Alicja Mazur

Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych

Prace Naukowe Instytutu Informatyki, Automatyki i Robotyki
Nr 107 Politechniki Wrocławskiej Nr 107

Monografie Nr 31 2009

manipulator mobilny,
ograniczenia nieholonomiczne,
sterowanie kinematyczne,
sterowanie dynamiczne

Alicja MAZUR *

STEROWANIE OPARTE NA MODELU DLA NIEHOLONOMICZNYCH MANIPULATORÓW MOBILNYCH

W monografii przedstawiono jednolite podejście pozwalające na znalezienie sterowania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych w przypadku, gdy różne zadania podlegają dekompozycji na podzadania definiowane osobno dla każdego z systemów składowych, jakimi są kołowa platforma mobilna oraz ramię manipulacyjne zamontowane na tej platformie. Spośród czterech typów manipulatorów mobilnych rozważono tylko takie, w których kołowa platforma porusza się w sposób ściśle toczny, bez poślizgu i buksowania kół, a więc jest nieholonomiczna. Natomiast w przypadku manipulatora dopuszczono zarówno bezpośrednie napędy, jak i napędy nieholonomiczne.

Równania ruchu układów nieholonomicznych zawierają równania ograniczeń, które muszą być spełnione w każdej chwili, oraz równania dynamiki, połączone w strukturę kaskadową. Z tego względu do projektowania sterowania dla różnych zadań zastosowano podejście, które wymaga jednoczesnego rozwiązywania równania ograniczeń i użycia otrzymanych rozwiązań do sterowania na poziomie dynamicznym.

Jednym z częstych braków spotykanych w wielu pracach jest nieuwzględnianie błędów pochodzących z poziomu dynamiki i zakłócających działanie sterownika kinematycznego (układu rozwiązującego równania ograniczeń), który jest projektowany w przypadku idealnym, a więc bez wzięcia pod uwagę efektów dynamicznych, takich np. jak duża masa, czy bezwładność układu. W monografii przedstawiono takie roz-

*Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

wiązania dla wszystkich rozważanych zadań, w których wspomniane błędy zostały sprowadzone do zera. W przeciwnym razie nie można zagwarantować poprawnego działania układów sterowania podczas procesu regulacji. Proponowane w pracy algorytmy sterowania działają poprawnie, co potwierdzają dowody zbieżności i badania symulacyjne.

Przedstawione algorytmy sterowania obejmują większość zadań, jakie można sformułować dla każdego z podsystemów składowych nieholonomicznego manipulatora mobilnego: sterowanie do punktu, śledzenie trajektorii oraz śledzenie ścieżki. Metoda postępowania w każdym przypadku jest podobna: należy znaleźć algorytm kinematyczny zapewniający realizację zadania dla danego podukładu nieholonomicznego, a następnie wykorzystać otrzymane rozwiązanie do zaprojektowania sterowania na poziomie dynamicznym. Wybór jednego spośród zaprezentowanych algorytmów dynamicznych jest dowolny, jednak algorytm dysypatywny i uniwersalny mogą w prosty sposób zostać zmodyfikowane do postaci adaptacyjnej, stosowanej w przypadku parametrycznej niepewności co do modelu dynamiki.

Sformułowanie problemu sterowania w tak ogólnej postaci pozwala również na realizację zadań mieszanych dla poszczególnych podsystemów, np. platforma może podążać do ustalonej konfiguracji, natomiast manipulator w tym samym czasie może śledzić zadaną trajektorię przegubową. Jedynym warunkiem wymaganym do poprawnej realizacji zadań jest użycie algorytmu kinematycznego posiadającego odpowiednie właściwości, na przykład funkcję Lapunowa gwarantującą globalną lub półglobalną asymptotyczną stabilność dla układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

Prezentowane wyniki mogą być zastosowane w procesie sterowania nieholonomicznymi manipulatorami mobilnymi podczas realizacji wielu zadań, takich jak pobranie ładunku z ustalonego punktu przestrzeni roboczej, podążanie wzdłuż zadanej trajektorii w przestrzeni wewnętrznej lub zewnętrznej, rozładowywanie części ładunku podczas operacji transportowych itp.

1. Wprowadzenie

1.1. Nieholonomiczne manipulatory mobilne

Ograniczenia w ruchu układów mechanicznych można zaobserwować wówczas, gdy nie wszystkie trajektorie mogą być przez system zrealizowane. Niektóre ograniczenia wynikają z konstrukcji układu, a więc są pochodzenia wewnętrznego (np. przegub manipulatora nie może osiągnąć położenia poza ogranicznikami mechanicznymi), inne zaś wynikają ze sposobu realizacji ruchu, czyli pochodzą od otoczenia, w którym układ się przemieszcza. Przykładem ograniczenia drugiego typu jest ruch samochodu po zboczu góry, czyli po pewnej powierzchni definiującej grunt. Ograniczenia takie są przykładami tzw. ograniczeń *holonomicznych*, w których ruch układu jest ograniczony do gładkiej podrozmaitości w przestrzeni stanu Q. Ograniczenia holonomiczne można przedstawić lokalnie jako ograniczenia postaci

$$\phi(q) = \begin{pmatrix} \phi_1(q) \\ \vdots \\ \phi_k(q) \end{pmatrix} = 0. \tag{1.1}$$

Każde przekształcenie ϕ_i ogranicza ruch układu. W klasycznej literaturze z dziedziny mechaniki ograniczenia postaci (1.1) są czasem nazywane ograniczeniami *skleronomicznymi*. Zarówno słowo „holonomiczne”, jak i „skleronomiczne” pochodzi z greki i oznacza odpowiednio „razem słuszne, poprawne” oraz „sztywne”, przy czym ograniczeniami skleronomicznymi nazywane są ograniczenia, które nie zawierają czasu w jawnej postaci. Jednak w dziedzinie robotyki przyjęło się pierwsze określenie i dlatego w dalszej części będziemy używać nazwy „ograniczenia holonomiczne”.

Ograniczenia (1.1) są stałe w czasie, dlatego można je wyrazić jako

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} = 0,$$

to jest w tzw. postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{1.2}$$

gdzie

$$A(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial q_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

jest nazywana macierzą ograniczeń Pfaffa i jest pełnego rzędu.

Innym rodzajem ograniczeń, które mogą być obserwowane w ruchu układów, są ograniczenia nieholonomiczne. Ograniczenia tego typu pojawiają się wówczas, gdy prędkości układu są ograniczone do $(n-k)$-wymiarowej podprzestrzeni, przy jednoczesnym braku ograniczeń na dopuszczalne konfiguracje układu. Występowanie ograniczeń nieholonomicznych można zaobserwować podczas próby zaparkowania samochodu w zatoczce. Samochód wykonuje wówczas szereg manewrów mających przemieścić go w zaplanowane miejsce, gdyż nie jest możliwe wygenerowanie składowej prędkości w kierunku prostopadłym do powierzchni kół. Najczęściej powodem pojawienia się ograniczeń nieholonomicznych jest brak poślizgów w ruchu tocznym w punkcie styku dwóch ciał lub zasada zachowania momentu pędu.

Ograniczenia nieholonomiczne pojawiają się w zachowaniu wielu obiektów robotycznych. W przypadku kołowych robotów mobilnych obecność ograniczeń nieholonomicznych wyrażonych w postaci Pfaffa (1.2) wynika z przyjęcia założenia o braku poślizgu w punkcie styczności każdego koła z podłożem. Z kolei, manipulatory mogą mieć ograniczenia nieholonomiczne, gdy zostaną wyposażone w palczasty chwytak lub gdy zostaną skonstruowane z wykorzystaniem specjalnych sprzęgieł Nakamury, Chunga i Sørdalena [68]. Również wiele robotów projektowanych do specjalnych zastosowań, takich jak roboty latające (samoloty, sterowce, szybowce, helikoptery), roboty morskie (roboty podwodne, statki nawodne, batyskafy), roboty do zastosowań kosmicznych mają często ograniczenia nieholonomiczne nałożone na ruch, wynikające na przykład ze sposobu przekazywania napędu. W ostatnich latach można zauważyć rosnące zainteresowanie układami nieholonomicznymi. Przyczyną tego stanu rzeczy jest fakt, że wprawdzie sterowanie takimi systemami jest znacznie trudniejsze, gdyż są to układy z deficytem sterowań, jednak wymagają zastosowania mniejszej liczby układów napędowych.

