}$	$S^{(2)}_{b;3}$	$t_{2;3}$	$d^{(2)}_{w;3}$
kwiecień	$S^{(2)}_{bf;4}$	$S^{(2)}_{gk;4}$	$S^{(2)}_{b;4}$	$t_{2;4}$	$d^{(2)}_{w;4}$
maj	$S^{(2)}_{bf;5}$	$S^{(2)}_{gk;5}$	$S^{(2)}_{b;5}$	$t_{2;5}$	$d^{(2)}_{w;5}$
czerwiec	$S^{(2)}_{bf;6}$	$S^{(2)}_{gk;6}$	$S^{(2)}_{b;6}$	$t_{2;6}$	$d^{(2)}_{w;6}$
lipiec	$S^{(2)}_{bf;7}$	$S^{(2)}_{gk;7}$	$S^{(2)}_{b;7}$	$t_{2;7}$	$d^{(2)}_{w;7}$
sierpień	$S^{(2)}_{bf;8}$	$S^{(2)}_{gk;8}$	$S^{(2)}_{b;8}$	$t_{2;8}$	$d^{(2)}_{w;8}$
wrzesień	$S^{(2)}_{bf;9}$	$S^{(2)}_{gk;9}$	$S^{(2)}_{b;9}$	$t_{2;9}$	$d^{(2)}_{w;9}$
październik	$S^{(2)}_{bf;10}$	$S^{(2)}_{gk;10}$	$S^{(2)}_{b;10}$	$t_{2;10}$	$d^{(2)}_{w;10}$
listopad	$S^{(2)}_{bf;11}$	$S^{(2)}_{gk;11}$	$S^{(2)}_{b;11}$	$t_{2;11}$	$d^{(2)}_{w;11}$
grudzień	$S^{(2)}_{bf;12}$	$S^{(2)}_{gk;12}$	$S^{(2)}_{b;12}$	$t_{2;12}$	$d^{(2)}_{w;12}$
(t_n)					
styczeń	$S^{(n)}_{bf;1}$	$S^{(n)}_{gk;1}$	$S^{(n)}_{b;1}$	$t_{n;1}$	$d^{(n)}_{w;1}$
luty	$S^{(n)}_{bf;2}$	$S^{(n)}_{gk;2}$	$S^{(n)}_{b;2}$	$t_{n;2}$	$d^{(n)}_{w;2}$
marzec	$S^{(n)}_{bf;3}$	$S^{(n)}_{gk;3}$	$S^{(n)}_{b;3}$	$t_{n;3}$	$d^{(n)}_{w;3}$
kwiecień	$S^{(n)}_{bf;4}$	$S^{(n)}_{gk;4}$	$S^{(n)}_{b;4}$	$t_{n;4}$	$d^{(n)}_{w;4}$
maj	$S^{(n)}_{bf;5}$	$S^{(n)}_{gk;5}$	$S^{(n)}_{b;5}$	$t_{n;5}$	$d^{(n)}_{w;5}$
czerwiec	$S^{(n)}_{bf;6}$	$S^{(n)}_{gk;6}$	$S^{(n)}_{b;6}$	$t_{n;6}$	$d^{(n)}_{w;6}$
lipiec	$S^{(n)}_{bf;7}$	$S^{(n)}_{gk;7}$	$S^{(n)}_{b;7}$	$t_{n;7}$	$d^{(n)}_{w;7}$
sierpień	$S^{(n)}_{bf;8}$	$S^{(n)}_{gk;8}$	$S^{(n)}_{b;8}$	$t_{n;8}$	$d^{(n)}_{w;8}$
wrzesień	$S^{(n)}_{bf;9}$	$S^{(n)}_{gk;9}$	$S^{(n)}_{b;9}$	$t_{n;9}$	$d^{(n)}_{w;9}$
październik	$S^{(n)}_{bf;10}$	$S^{(n)}_{gk;10}$	$S^{(n)}_{b;10}$	$t_{n;10}$	$d^{(n)}_{w;10}$
listopad	$S^{(n)}_{bf;11}$	$S^{(n)}_{gk;11}$	$S^{(n)}_{b;11}$	$t_{n;11}$	$d^{(n)}_{w;11}$
grudzień	$S^{(n)}_{bf;12}$	$S^{(n)}_{gk;12}$	$S^{(n)}_{b;12}$	$t_{n;12}$	$d^{(n)}_{w;12}$

