

# Sur l'imagérie optique d'un miroir plan en mouvement rectiligne uniforme

On a examiné les propriétés optiques d'un miroir plan se mouvant avec une vitesse constante. A partir de la loi de réflexion relativiste on a établi l'équation de l'imagérie. On a constaté qu'il y a un déplacement de l'image dans le cas où les angles d'incidence sont faibles. Pour les faisceaux lumineux étendus il apparait l'aberration due à la vitesse du miroir. Les considérations théoriques sont complétées par des exemples numériques.

1. La propagation de la lumière est caractérisée par le vecteur d'onde. Conformément à la définition, nous avons

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (1)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire dans le sens de la propagation de l'onde lumineuse,  $\omega$  est la fréquence cyclique et  $c$  — la vitesse de la lumière. En relativité, dans l'espace-temps de Minkowski, on utilise le vecteur d'onde quadridimensionnel [1] de composantes

$$k_1 = k_x, k_2 = k_y, k_3 = k_z, k_4 = i \frac{\omega}{c}. \quad (2)$$

Le quadrivecteur-lieu  $x_\mu$  avec  $\mu = 1,2,3,4$  est défini comme suit:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict. \quad (3)$$

Dans le formalisme quadridimensionnel la transformation de Lorentz du vecteur  $k_\mu$  est donnée par les formules:

$$k'_1 = \frac{k_1 + i\beta k_4}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$k'_2 = k_2, k'_3 = k_3, k'_4 = \frac{k_4 - i\beta k_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4)$$

où  $\beta = \frac{V}{c}$ ,  $V$  est la vitesse d'un int riel  $K'$  par rapport à l'autre  $K$ . Les axes des  $X$  et  $X'$  sont en coïncidence. Soit  $k_1 = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$ . Ainsi, il résulte

des formules (4) que

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}. \quad (5)$$

2. En optique relativiste l'angle de réflexion n'est pas égal à l'angle d'incidence. C'est le mouvement de la surface réfléchissante qui fait que cette loi n'est pas valable. Considérons une surface réfléchissante plane liée au référentiel  $K'$ . Admettons encore que cette surface coïncide avec le plan  $Y'Z'$ . Le système  $K'$  glisse dans  $K$  avec la vitesse  $V$  le long de l'axe des  $X$  (Fig. 1).

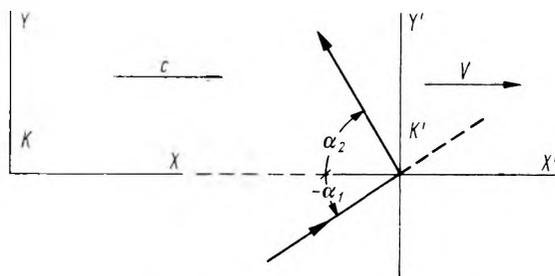


Fig. 1. Réflexion de la lumière par un miroir plan en mouvement

La loi classique de réflexion est valable dans le système  $K'$ . Pour un observateur dans le système  $K$  cette loi doit être remplacée par une loi plus complexe dérivant de la formule (5). Dans notre cas, en utilisant (5) on obtient [2], [3]

$$\frac{\sin(-\alpha_1)}{\cos(-\alpha_1) - \beta} = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 + \beta}. \quad (6)$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réflexion. La convention relative aux signes des angles est envisagée sur la figure 1. La formule (6) exprime la loi de réflexion relativiste.

\* Institute of Technical Physics, Technical University of Wroclaw, Wroclaw, Wybrze e Wyspiańskiego 27, Poland.

Pour des angles très petits (la vitesse  $V$  peut être quelconque) nous avons approximativement:

$$\frac{\alpha_1}{1-\beta} = -\frac{\alpha_2}{1+\beta}. \quad (7)$$

Dans notre cas, il s'ensuit que  $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ . En général, le rapport des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est déterminé par la direction de la vitesse  $V$ .

3. Examinons maintenant l'imagérie optique d'un miroir plan en mouvement. A ma connaissance on n'a pas encore étudié ce problème. On sait bien quelles sont les propriétés optiques de l'image fournie par un miroir dans un système de référence où ce miroir est au repos [4], [5]. Soit le miroir en mouvement par rapport à l'observateur. Supposons pour le moment que les angles des rayons du faisceau lumineux sont petits. Cette exigence fait valable la formule (7). Considérons un point objet  $P_1$  (Fig. 2). Dans ce cas, on voit facilement que

$$s_{2_0} = s_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -s_1 \frac{1-\beta}{1+\beta}. \quad (8)$$

Nous avons convenu d'évaluer les abscisses avec le sens positif de la lumière incidente.