Prezentowana praca dotyczy zagadnień sterowania dla specjalnych obiektów robotycznych, jakimi są nieholonomiczne manipulatory mobilne. Manipulator mobilny składa się ze sztywnego manipulatora zamontowanego na platformie mobilnej, zwanej w literaturze kołowym robotem mobilnym, wyposażonej w niepodlegające deformacji koła. Umieszczenie manipulatora (ramienia robota) na platformie powoduje znaczne powiększenie jego przestrzeni roboczej (dzięki mobilności platformy) przy jednoczesnym zachowaniu zręczności i możliwości mani-

pulacyjnych ramienia, jednak jest to okupione istotnymi utrudnieniami w procesie sterowania. Po pierwsze, połączenie dwóch podsystemów o różnej strukturze powoduje powstanie znacznych sprzężeń dynamicznych między obydwoma członami, co może na przykład wywołać ruch platformy nawet wówczas, gdy włączone są napędy tylko dla przegubów manipulatora. Po drugie, może wystąpić niejednoznaczność rozwiązań projektowanych zadań dla obu podsystemów, na przykład śledzenie ścieżki lub trajektorii może być realizowane tylko przez jeden podsystem (manipulator lub platformę) lub poprzez skoordynowane współdziałanie obu podsystemów. W związku z tym niezbędna jest precyzyjna definicja śledzonej ścieżki lub trajektorii dla manipulatora mobilnego. Po trzecie, pojawienie się ograniczeń nałożonych na ruch tylko jednego podsystemu musi zostać uwzględnione w sterowaniu dla całego układu złożonego.

Ze względu na rodzaj ograniczeń nałożonych na poszczególne podsystemy, manipulatory mobilne można podzielić na następujące typy:

- typ (h, h) – holonomiczny manipulator na holonomicznej platformie,
- typ (h, nh) – holonomiczna platforma z nieholonomicznym manipulatorem,
- typ (nh, h) – nieholonomiczna platforma z holonomicznym manipulatorem,
- typ (nh, nh) – zarówno platforma, jak i manipulator nieholonomiczne. Ten typ manipulatora mobilnego nosi nazwę *podwójnie nieholonomicznego* [86].

1.2. Przegląd zawartości rozprawy

Niniejsza praca dotyczy problematyki sterowania w środowisku wolnym od przeszkód dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych dwóch ostatnich typów, a więc zawierających nieholonomiczną platformę mobilną oraz zamontowany na niej manipulator o holonomicznym lub nieholonomicznym sposobie przekazywania napędów. Poniżej zostanie pokrótce omówiona zawartość poszczególnych rozdziałów monografii.

W rozdziale 2 przedstawiono ograniczenia nieholonomiczne, jakie mogą pojawić się w ruchu manipulatorów mobilnych. Ograniczenia te są typu kinematycznego, ponieważ wiążą prędkości rozważanych obiektów. Pokazano, w jaki sposób wyprowadza się ograniczenia wynikające z braku poślizgów dla kołowych platform mobilnych wyposażonych w koła konwencjonalne oraz jak otrzymuje się ograniczenia prędkościowe dla napędu skonstruowanego przez Nakamurę, Chunga i Sørdalena. Ponieważ rozważane ograniczenia mogą być przedstawione w postaci Pfaffa, omówiono sposoby sprawdzania nieholonomiczności ograniczeń kinematycznych z wykorzystaniem tzw. małej lub dużej flagi systemu. Ponadto podano

metodę transformacji otrzymanych ograniczeń do jednej z tzw. postaci normalnych, jaką jest postać łańcuchowa. Przekształcenie równań kinematyki do tej postaci umożliwia wykorzystanie znanych algorytmów sterowania dla układów łańcuchowych.

Rozdział 3 dotyczy sposobów modelowania zachowania nieholonomicznych manipulatorów mobilnych. Ponieważ w pracy skupiono się na manipulatorach mobilnych typu (nh, h) i (nh, nh), omówiono zarówno równania kinematyki (równania ograniczeń), jak i równania dynamiki dla obu wspomnianych typów manipulatorów mobilnych wyrażone w różnych współrzędnych. Wybór współrzędnych, a więc postaci modelu, jest zdeterminowany przez rodzaj zadań, jakie manipulator mobilny ma realizować podczas swojej pracy.

Problem sterowania został sformułowany w rozdziale 4. Ze względu na kaskadową strukturę równań ruchu, do celów sterowania manipulatorem mobilnym stosowany jest algorytm całkowania wstecznego. Wymaga on równoczesnego rozwiązania równań opisujących ograniczenia nieholonomiczne (jest to tzw. sterowanie kinematyczne) i sterowania na poziomie dynamicznym, zarówno przy pełnej znajomości modelu dynamiki manipulatora mobilnego, jak i w przypadku parametrycznej nieznajomości tego modelu (podano algorytm sterowania adaptacyjnego oraz uniwersalnego).

Sterowanie kinematyczne ma na celu rozwiązanie różnych zadań dla podsystemów nieholonomicznych, tj. kołowych platform mobilnych z ograniczoną mobilnością oraz manipulatorów z nieholonomicznym przeniesieniem napędów. W rozdziale 5 przedstawiono wybrane algorytmy kinematyczne, zarówno pracujące w pętli otwartej, jak i w pętli zamkniętej. Rozważono algorytmy zapewniające śledzenie trajektorii, śledzenie ścieżki oraz sterowanie do punktu.

W rozdziale 6 przedstawiono algorytmy sterowania do punktu gwarantujące osiągnięcie ustalonej konfiguracji dla manipulatorów typu (nh, h) i (nh, nh). Na przykładzie algorytmu wielomianowego dla zadania sterowania do punktu dla układów łańcuchowych pokazano, jak dynamika wpływa na trajektorie układu i dlaczego dla dokładnej realizacji wybranego celu niezbędne jest zastosowanie algorytmów ze sprzężeniem zwrotnym. W przypadku kaskadowego połączenia sterowania na poziomie kinematycznym i dynamicznym należy rozważyć dodatkowe błędy pochodzące z poziomu dynamicznego i zakłócające rozwiązania teoretyczne, jakimi są algorytmy kinematyczne. Przy odpowiednim doborze parametrów regulacji można pokazać asymptotyczną zbieżność do zera błędów pochodzących z poziomu dynamicznego. W ten sposób można udowodnić poprawną koordynację działań obu podsystemów, tj. platformy i manipulatora, sprzężonych dynamicznie.

Kolejnym zadaniem dla manipulatora mobilnego, przedstawionym w rozdziale 7, jest śledzenie zadanej trajektorii definiowanej w przestrzeni wewnętrznej

manipulatora. Pokazano algorytmy sterowania dla obu rozpatrywanych typów nieholonomicznych manipulatorów mobilnych oraz dowody ich poprawnego działania. W obu typach obiektów w roli sterowania kinematycznego zastosowano algorytmy śledzenia trajektorii ogólnego przeznaczenia, jakimi są linearyzacja dynamiczna oraz algorytm Jianga i Nijmeijera dla układów łańcuchowych.