Wprowadzone w tabeli 1 oznaczenia mają następujący sens:

$S_{bf;i}^{(1)}$ – sprzedaż badanej firmy w i-tym miesiącu w pierwszym roku bazowym,

$S_{gk;i}^{(1)}$ – sprzedaż głównego konkurenta w i-tym miesiącu w pierwszym roku bazowym,

$S_{b;i}^{(1)}$ – sprzedaż branży w i-tym miesiącu w pierwszym roku bazowym,

$t_{1;i}$ – względny udział badanej firmy w rynku w i-tym miesiącu w pierwszym roku bazowym,

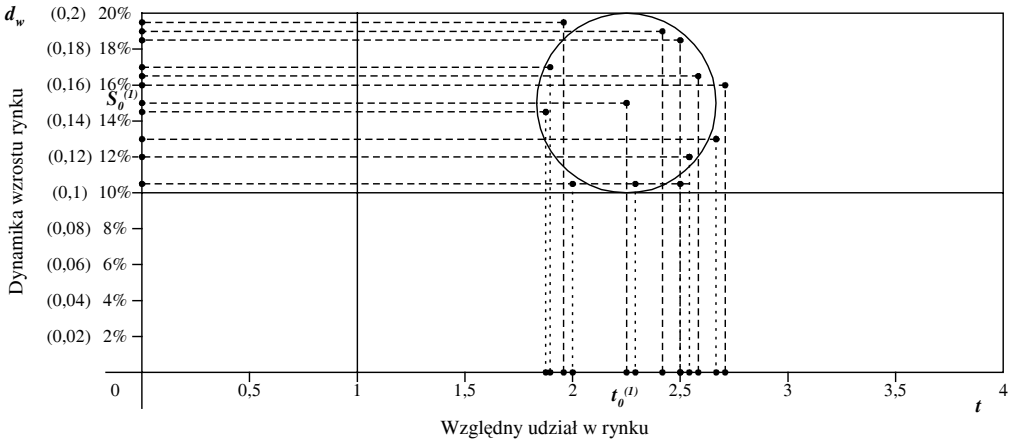
$d_{w;i}^{(1)}$ – dynamika wzrostu rynku w i-tym miesiącu w pierwszym roku bazowym.

Do wyznaczenia dynamiki wzrostu rynku (zob. ostatnia kolumna w tabeli 1) wykorzystano wskaźnik tempa przyrostu wyrażony wzorem

$$d_w = \frac{S_{b;i} - S_{b;i-k}}{S_{b;i-k}} \cdot 100\%$$

(w przypadku relacji między sąsiednimi wielkościami szeregu statystycznego $k = 1$).

Rozważmy wykres portfolio uwzględniający rynek odznaczający się niską konkurencyjnością i wysoką dynamiką rozwoju.



Rys. 1. Wykres portfolio

Zgodnie z podanym algorytmem na podstawie danych zawartych w tabeli 1 wyznaczono punkty pomiarowe $(t_i, s_i)\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, położone na płaszczyźnie (t, s) (zob. rys. 1):

ROK:

$$(t_1) \rightarrow : \quad (t_{1;1}, d^{(1)}_{w;1}), (t_{1;2}, d^{(1)}_{w;2}), (t_{1;3}, d^{(1)}_{w;3}), (t_{1;4}, d^{(1)}_{w;4}),$$
$$(t_{1;5}, d^{(1)}_{w;5}), (t_{1;6}, d^{(1)}_{w;6}), (t_{1;7}, d^{(1)}_{w;7}), (t_{1;8}, d^{(1)}_{w;8}),$$
$$(t_{1;9}, d^{(1)}_{w;9}), (t_{1;10}, d^{(1)}_{w;10}), (t_{1;11}, d^{(1)}_{w;11}), (t_{1;12}, d^{(1)}_{w;12}),$$