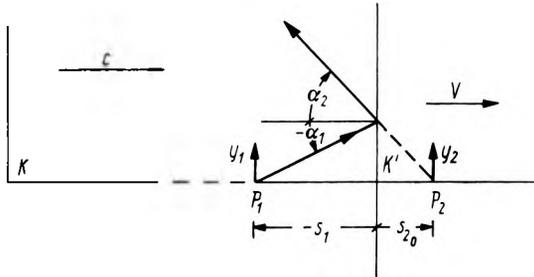


Fig. 2. L'image d'un objet ponctuel donnée par un miroir plan en mouvement

Nous constatons tout d'abord qu'il y a le stigmatisme rigoureux. On obtient l'image ponctuelle. Il est à remarquer aussi que l'abscisse de l'image  $s_{2_0}$  n'est pas égale à l'abscisse de l'objet  $s_1$ . Il y a un «déplacement relativiste» de l'image. On peut caractériser cette propriété de l'imagérie à l'aide de la grandeur suivante:

$$\Delta s_0 = s_{2_0} - s_{2_0(\beta=0)} = s_{2_0} + s_1 = \frac{2\beta}{1+\beta} s_1. \quad (9)$$

Pour compléter cette étude calculons aussi les grandissements. Nous avons d'après les équations (7) et (8)

$$\text{le grandissement angulaire: } g_a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad (10)$$

le grandissement longitudinal:

$$g_x = \frac{s_{2_0}}{s_1} = -\frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad (11)$$

le grandissement transversal:

$$g_y = \frac{y_2}{y_1} = g_x g_a = 1. \quad (12)$$

4. Essayons encore de nous libérer des conditions simplificatrices. C'est à dire que nous allons examiner l'imagérie à l'aide des faisceaux lumineux étendus. Dans ce cas l'équation de l'imagérie s'écrit (voir Fig. 2)

$$s_2 = s_1 \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2}. \quad (13)$$

Par suite des considérations déjà faites, la formule (6) est valable. Introduisons une expression auxiliaire («invariant de réflexion»). Par définition, il est

$$A = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \beta}. \quad (14)$$

A partir de l'expression  $A$  on calcule les tangents des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . En admettant la relation pour les petits angles  $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{tg} \alpha_1 &= \frac{A(1-\beta)\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}{1-A^2\beta^2}, \\ \text{tg} \alpha_2 &= \frac{A(1+\beta)\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}{1-A^2\beta^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Par conséquent, l'équation du rayon lumineux devient

$$s_2 = -s_1 \frac{1-\beta\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}{1+\beta\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}. \quad (16)$$

Calculons encore le «déplacement relativiste» de l'image. Conformément à la définition (9) nous trouvons l'expression suivante:

$$\Delta s = s_1 \frac{2\beta\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}{1+\beta\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}. \quad (17)$$

L'abscisse de l'image est une fonction de l'angle d'incidence (Fig. 3). Ainsi, il apparaît l'aberration due à la vitesse du miroir. Cette aberration («aberration cinématique») se calcule comme suit

$$\Delta s_2 = s_2 - s_{2_0} = -s_1 \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{1-\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}{1+\beta\sqrt{1+A^2(1-\beta^2)}}. \quad (18)$$

Notons le cas limite de notre problème. L'angle de réflexion ne peut dépasser la valeur  $\alpha_2 = 90^\circ$ . En conséquence, il existe un angle d'incidence ma-

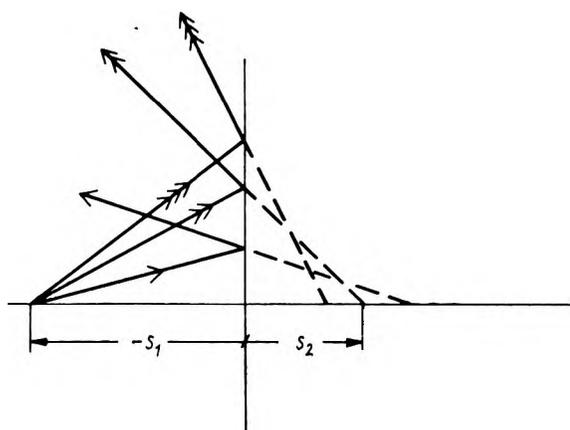


Fig. 3. La marche des rayons lumineux dans un miroir plan en mouvement

ximum (ouverture du faisceau lumineux). Conformément à la formule (6) on a

$$\frac{\sin(-\alpha_{1m})}{\cos(-\alpha_{1m}) - \beta} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + \beta} = \frac{1}{\beta} \quad (19)$$

En vertu de cette condition (19) on obtient

$$\cos \alpha_{1m} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \quad (20)$$

Il est évident que pour  $\alpha_1 = \alpha_{1m}$  on aura  $s_2 = 0$  et  $\Delta s_2 = s_{2(\beta=0)}$ .