W rozdziale 8 omówiono problematykę śledzenia trajektorii zdefiniowanej w przestrzeni zewnętrznej. Podstawową metodą wykorzystywaną w tak sformułowanym zadaniu jest odsprzęganie transformacji wejściowo-wyjściowej, a następnie sterowanie układem odsprzężonym w celu realizacji zadania postawionego przed manipulatorem mobilnym. Punktem wyjścia do uzyskania układu odsprzężonego jest podejście zaproponowane przez Yamamoto i Yuna, polegające na odpowiednim wyborze współrzędnych efektora w zależności od liczby wejść w podukładzie nieholonomicznym. Ponieważ metoda Yamamoto i Yuna cechuje się pewnymi ograniczeniami, zaproponowano rozszerzenie wyboru funkcji wyjściowych koniecznych do przeprowadzenia procedury odsprzęgania do postaci, która umożliwiłaby jednoczesne przemieszczanie platformy i poruszanie manipulatorem względem podstawy. Taki sposób definiowania wydaje się przydatny w procesie rozładowywania przewożonych towarów podczas operacji transportowych. Rozszerzone funkcje wyjściowe znajdują także zastosowanie podczas śledzenia trajektorii zadaniowej dla podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego.

Ostatnie zadanie dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, czyli śledzenie ścieżki, przedstawiono w rozdziale 9. Dla każdego z dwóch typów obiektów zadanie jest definiowane w odmienny sposób. Asymptotyczne śledzenie ścieżki dla podukładu nieholonomicznego (kołowej platformy mobilnej lub manipulatora z nieholonomicznym napędem) może być przekształcone za pomocą parametryzacji Freneta do zadania sterowania do punktu dla bezdryfowego układu sterowania. Z kolei dla holonomicznego manipulatora, będącego częścią manipulatora mobilnego typu (nh, h), śledzenie ścieżki jest rozumiane jako przemieszczanie się wzdłuż ograniczonej krzywej sparametryzowanej odległością krzywoliniową, z zatrzymaniem na jej końcu.

Rozdział 10 zawiera podsumowanie zawartości rozprawy i uwagi końcowe. W szczególności podkreślono oryginalne rozwiązania przedstawione w monografii w dziedzinie sterowania nieholonomicznych manipulatorów mobilnych. W rozdziale tym omówiono również otwarte kierunki badań i tematykę przyszłych prac.

Podstawowe definicje i twierdzenia o stabilności dla różnych typów układów sterowania przedstawiono w rozdziale 11. Twierdzenia te są podstawowym narzędziem do badania stabilności nieholonomicznych manipulatorów mobilnych.

W tabeli 1.1 zestawiono kinematyczne i dynamiczne algorytmy sterowania użyte do realizacji różnych zadań formułowanych dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, których dowody zamieszczono w monografii.

Tabela 1.1. Algorytmy sterowania realizujące różne zadania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, których dowody zamieszczono w pracy

Table 1.1. Control algorithms solving different tasks for nonholonomic mobile manipulators which proofs of convergence are included in the monography

Zadanie	Obiekt	Algorytm
sterowanie do punktu (rozdz. 6)	(nh, h)	kinematyczny dla platformy: algorytm Pometa z parametryzacją Freneta
		dynamiczny: dysypatywny
	(nh, nh)	kinematyczny dla platformy: algorytm Pometa z parametryzacją Freneta kinematyczny dla manipulatora: algorytm Nakamury, Chunga i Sørdalena
		dynamiczny: dysypatywny
śledzenie trajektorii wewnętrznej (rozdz. 7)	(nh, h)	kinematyczny dla platformy: linearyzacja dynamiczna
		dynamiczny: adaptacyjny dysypatywny z kompensacją błędów na poziomie dynamicznym
	(nh, nh)	kinematyczny dla platformy: linearyzacja dynamiczna kinematyczny dla manipulatora: algorytm Jianga i Nijmeijera
		dynamiczny: dysypatywny z kompensacją błędów na poziomie dynamicznym
śledzenie trajektorii zewnętrznej (rozdz. 8)	(nh, h)	wyjścia Yamamoto i Yuna wyjścia rozszerzone
		odsprzęganie i linearyzacja we–wy
	(nh, nh)	wyjścia rozszerzone
		odsprzęganie i linearyzacja we–wy
śledzenie ścieżki (rozdz. 9)	(nh, h)	kinematyczny dla platformy: algorytm Samsona z parametryzacją Freneta
		dynamiczny: dysypatywny z modyfikacją Galickiego
	(nh, nh)	kinematyczny dla platformy: algorytm Samsona z parametryzacją Freneta kinematyczny dla manipulatora: odsprzęganie dla parametryzacji Freneta
		dynamiczny: dysypatywny

2. Kinematyka układów nieholonomicznych

Niniejszy rozdział prezentuje kinematykę układów nieholonomicznych. Szczególną uwagę zwrócono na równania kinematyki nieholonomicznych kołowych platform mobilnych, a także manipulatorów o nieholonomicznym sposobie przenoszenia napędów, ponieważ takie systemy robotyczne stanowią części składowe nieholonomicznych manipulatorów mobilnych typu (nh, h) oraz (nh, nh), rozważanych w tej pracy.

Istnieje kilka powodów do specjalnego potraktowania obu wspomnianych typów obiektów robotycznych. Pierwszym z nich jest fakt, że zarówno kołowe platformy mobilne, jak i manipulatory nieholonomiczne mają ograniczenia nieholonomiczne wynikające z założenia o braku poślizgów stykających się powierzchni podczas realizacji ruchu. Po drugie, warto przedstawić metodę wyprowadzania ograniczeń kinematycznych w systematyczny sposób, ponieważ artykuły publikowane w czasopismach często prezentują je w sposób uproszczony. Po trzecie, nieholonomiczne manipulatory mobilne były obiektem badań autorki przez ostatnie lata, co znalazło wyraz w szeregu publikacji [47]–[56].

Zwrot „układy nieholonomiczne” oznacza układy z pewnym typem ograniczeń nałożonych na realizowane przez nie trajektorie. Podstawowe źródła ograniczeń nieholonomicznych to założenie o braku poślizgu (zerowym wektorze prędkości chwilowych) w punkcie kontaktu pomiędzy stykającymi się powierzchniami elementów mechanicznych, a także zasada zachowania pędu. Ograniczenia pochodzące z pierwszego źródła są to ograniczenia kinematyczne, natomiast drugi rodzaj ograniczeń musi być rozważany na poziomie dynamicznym. W tej pracy omawiane będą wyłącznie ograniczenia nieholonomiczne pochodzenia kinematycznego, czyli ograniczenia prędkościowe.

Rozważania dotyczące nieholonomiczności ograniczeń należy poprzedzić pewnymi uwagami terminologicznymi. W wielu podręcznikach do robotyki [84], [15] kinematyką nazywa się przekształcenie między dwiema przestrzeniami położeń. Przestrzeń zawierająca sterowane zmienne stanu jest nazywana przestrzenią wew-

nętrzną (przegubową, konfiguracyjną), natomiast przestrzeń, w której definiuje się ruch, nosi nazwę przestrzeni zewnętrznej (zadaniowej, roboczej). W klasycznej robotyce kinematyka prosta to transformacja z przestrzeni przegubowej do roboczej, transformacja zaś z przestrzeni roboczej do przegubowej to kinematyka odwrotna. Jeśli rozważane są nie tylko położenia, ale również pochodne po czasie (prędkości) zdefiniowane w obu przestrzeniach, to transformacją łączącą je jest macierz Jacobiego. Z kolei, kinematyką układu nieholonomicznego jest nazywane równanie ograniczeń nałożonych na ruch takiego układu, wyrażone następującą zależnością między prędkością $\dot{q}$ a położeniem q układu

$$A(q)\dot{q} = 0.$$

Jak wspomniano we wstępie, taka postać kinematyki nazywa się postacią Pfaffa. Należy zwrócić szczególną uwagę na fakt, że w postaci Pfaffa można wyrazić zarówno ograniczenia nieholonomiczne, jak i holonomiczne. Z tego względu istnieje konieczność wprowadzenia kryterium pozwalającego zweryfikować nieholonomiczność ograniczeń nałożonych na ruch układu.

2.1. Nieholonomiczność ograniczeń

Rozważmy układ mechaniczny, którego zachowanie jest opisane przez n uogólnionych współrzędnych $q \in R^n$ i prędkości $\dot{q} \in R^n$, spełniających l ($l < n$) niezależnych ograniczeń fazowych o postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{2.1}$$

gdzie:

$A(q)$ – macierz $(l \times n)$ pełnego rzędu,
$q(t)$ – trajektoria układu.