$$(t_2) \rightarrow : \quad (t_{2;1}, d^{(2)}_{w;1}), (t_{2;2}, d^{(2)}_{w;2}), (t_{2;3}, d^{(2)}_{w;3}), (t_{2;4}, d^{(2)}_{w;4}),$$
$$(t_{2;5}, d^{(2)}_{w;5}), (t_{2;6}, d^{(2)}_{w;6}), (t_{2;7}, d^{(2)}_{w;7}), (t_{2;8}, d^{(2)}_{w;8}),$$
$$(t_{2;9}, d^{(2)}_{w;9}), (t_{2;10}, d^{(2)}_{w;10}), (t_{2;11}, d^{(2)}_{w;11}), (t_{2;12}, d^{(2)}_{w;12}),$$

.....

$$(t_n) \rightarrow : \quad (t_{n;1}, d^{(n)}_{w;1}), (t_{n;2}, d^{(n)}_{w;2}), (t_{n;3}, d^{(n)}_{w;3}), (t_{n;4}, d^{(n)}_{w;4}),$$
$$(t_{n;5}, d^{(n)}_{w;5}), (t_{n;6}, d^{(n)}_{w;6}), (t_{n;7}, d^{(n)}_{w;7}), (t_{n;8}, d^{(n)}_{w;8}),$$
$$(t_{n;9}, d^{(n)}_{w;9}), (t_{n;10}, d^{(n)}_{w;10}), (t_{n;11}, d^{(n)}_{w;11}), (t_{n;12}, d^{(n)}_{w;12}),$$

Następnie wyznaczono macierz kowariancji określoną wzorem (17), przy czym współczynnik korelacji pomiędzy błędami pomiarowymi za pomocą wzoru

$$\rho = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Delta s_i \Delta t_i - \overline{\Delta} s \overline{\Delta} t}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (\Delta s_i)^2 - (\overline{\Delta} s)^2\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (\Delta t_i)^2 - (\overline{\Delta} t)^2\right)}} \,.$$
$$m = 1, 2$$

Wykorzystując dane dotyczące względnego udziału badanej firmy w rynku (t) jak również dynamikę wzrostu rynku (w %) (d_w), zbudowano wektor pomiarów $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{w;1}^{(1)} \\ t_{1;1} \\ d_{w;2}^{(1)} \\ t_{1;2} \\ d_{w;3}^{(1)} \\ t_{1;3} \\ d_{w;4}^{(1)} \\ t_{1;4} \\ d_{w;5}^{(1)} \\ t_{1;5} \\ d_{w;6}^{(1)} \\ t_{1;6} \end{bmatrix},$$

oraz macierz kowariancji $\mathbf{C}_y$ wyrażoną wzorem (17).

Równania więzów w rozważanym przypadku mają następującą postać:

$$(d_{w;1}^{(1)})^2 + t_{1;1}^2 - 2x_{10}d_{w;1}^{(1)} - 2x_{20}t_{1;1} + x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0,$$

$$(d_{w;2}^{(1)})^2 + t_{1;2}^2 - 2x_{10}d_{w;2}^{(1)} - 2x_{20}t_{1;2} + x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0,$$

.....

$$(d_{w;12}^{(1)})^2 + t_{1;6}^2 - 2x_{10}d_{w;12}^{(1)} - 2x_{20}t_{1;6} + x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0.$$

Macierze (4) i (5) wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2d_{w;1}^{(1)} + 2x_{10} & -2t_{1;1} + 2x_{20} & -2x_{30} \\ -2d_{w;2}^{(1)} + 2x_{10} & -2t_{1;2} + 2x_{20} & -2x_{30} \\ \dots & \dots & \dots \\ -2d_{w;12}^{(1)} + 2x_{10} & -2t_{1;6} + 2x_{20} & -2x_{30} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2d_{w;1}^{(1)}-2x_{10} & 2t_{1;1}-2x_{20} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{w;2}^{(1)}-2x_{10} & 2t_{1;2}-2x_{30} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2d_{w;12}^{(1)}-2x_{10} & 2t_{1;6}-2x_{20} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(\overline{x}_{0,}\overline{\eta}_0) \\ f_2(\overline{x}_{0,}\overline{\eta}_0) \\ \cdots \\ f_m(\overline{x}_{0,}\overline{\eta}_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(\overline{x}_{0,}\overline{y}) \\ f_2(\overline{x}_{0,}\overline{y}) \\ \cdots \\ f_m(\overline{x}_{0,}\overline{y}) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{C}_j=f_j(\overline{x}_0,\overline{y})=d_{w;1;j}^2+t_j^2-2d_{w;1;j}d_{w;0}-2t_jt_0+d_{w;0}^2+t_0^2-\tau^2,$$
$$j=1,2,...,m.$$