5. Pour compléter nos connaissances nous ajoutons encore quelques exemples numériques. Les deux cas particuliers sont envisagés: 1. la vitesse du miroir  $V = \frac{c}{3} = 10^8$  m/s; 2.  $V = \frac{c}{3} \cdot 10^{-4} = 10^4$  m/s (vitesse cosmique). On a donné ci-dessous les résultats de calcul (les tableaux et les graphiques):

$$1. V = \frac{c}{3}, \beta = \frac{1}{3}, \alpha_{1m} = -53^\circ 8', s_{20} = -0,5 s_1, \Delta s_0 = 0,5 s_1$$

$\alpha_1$	$-10^\circ$	$-20^\circ$	$-30^\circ$	$-40^\circ$	$-50^\circ$
$A$	-0,266	-0,564	-0,939	-1,486	-2,475
$\frac{\Delta s_2}{s_1}$	0,0115	0,0481	0,1160	0,2398	0,4168

$$2. V = \frac{c}{3} \cdot 10^{-4}, \beta = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}, \alpha_{1m} = -89^\circ 59' 46'', s_2 = -0,99994 s_1, \Delta s_0 = 67 \cdot 10^{-6} s_1$$

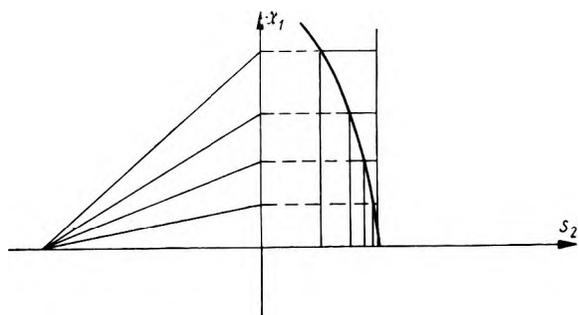


Fig. 4. Courbe représentative de l'imagerie optique d'un objet ponctuel dans un miroir plan en mouvement

$\alpha_1$	$-10^\circ$	$-20^\circ$	$-30^\circ$	$-40^\circ$	$-50^\circ$
$A$	-0,176	-0,364	-0,577	-0,839	-1,192
$10^6 \frac{\Delta s_2}{s_1}$	1,0	4,2	10,3	20,4	37,1

$\alpha_1$	$-60^\circ$	$-70^\circ$	$-80^\circ$	$-85^\circ$
$A$	-1,732	-2,748	-5,672	-11,434
$10^6 \frac{\Delta s_2}{s_1}$	66,7	128,3	317,2	698,2

On voit bien que pour des vitesses ordinaires les effets relativistes sont faibles et les corrections peuvent être rejetées. On peut admettre alors que l'imagerie optique du miroir plan en mouvement est parfaite. Dans le cas général (le miroir se déplaçant à grande vitesse) le stigmatisme est violé.

Il est difficile, pour le moment au moins, de considérer les conséquences des résultats obtenus. Toutefois, on peut espérer que, tôt ou tard, les effets relativistes de l'imagerie optique seront observés. Ceci justifie les études que nous avons entreprises.

### On the Imaging in a Plane Mirror Moving Rectilinearly with a Constant Velocity

Optical properties of a plane mirror moving rectilinearly with a constant velocity have been examined. Basing on the relativistic law of light reflection the imaging equations have been established. The existence of an image shift in the case of small incidence angles have been stated. For the broad optical beams an aberration appears resulting from the mirror velocity. The theoretical considerations are illustrated by numerical examples.

### Об оптическом отображении подвижного плоского зеркала

Исследованы оптические свойства равномерно движущегося плоского зеркала. В соответствии с релятивист-

ким законом рефлексии построено уравнение отображения. Обнаружено, что в случае малых углов падения имеется смещение изображения. Для широких световых пучков появляется абберация зависящая от скорости зеркала. Теоретические рассуждения проиллюстрированы численными примерами.

### Bibliographie

[1] LANDAU L., LIFCHITZ E., Théorie du champ, Moscou 1966, Éd. Mir.

- [2] MC CREA W. H., Relativity Physics, London 1947, Methuen and Co. LTD.
- [3] WOJEWODA H., *Refraction of Light at a Moving Boundary*, Optica Applicata III-1 (1973).
- [4] MARÉCHAL A., *Traité d'optique instrumentale (Imagerie géométrique — Aberrations)*, Tome 1, Paris 1952, Ed. de la Revue d'Optique théorique et instrumentale.
- [5] TUDOROVSKY A. I., *Teoria opticheskikh priborov*, Moscow—Leningrad 1948, Izd. Akad. Nauk. SSSR.

*Received, November 5, 1973*