Obecność ograniczeń (2.1) może, ale nie musi, wpływać na ograniczenie dopuszczalnych stanów układu. Zależy to od właściwości ograniczeń nazywanej *holonomicznością*.

Ograniczenia holonomiczne oznaczają, że macierz Pfaffa pomnożona z lewej strony przez pewną nieosobliwą macierz $M(q)$ będzie macierzą Jacobiego pewnego odwzorowania $\phi : R^n \to R^l$, tzn.

$$M(q)A(q) = \frac{\partial \phi}{\partial q}(q).$$

Wówczas (2.1) oznacza, że $\frac{d}{dt}\phi(q(t)) = 0$, czyli $\phi(q) = \text{const}$, a zatem trajektorie układu są zawarte w $(n-l)$-wymiarowej rozmaitości. Innymi słowy, ograniczenia holonomiczne powodują zmniejszenie przestrzeni konfiguracyjnej układu.

Inaczej się przedstawia sytuacja w przypadku ograniczeń nieholonomicznych. Jeśli ograniczenia spełniają własność nieholonomiczności, to oznacza, że nie jest możliwe scałkowanie równań (2.1), a co za tym idzie, nie ulega zmniejszeniu przestrzeń stanu układu, natomiast sposób uzyskiwania pewnych konfiguracji może ulec istotnemu utrudnieniu. W dalszych rozważaniach ograniczenia będziemy nazywali nieholonomicznymi, jeżeli wszystkie spośród l ograniczeń będą nieholonomiczne (są to tzw. ograniczenia całkowicie nieholonomiczne).

Załóżmy, że wszystkie ograniczenia są nieholonomiczne. Z równania (2.1) wynika, że dopuszczalne prędkości $\dot{q}$ układu w konfiguracji q należą do jądra (przestrzeni zerowej) macierzy Pfaffa

$$\dot{q} \in \text{Ker } A(q).$$

Oznacza to, że prędkości dopuszczalne można wyrazić jako kombinację pewnych wektorów rozpinających jądro macierzy $A(q)$, jak następuje

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{m} g_i(q) u_i = G(q)u, \tag{2.2}$$

przy czym macierz $G(q)$ oblicza się z równania $A(q)G(q) = 0$. Z niezależności ograniczeń fazowych wynika, że w każdym punkcie przestrzeni stanu rząd macierzy $G(q)$ jest pełny i równy

$$\forall\ q \quad \text{rank } \ G(q) = n - l = m.$$

Pola wektorowe $g_1, g_2, ..., g_m$ (kolumny macierzy G) tworzą w przestrzeni stanu obiekt geometryczny

$$\mathcal{G} = \text{span}_{\ C^\infty} \{g_1, g_2, ..., g_m\}$$

noszący nazwę *dystrybucji* stowarzyszonej z układem (2.2). Ograniczenia fazowe (2.1) będą spełnione wówczas, gdy w każdym punkcie należącym do przestrzeni stanu prędkość układu będzie należała do dystrybucji, czyli będzie kombinacją pól wektorowych zdefiniowanych przez kolumny macierzy $G(q)$. Pojęcie dystrybucji $\mathcal{G}$ stanowi punkt wyjścia do sformułowania kryterium nieholonomiczności ograniczeń [65].

Twierdzenie 1. *Niech* $\mathcal{G} = \text{span}_{C^\infty} \{g_1, g_2, ..., g_m\}$. *Zdefiniujmy ciąg dystrybucji*

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + [\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0], \quad ..., \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + [\mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_0], \quad ..., \qquad i = 1, 2, ...,$$

w którym operacja [,] *oznacza* nawias Liego *dwóch pól wektorowych, zdefiniowany w następujący sposób*

$$[f,g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q).$$

Jeżeli dla pewnego $i = r$ *zachodzi*

$$\dim \mathcal{G}_r(q) = n,$$

to ograniczenia (2.1) są nieholonomiczne. Najmniejsza liczba r *o tej właściwości nosi nazwę stopnia nieholonomiczności dystrybucji* $\mathcal{G}$.

Ciąg dystrybucji $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset ...\mathcal{G}_i \subset ...$ nazywamy filtracją dystrybucji $\mathcal{G}$ (małą flagą systemu (2.2)). Pojęcie flagi dystrybucji pojawiło się np. w pracy [63], natomiast termin *mała flaga* wprowadzono za Mormulem.

Jeżeli każda z dystrybucji $\mathcal{G}_i$ ma stały wymiar w każdym punkcie przestrzeni stanu, tzn.

$$\forall\ q \in R^n \quad \dim \mathcal{G}_i(q) = r_i = \text{const},$$

to filtracja jest regularna. Dla filtracji regularnej wymiary kolejnych wzrastających dystrybucji są niemalejące $r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_i \leq \cdots$ i po pewnej liczbie iteracji $p \leq n$ osiągają wartość ustaloną r_p. Ciąg utworzony z wymiarów kolejnych dystrybucji $(r_0, r_1, ..., r_p)$ nazywamy *wektorem wzrostu* dystrybucji $\mathcal{G}$.

Jeżeli spełniony jest warunek

$$r_p(q) = n \ \ \forall\ q,$$

to ograniczenia są w pełni nieholonomiczne i układ (2.2) jest sterowalny. Jeżeli natomiast $r_p < n$, to oznacza, że wśród ograniczeń Pfaffa występują ograniczenia holonomiczne, a więc warunek całkowitej nieholonomiczności nie jest spełniony.

2.2. Ograniczenia nieholonomiczne dla kołowych platform mobilnych

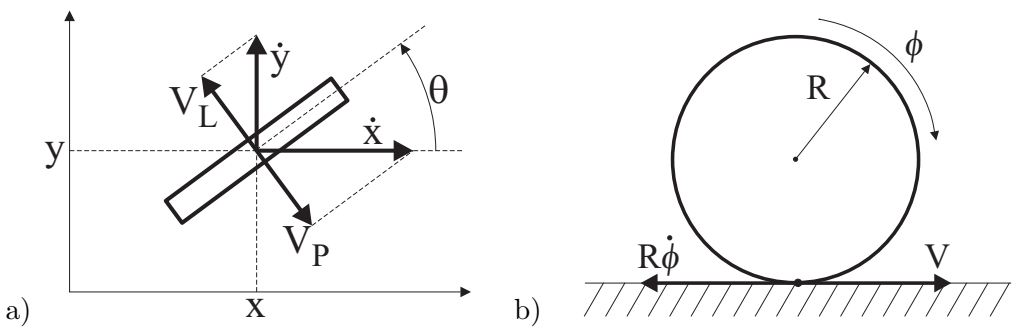
Kołowe platformy mobilne (roboty mobilne) są jednymi z najczęściej rozważanych systemów nieholonomicznych [16], [17], [77]. Platformy mobilne są to pojazdy wyposażone w niedeformowalne koła, które poruszają się po płaszczyźnie ekwipotencjalnej (poziomej). Założenie o ruchu płaskim zostało wprowadzone jedynie dla uproszczenia opisu i nie ogranicza własności strukturalnych robota mobilnego.

Ograniczenia nieholonomiczne w opisie kołowych platform mobilnych pojawiają się w przypadku przyjęcia założenia o tocznym, bezpoślizgowym charakterze ruchu kół. W dalszych rozważaniach przyjęto założenie, że koła, w jakie jest wyposażona platforma, poruszają się bez poślizgów. Takie wyidealizowane koła są nazywane *kołami konwencjonalnymi*.

Koła konwencjonalne, czyli bezpoślizgowe, można podzielić na następujące rodzaje [8]:

- koło ustalone (umocowane do sztywnej osi) – jest to koło, którego orientacja względem układu lokalnego stowarzyszonego z platformą jest stała,
- koło sterowane (kierownica) – jest to koło, którego ruch względem układu lokalnego stowarzyszonego z platformą jest obrotem wokół osi pionowej przechodzącej przez środek koła,
- koło Castora – jest to koło, którego ruch względem układu lokalnego stowarzyszonego z platformą jest obrotem wokół osi pionowej nie przechodzącej przez środek koła.