Ostatecznie zgodnie ze wzorem (16) otrzymujemy estymatory współrzędnych środków kół i ich promieni.

Plan sytuacyjny przedsiębiorstwa w okresie prognozowanym

Przeprowadzone badania udziału i konkurencyjności określonego przedsiębiorstwa na rynku w okresie bazowym umożliwiły wyznaczenie jego planu sytuacyjnego. Korzystając z analizy retrospektywnej odpowiednio zdefiniowanego zbioru obserwacji dostępnych w czasie wyznaczania prognozy oraz pewnej operacji wykonanej na tym zbiorze, możemy wyznaczyć prognozę planu sytuacyjnego przedsiębiorstwa na rynku [4]. Plan sytuacyjny przedsiębiorstwa na rynku w okresie prognozowanym reprezentowany będzie przez odpowiednio rozmieszczone koła $K(\hat{r}_i,\hat{s}_0^{(i)},\hat{t}_0^{(i)})$ w dwuwymiarowej przestrzeni $s\circ t$; $\hat{r}_i$ – prognoza długości promienia, $\hat{s}_0^{(i)},\hat{t}_0^{(i)}$ – prognozy współrzędnych środków koła dla *i*-tego wyrobu. Plan ten można również wyznaczyć na podstawie [4]:

- sprzedaży własnej (S_w)
- sprzedaży największego konkurenta (S_k),
- sprzedaży globalnej (*S*),
- dynamiki sprzedaży (*W*).

Okazuje się, że otrzymane w ten sposób prognozy nieznacznie różnią się od tych, które wyznaczono bezpośrednio dla szeregów czasowych charakteryzujących wielkości $r_i,s_0^{(i)},t_0^{(i)}$. Ostatecznie plan sytuacyjny przedsiębiorstwa na rynku można wyznaczyć, korzystając z obu sposobów, za pomocą prognoz kombinowanych [3]. Należy jednak zauważyć, że nieistotne różnice w położeniu odpowiednich kół na płaszczyźnie (*t*, *s*) nie mają wpływu na interpretację merytoryczną.

Bibliografia

[1] BRANDT S., *Analiza danych*, PWN, Warszawa 1998.
[2] BRANDT S., *Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych*, PWN, Warszawa 1974.
[3] GALANC T., MIKUŚ J., *Resultant Forecasts*, Technological Forecasting and Social Change, 1980, 16.
[4] KAPŁON R., MIKUŚ J., *Określenie planu sytuacyjnego przedsiębiorstwa w okresie prognozowanym*, Badania Operacyjne i Decyzje, 2001, nr 3–4.
[5] MYNARSKI S., *Badania rynkowe w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków 2001.

Remarks on Boston Consulting Group Method (BCG)

The situational plan of an enterprise in the market can be determined by means of the BCG method. The analysis consists in graphical presentation of the spatial distribution of the enterprise activity conditions. The presentation is made in two dimensional spaces in which horizontal axis represents the relative participation of the strategic units in the market and vertical axis represents the market growth rate. In such a coordinate system, enterprise activity can be visualized by means of the circles.

In the paper a proposition has been put forward how to calculate the estimators of coordinates of circle centers and their radii in BCG method, taking into consideration the assessment errors on the axis of relative participation of the strategic unit under study in the market and on the axis of market's growth rate. Advantage has been taken of the general case of LSE including Lagrange's multipliers method with nonlinear constrains equations. An example illustrating the method proposed has been included.

Key words: *BGG method, estimator, situation plan, prognosing*