Każdy typ koła konwencjonalnego może poruszać się bez poślizgu, co jest równoważne z przyjęciem założenia, że prędkość chwilowa w punkcie kontaktu koła z podłożem może przyjmować wartość zerową, co pokazano na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Prędkość koła w punkcie kontaktu z podłożem: a) składowa poprzeczna, b) składowa wzdłużna

Fig. 2.1. Velocity of a conventional wheel at the contact point with a surface: a) orthogonal to the wheel plane, b) parallel to the wheel plane

W pracy [28] pokazano, że położenie układu lokalnego $X_iY_iZ_i$ (stowarzyszonego z i-tym kołem) względem układu podstawowego można wyrazić za pomocą następującej transformacji

$$\begin{aligned} A_0^{ki} &= \mathrm{Trans}(X,x)\mathrm{Trans}(Y,y)\mathrm{Rot}(Z,\theta)\mathrm{Rot}(Z,\alpha_i)\mathrm{Trans}(X,l_i)\mathrm{Rot}(Z,\beta_i) \\ &\quad \cdot\mathrm{Trans}(X,d_i)\mathrm{Rot}(Z,\gamma_i)\mathrm{Rot}(X,\phi_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Parametry $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ są kątami opisującymi geometrię i-tego koła, l_i i d_i są to parametry opisujące umiejscowienie i-tego koła względem środka masy nadwozia, a ϕ_i jest kątem obrotu i-tego koła.

Znając parametry macierzy A_0^{ki}, można wyprowadzić warunki na brak poślizgu dla i-tego koła:

– brak poślizgu bocznego

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) & \sin(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) & d_i\sin\gamma_i + l_i\sin(\gamma_i+\beta_i) \end{bmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + d_i\sin\gamma_i\dot{\beta}_i = 0, \tag{2.4}$$

– brak poślizgu wzdłużnego (buksowania i blokowania)

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) & \cos(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) & d_i\cos\gamma_i + l_i\cos(\gamma_i+\beta_i) \end{bmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + d_i\cos\gamma_i\dot{\beta}_i + r_i\dot{\phi}_i = 0, \tag{2.5}$$

gdzie macierz $R(\theta) = \mathrm{Rot}(Z,-\theta)$ opisuje orientację układu podstawowego względem układu lokalnego robota, zaś r_i jest promieniem i-tego koła.

Ograniczenia dla wszystkich kół, w jakie jest wyposażona platforma, można przedstawić w postaci ogólnej

$$C_1(\beta_s,\beta_c)R(\theta)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + C_2\dot{\beta}_c = 0, \tag{2.6}$$

$$J_1(\beta_s,\beta_c)R(\theta)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + J_2\dot{\phi} = 0, \tag{2.7}$$

przy czym symbolem β_s oznaczono wektor kątów orientacji dla wszystkich kół sterowanych, zaś β_c oznacza wektor kątów orientacji dla wszystkich kół Castora.

Rozważmy teraz ograniczenia dane wzorem (2.6). W pracy [8] pokazano, że możliwość wykonania ruchu przez kołową platformę mobilną jest związana z rzędem macierzy $C_1(\beta_s,\beta_c)$. Aby podzielić kołowe platformy mobilne ze względu na możliwości poruszania się, Campion, Bastin i d'Andrea-Novel w pracy [6] wprowadzili następujące pojęcia:

- *stopień mobilności* σ_m – wymiar dostępnej przestrzeni prędkości w punkcie kontaktu kół z podłożem

$$\sigma_m = 3 - \text{rank } C_1,$$

- *stopień sterowalności* σ_s – liczba kół sterowanych (kierownic) w platformie, które mogą niezależnie zmieniać orientację.

Badając wartości, jakie mogą przyjmować parametry σ_m i σ_s, widać, że:

a) stopień mobilności spełnia nierówność

$$1 \leq \sigma_m \leq 3,$$

co oznacza, że rozpatrujemy tylko przypadki, w których ruch w przestrzeni trójwymiarowej jest możliwy do wykonania,

b) stopień sterowalności spełnia nierówność

$$0 \leq \sigma_s \leq 2,$$

c) zachodzi następujący związek

$$2 \leq \sigma_m + \sigma_s \leq 3.$$

Spełnienie tej nierówności oznacza, że robot jest niezdegenerowany, czyli w przypadku zbyt dużej liczby kół, ich ruch jest odpowiednio skoordynowany (może być zastąpiony jednym kołem).

Z powyższych nierówności wynika, że jest 5 klas kołowych robotów mobilnych [8], co przedstawiono w tabeli 2.1. Definiując typ platformy, należy podać jej parametry (σ_m, σ_s). Spośród platform wymienionych w tabeli 2.1, wszystkie platformy, oprócz klasy $(3, 0)$, są nazywane platformami z ograniczoną mobilnością.

Tabela 2.1. Podział na klasy kołowych platform mobilnych
Table 2.1. Possible classes of wheeled mobile platforms

σ_m	3	2	2	1	1
σ_s	0	0	1	2	1

Warto zauważyć, że dla kół ustalonych i sterowanych warunki na brak poślizgu bocznego i wzdłużnego, przeliczone według oznaczeń z rys. 2.1, mają postać:

- brak poślizgu wzdłużnego

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - R\dot{\phi} = 0, \tag{2.8}$$

- brak poślizgu bocznego

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0, \tag{2.9}$$

gdzie zmienne (x, y) oznaczają współrzędne punktu kontaktu koła z podłożem, θ jest orientacją koła, kąt ϕ jest kątem obrotu koła, a R oznacza promień koła.

2.3. Ograniczenia nieholonomiczne dla manipulatorów

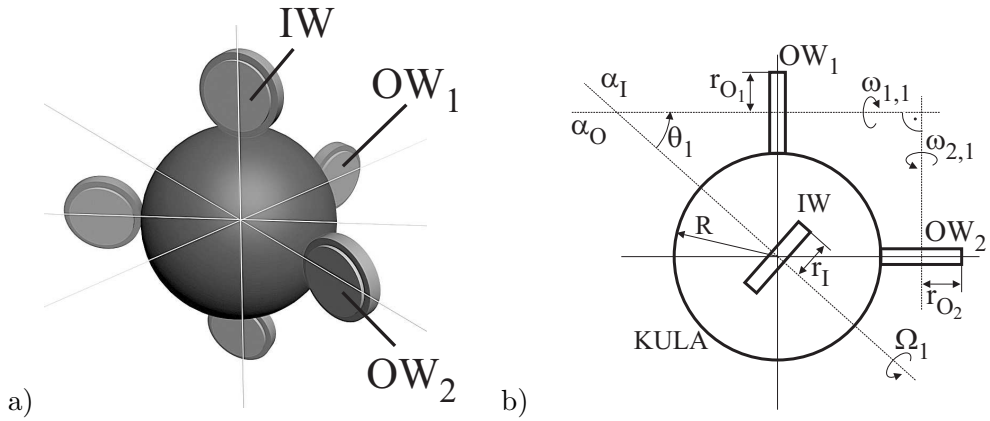
W przypadku robotów manipulacyjnych pojawienie się ograniczeń nieholonomicznych zależy od konstrukcji robota. Do połowy lat 90. XX wieku terminem „manipulator nieholonomiczny" określano manipulator z chwytakiem wielopalczastym o specjalnej budowie palców, w którym ograniczenia nieholonomiczne pojawiały się przy założeniu punktowego bezpoślizgowego kontaktu pomiędzy palcami a manipulowanym obiektem [65].

W połowie lat 90. ubiegłego wieku Nakamura, Chung i Sørdalen przedstawili specjalny napęd, w którym za pomocą dwóch niezależnych silników można napędzać dowolną liczbę obrotowych stopni swobody manipulatora. W pracy [68] zaprezentowano prototyp planarnego manipulatora z takim napędem. Sposób przekazywania napędu jest w nim nieholonomiczny, oparty na założeniu o bezpoślizgowym kontakcie pomiędzy zespołem kół i kul tworzących specjalne sprzęgła umieszczone w przegubach robota. Schemat budowy nieholonomicznego sprzęgła pokazano na rys. 2.2.

Nieholonomiczne sprzęgło składa się z koła wejściowego IW, kuli oraz dwóch kół wyjściowych – OW_1 i OW_2. Koło wejściowe o promieniu r_I jest umieszczone na biegunie kuli o promieniu R i styka się z nią w jednym punkcie, przy czym zakłada się, że wszystkie kontakty w sprzęgle są bezpoślizgowe. Koło wejściowe jest zamocowane w pierwszym przegubie, a koła wyjściowe w przegubie następnym. Koło IW obraca się wokół nieruchomej osi α_I z prędkością kątową u_2, która spełnia rolę sterowania. Obracające się koło IW powoduje obrót kuli, przy czym w punkcie kontaktu prędkość liniowa kuli ma taką samą wartość jak prędkość liniowa koła IW, lecz z odwrotnym znakiem

$$r_{\mathrm{I}} u_2 = -R\Omega_1.$$

Kolejnym elementem sprzęgła są dwa koła wyjściowe o promieniach r_{O_1} i r_{O_2} umieszczone w płaszczyźnie równika kuli. Pierwsze koło OW_1 obraca się wokół osi



Rys. 2.2. Nieholonomiczny napęd: a) widok ogólny, b) rzut z góry
Fig. 2.2. Nonholonomic gear: a) schematic of the gear, b) view from above

α_O, która tworzy z osią koła wejściowego zmieniający się kąt θ_1, będący zmienną przegubową manipulatora. Prędkość kątowa $\dot{\theta}_1 = u_1$ jest drugim sterowaniem dla manipulatora. Oś obrotu drugiego koła wyjściowego OW_2 jest umieszczona pod kątem prostym w stosunku do osi α_O.

Równania kinematyki są sformułowane w sposób rekurencyjny, począwszy od przegubu pierwszego, dlatego wprowadźmy oznaczenie $\omega_{i,j}$ dla prędkości kątowej i-tego koła wyjściowego w j-tym przegubie. W pierwszym przegubie prędkość kątowa $\omega_{1,1}$ koła OW_1 oraz prędkość kątowa $\omega_{2,1}$ koła OW_2 są równe

$$\omega_{1,1} = -\Omega_1 \frac{R}{r_{O_1}} \cos\theta_1, \qquad \omega_{2,1} = -\Omega_1 \frac{R}{r_{O_2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right).$$

Po wyeliminowaniu prędkości kątowej kuli Ω_1 równania te przyjmują postać

$$\omega_{1,1} = \frac{r_I}{r_{O_1}} \cos\theta_1 u_2, \qquad \omega_{2,1} = \frac{r_I}{r_{O_2}} \sin\theta_1 u_2.$$

Jak widać, sterowanie i-tym przegubem wymaga zmiany dwóch wielkości: prędkości kątowej koła wejściowego IW w danym przegubie oraz prędkości kątowej zmiennej przegubowej $\dot{\theta}_i$. Transmisja prędkości z przegubu o numerze $(i-1)$ do koła wejściowego w przegubie i odbywa się poprzez koło OW_1 przegubu o numerze $(i-1)$ z pewnym współczynnikiem przełożenia $\eta_{1,i}$

$$\dot{\rho}_i = \eta_{1,i}\, \omega_{1,i-1}.$$

Natomiast transmisja prędkości z przegubu o numerze $(i-1)$ do zmiennej przegubowej θ_i odbywa się poprzez koło OW_2 w przegubie o numerze $(i-1)$ ze współczynnikiem przełożenia równym $\eta_{2,i}$

$$\dot{\theta}_i = \eta_{2,i}\, \omega_{2,i-1}.$$

Mając podaną regułę rekurencyjną, można otrzymać następujące równania kinematyki dla nieholonomicznego manipulatora o n przegubach (planarnego n-wahadła)

$$\dot{\theta}_1 = u_1, \tag{2.10}$$

$$\dot{\theta}_i = a_i \sin\theta_{i-1} \prod_{j=1}^{i-2} \cos\theta_j u_2, \qquad i \in \{2, ..., n\}. \tag{2.11}$$

Jak wynika z podanych równań, za pomocą dwóch sterowań u_1 i u_2 można sterować wieloma przegubami nieholonomicznego manipulatora o ogniwach rotacyjnych ze sprzęgłami konstrukcji Nakamury, Chunga i Sørdalena.

2.4. Układy łańcuchowe

Ograniczenia nieholonomiczne występują w ruchu wielu układów mechanicznych. W dotychczas rozważanych obiektach, tj. kołowych platformach mobilnych i manipulatorach z nieholonomicznymi sprzęgłami, postaci kinematyki różnią się. Możliwe jest jednak sprowadzenie wielu ograniczeń do jednej z tzw. postaci normalnych. Spośród postaci normalnych najczęściej stosowana jest postać łańcuchowa.

Postać łańcuchowa jest to postać normalna, do której można sprowadzić nieholonomiczne ograniczenia kinematyczne wielu układów mechanicznych, zwłaszcza układów mobilnych. Możliwość modelowania równań kinematyki kołowych robotów mobilnych w tzw. postaci jednołańcuchowej pokazano w pracy [66], natomiast dla samochodu z wieloma przyczepami konwersję do postaci łańcuchowej przedstawiono w [83].

Postać jednołańcuchowa układu nieholonomicznego wydaje się atrakcyjna, ponieważ wiele układów mobilnych, w tym dwie klasy kołowych platform mobilnych, mianowicie klasa $(2, 0)$ i $(1, 1)$, a także kinematyka manipulatora z nieholonomicznym napędem, dają się sprowadzić do takiej postaci.

Układ łańcuchowy można zapisać w następującej postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

lub w równoważnej postaci bezdryfowego układu sterowania jako

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2u_2, \tag{2.13}$$

gdzie

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2.$$

Dla układu (2.13) można obliczyć małą flagę systemu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \{g_1, g_2\}, \\ \mathcal{G}_1 &= \{g_1, g_2, [g_2, g_1] = e_3\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{g_1, g_2, e_3, [g_2, e_3] = e_4\}, \\ &\vdots \\ \mathcal{G}_{n-2} &= \{g_1, g_2, ..., [g_2, e_{n-1}] = e_n\}. \end{aligned}$$

Wektor wzrostu układu łańcuchowego wynosi $(2, 3, 4, ..., n)$, a stopień nieholonomiczności jest równy $n-2$. Widać, że mała flaga układu łańcuchowego rozpina całą przestrzeń stanu, a więc układ łańcuchowy jest sterowalny.

2.4.1. Postać łańcuchowa dla nieholonomicznych kołowych platform mobilnych

Jak wspomniano poprzednio, spośród nieholonomicznych kołowych platform mobilnych jedynie dwie klasy można przekształcić do postaci łańcuchowej. Są to klasy, których równania kinematyki mają dwa wejścia sterujące: klasa $(2, 0)$ i klasa $(1, 1)$.

Klasa $(2, 0)$, do której zalicza się najprostszą platformę mobilną, czyli tzw. monocykl, ma następujące równania kinematyki

$$\dot{q}_m = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

gdzie v jest prędkością liniową, zaś ω prędkością kątową platformy. Aby powyższe równania przekształcić do postaci łańcuchowej, należy zastosować globalny dyfeomorfizm

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta, \\ z_2 &= -x\cos\theta - y\sin\theta, \\ z_3 &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

oraz statyczne sprzężenie zwrotne

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega, \\ u_2 &= -v - \omega z_3. \end{aligned}$$

Przekształcenie to pozwala na globalną transformację równań kinematyki (2.14) do postaci łańcuchowej

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1. \end{aligned}$$

Natomiast klasa $(1,1)$ o kinematyce równej

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{y} &= \tan\theta v, \\ \dot{\theta} &= \frac{\tan\beta}{l} v, \\ \dot{\beta} &= \omega, \end{aligned} \tag{2.15}$$

po zastosowaniu lokalnej ($\mid \theta \mid < \pi/2, \mid \beta \mid < \pi/2$) zmiany współrzędnych [65]

$$\begin{aligned} z_1 &= x, \\ z_2 &= \frac{\tan\beta}{l\cos^2\theta}, \\ z_3 &= \tan\theta, \\ z_4 &= y \end{aligned}$$

oraz zdefiniowaniu nowych wejść

$$\begin{aligned} u_1 &= v, \\ u_2 &= 2\frac{\tan^2\beta\tan\theta}{l^2\cos^2\theta} v + \frac{1}{l\cos^2\beta\cos^2\theta}\omega \end{aligned}$$

przyjmuje postać łańcuchową

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1, \\ \dot{z}_4 &= z_3 u_1. \end{aligned}$$

2.4.2. Postać łańcuchowa dla manipulatorów nieholonomicznych

Aby sterować manipulatorem nieholonomicznym, należy przekształcić jego kinematykę do postaci łańcuchowej. Taki zabieg pozwala na użycie wszystkich istniejących algorytmów sterowania dedykowanych układom łańcuchowym, np. algorytmu Jianga i Nijmeijera [33] gwarantującego śledzenie trajektorii, czy też algorytmu sterowania sinusoidalnego [66] przeprowadzającego układ do zadanego stanu końcowego w określonym horyzoncie czasowym.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do nieholonomicznego manipulatora typu trójwahadło, choć prezentowana procedura, podana przez Sørdalena w pracy [68], może być uogólniona do manipulatora o n przegubach. Kinematykę nieholonomicznego trójwahadła opisaną równaniem (2.10) można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= u_1, \\ \dot{\theta}_2 &= a_2 \sin\theta_1 u_2, \\ \dot{\theta}_3 &= a_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 u_2, \\ \dot{\phi} &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 u_2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie ϕ jest orientacją koła OW_2 w drugim przegubie trójwahadła. W pracy [68] pokazano, że nie jest możliwe przekształcenie kinematyki nieholonomicznego manipulatora do postaci łańcuchowej, jeżeli zmienna ϕ nie jest dodana do przestrzeni stanu trójwahadła, złożonej z kątów $q_r = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Współrzędne transformacji $z = h(\phi, q_r)$ i sprzężenie zwrotne $\nu = F(\phi, q_r)$ zaproponowane w [68] są lokalne (obowiązują jedynie dla $\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2$) i mogą być zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi, \\ z_2 &= a_2 a_3 \tfrac{\tan\theta_1}{\cos^3\theta_1}, \\ z_3 &= a_3 \tan\theta_2, \\ z_4 &= \theta_3, \end{aligned} \tag{2.17}$$

z nowymi wejściami

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 u_2, \\ \nu_2 &= a_2 a_3 \left(\tfrac{u_1}{\cos^2\theta_1 \cos^3\theta_2} + 3 a_2 \tfrac{\sin^2\theta_1 \sin\theta_2 u_2}{\cos\theta_1 \cos^4\theta_2} \right). \end{aligned}$$

Kinematyka nieholonomicznego trójwahadła przedstawiona w postaci łańcuchowej przyjmuje wówczas postać

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \nu_1, \\ \dot{z}_2 &= \nu_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 \nu_1, \\ \dot{z}_4 &= z_3 \nu_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Jak widać, zarówno kinematyka manipulatora z nieholonomicznymi sprzęgłami, jak i kinematyka wybranych klas kołowych platform mobilnych, dadzą się przekształcić lokalnie lub globalnie do postaci łańcuchowej.

3. Modelowanie nieholonomicznych manipulatorów mobilnych

Kinematyka nieholonomicznych układów robotycznych przedstawiona w poprzednim rozdziale opisuje sposób, w jaki zmienne stanu zależą wzajemnie od siebie; innymi słowy, przez kinematykę rozumie się równania ograniczeń. W sterowaniu kinematyką zakłada się, że możliwa jest bezpośrednia zmiana prędkości, tak aby realizowana była pewna trajektoria układu. W rzeczywistości jednak zmianę stanu układu można uzyskać jedynie poprzez sterowanie silnikami (elektrycznymi, pneumatycznymi lub hydraulicznymi), które przenoszą momenty sił lub siły w elementach mechanicznych robota. Równania opisujące zachowanie (ruch) układu w odpowiedzi na sygnały pochodzące z napędów będziemy nazywali *dynamiką* układu.

Istnieje wiele metod otrzymywania równań dynamiki układu mechanicznego, spośród których formalizm Hamiltona i formalizm Lagrange'a znalazły największe zastosowanie w robotyce. Równania Hamiltona cieszą się dużą popularnością [4], [22], gdyż wychodząc z rowaźań energetycznych, pozwalają w prosty sposób uzyskiwać nowe algorytmy sterowania, przede wszystkim algorytmy dysypatywne wykorzystujące pojęcie bierności układu [81], [87]. Z kolei formalizm Lagrange'a ma pewne zalety, dzięki którym jest często spotykany w zastosowaniach robotycznych [36], [48]. Wynika to z kilku przesłanek. Po pierwsze, współrzędnymi układu są położenia i prędkości uogólnione, które są bardziej intuicyjne, niż pojęcie pędów uogólnionych stosowane w formalizmie Hamiltona. Po drugie, równania Lagrange'a pozwalają na wykorzystanie pewnych strukturalnych właściwości modelu dynamiki. Do wyprowadzenia równań dynamiki układu z ograniczeniami nieholonomicznymi należy zastosować zasadę d'Alemberta.

Należy również wspomnieć o jeszcze jednym podejściu do otrzymywania równań ruchu układów z ograniczeniami, zwanym mechaniką wakonomiczną. Takie

podejście zostało zaproponowane przez Kozlova w pracy [35]. Różni się ono od klasycznej mechaniki nieholonomicznej sposobem uwzględnienia ograniczeń w ruchu. W podejściu wakonomicznym ruch układu mechanicznego z ograniczeniami jest rozważany jako standardowy problem wariacyjny, a równania ruchu otrzymuje się z rachunku wariacyjnego przy założeniu, że w funkcjonale należy uwzględnić ograniczenia nałożone na system. Porównując metodę wakonomiczną i zasadę d'Alemberta, można zauważyć, że dla układów nieholonomicznych obie metody dają różne równania ruchu. Równania te pokrywają się dla układów holonomicznych. Warto podkreślić, że weryfikacja eksperymentalna równań ruchu otrzymywanych obiema metodami wykazuje zgodność trajektorii ruchu otrzymanych z zasady d'Alemberta z wynikami praktycznie przeprowadzonych eksperymentów [41], co przesądza o zastosowaniu tej właśnie metody do celów modelowania ruchu układów nieholonomicznych.

Znajomość modelu dynamiki nieliniowego układu sterowania, jakim jest nieholonomiczny manipulator mobilny, ma decydujący wpływ na jakość realizowanych zadań. Przy nieznanym modelu opisującym zachowanie sterowanego układu nieliniowego nie jest możliwa stabilizacja systemu, a realizowane trajektorie lub ścieżki są obarczone dużym błędem w stosunku do trajektorii lub ścieżek zadanych. Jeśli więc chcemy zastosować algorytm sterowania zapewniający poprawne działanie systemu i wysoką jakość realizowanych zadań, np. poprzez osiągnięcie dużej dokładności pozycjonowania, niezbędne staje się poznanie modelu dynamiki rozważanego nieholonomicznego układu sterowania.

3.1. Zasada d'Alemberta

Rozważmy układ mechaniczny, którego zachowanie jest opisane przez uogólnione współrzędne $q \in R^n$ i prędkości $\dot{q} \in R^n$, spełniające l $(l < n)$ niezależnych ograniczeń fazowych, mających postać Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0. \tag{3.1}$$

Ograniczenia oddziałują na system poprzez siły więzów o takiej postaci, aby równania były zawsze spełnione. D'Alembert przedstawił swoją zasadę w postaci formuły:

> *Siły więzów F, wymuszające spełnienie ograniczeń nieholonomicznych, nie wykonują pracy na dopuszczalnych trajektoriach układu.*

W myśl powyższej zasady zachodzi następująca zależność

$$F^T dq = 0. \tag{3.2}$$

Z kolei równanie ograniczeń Pfaffa można przedstawić w równoważnej postaci jako

$$A(q)dq = 0. \tag{3.3}$$

Z równań (3.3) i (3.2) wynika, że F^T musi być kombinacją liniową kolumn macierzy $A(q)$, a więc zachodzi związek

$$F^T = \lambda^T A(q) \qquad \longrightarrow \qquad F = A^T(q)\lambda,$$

gdzie $\lambda \in R^l$ jest wektorem mnożników Lagrange'a.

Aby otrzymać równania dynamiki układu z ograniczeniami (3.1), należy najpierw zdefiniować lagranżian dla układu swobodnego, a więc bez ograniczeń fazowych

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q), \tag{3.4}$$

przy czym poszczególne symbole mają następujący sens fizyczny:

$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T Q(q)\dot{q}$ – energia kinetyczna układu swobodnego,

$V(q)$ – energia potencjalna układu swobodnego.

Równania ruchu dla układu z ograniczeniami nieholonomicznymi otrzymuje się z zasady d'Alemberta, czyli z uwzględnieniem sił przyczepności F, co prowadzi do równań postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A^T(q)\lambda. \tag{3.5}$$

Jeżeli natomiast na pewne współrzędne układu oddziałują uogólnione siły zewnętrzne τ, to równania ruchu (3.5) przyjmują postać zmodyfikowaną

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A^T(q)\lambda + B(q)\tau, \tag{3.6}$$

gdzie:

$\tau \in R^m$ – wektor uogólnionych sił zewnętrznych, $m = n - l$,
$B(q)$ – macierz wejściowa $n \times m$.

3.2. Model dynamiki we współrzędnych uogólnionych

Przed przystąpieniem do wyprowadzenia równań dynamiki nieholonomicznego manipulatora mobilnego przyjmijmy następujące założenia:

1. Holonomiczny manipulator ma bezpośrednie napędy dla wszystkich stopni swobody.
2. Liczba napędów dla nieholonomicznej platformy jest równa $n - l$.
3. Równania ruchu manipulatora mobilnego obejmują model dynamiki oraz równanie ograniczeń nieholonomicznych, natomiast nie wymagają równań wyjścia opisujących współrzędne chwytaka. Wynika to z faktu, że zakłada się, iż zadanie sformułowane w przestrzeni zewnętrznej może być przekształcone do przestrzeni wewnętrznej (przegubowej) ramienia manipulatora.

Przy takich założeniach, korzystając z postaci funkcji Lagrange'a (3.4) i postaci ograniczeń (3.1), można wyrazić równania dynamiki układu nieholonomicznego (3.6) we współrzędnych uogólnionych jako

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = A^T(q)\lambda + B(q)\tau, \tag{3.7}$$

gdzie poszczególne elementy modelu oznaczają:

$Q(q)$ – symetryczna, dodatnio określona macierz inercji rozmiaru $n \times n$,

$C(q,\dot{q})$ – macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych

$$C(q,\dot{q}) = \frac{d}{dt}Q(q) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(Q(q)\dot{q}),$$

$D(q)$ – wektor oddziaływań potencjalnych, najczęściej wektor sił grawitacji.

Wektor $\lambda \in R^l$, nazywany wektorem *mnożników Lagrange'a*, jest najtrudniejszą do określenia częścią modelu, przy czym model we współrzędnych uogólnionych wymaga znalezienia jawnej postaci tych wyrażeń. Mnożniki Lagrange'a λ można obliczyć rozwiązując równania (3.1), (3.7) i wiedząc, że w kierunkach zabronionych przez ograniczenia nie może pojawić się ruch, czyli że równanie (3.1) obowiązuje w każdej chwili czasu. Używając równania (3.7) i różniczkując po czasie równanie ograniczeń (3.1), otrzymujemy

$$\ddot{q} = Q(q)^{-1}\left(-C(q,\dot{q})\dot{q} - D(q) + A^T(q)\lambda + B\tau\right),$$

$$A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q)\dot{q} = 0.$$

Po wstawieniu pierwszego równania do drugiego i pogrupowaniu wyrażeń dostajemy formułę określającą postać mnożników Lagrange'a jako

$$\left(AQ^{-1}A^T\right)\lambda = AQ^{-1}\left(C\dot{q} + D - B\tau\right) + \dot{A}\dot{q},$$

przy czym macierz stojąca przed wektorem mnożników Lagrange'a jest macierzą pełnego rzędu, jeśli ograniczenia są niezależne.

Widać, że mnożniki Lagrange'a są funkcjami uogólnionych położeń q i prędkości $\dot{q}$, a także użytych sterowań τ, co dodatkowo utrudnia ich obliczenie [36]. Ponadto model dynamiki we współrzędnych uogólnionych ma znacznie mniej sterowań, niż wynosi wymiar przestrzeni stanu q.

3.2.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych uogólnionych

Niech wektor współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego będzie oznaczony jako $q = (q_m^T, q_r^T)^T$, gdzie q_m oznacza wektor współrzędnych platformy mobilnej, a q_r to wektor współrzędnych przegubowych manipulatora. Przy założeniu jednorodności kół, energia potencjalna platformy mobilnej poruszającej się po płaszczyźnie ekwipotencjalnej jest stała, nie wpływa zatem na równania ruchu układu. Przy takim założeniu funkcja Lagrange'a dla manipulatora mobilnego jest równa

$$L(q, \dot{q}) = K_m(q_m, \dot{q}_m) + K_r(q, \dot{q}) - V_r(q), \tag{3.8}$$

gdzie:

$K_m(q_m, \dot{q}_m) = \frac{1}{2}\dot{q}_m^T Q_m(q_m)\dot{q}_m$ – energia kinetyczna platformy mobilnej,

$K_r(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T Q_r(q)\dot{q}$ – energia kinetyczna manipulatora,

$V_r(q)$ – energia potencjalna manipulatora.

Energia kinetyczna manipulatora zależy zarówno od współrzędnych przegubowych q_r ramienia manipulacyjnego, jak i od współrzędnych platformy mobilnej, na której zamontowano manipulator. Wynika to z faktu, że energia kinetyczna manipulatora jest wyrażana względem nieruchomego układu globalnego, a więc manipulator może być rozważany jako układ dołączony do części mobilnej. Z kolei równania ograniczeń (3.1) w manipulatorze mobilnym (nh, h) odnoszą się jedynie do współrzędnych platformy mobilnej, jednak wpływają na zachowanie całego układu.

Wstawmy wyrażenie na funkcję Lagrange'a (3.8) do równań dynamiki (3.7) otrzymanych z zasady d'Alemberta. Równania dynamiki manipulatora mobilnego typu (nh, h) przyjmą wówczas postać

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{m11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} C_{m11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^T\lambda \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

gdzie

$Q_r = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ – macierz bezwładności manipulatora,
$Q_m = \begin{bmatrix} Q_{m11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ – macierz bezwładności platformy,
$C_r = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ – macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych manipulatora,
$C_m = \begin{bmatrix} C_{m11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ – macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych platformy,
$D = -\frac{\partial V_r}{\partial q}$ – wektor grawitacji manipulatora,
τ_m – wektor sterowań dla platformy,
τ_r – wektor sterowań dla manipulatora.

3.2.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych uogólnionych

Ograniczenia nieholonomiczne nałożone na ruch manipulatora mobilnego (nh, nh) są niecałkowalne, dlatego do wyprowadzenia równań dynamiki należy zastosować zasadę d'Alemberta. Takie postępowanie prowadzi do równań postaci

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = A_{11}(q_m)\lambda_1 + A_{21}(q_r)\lambda_2 + B(q)\tau, \tag{3.10}$$

gdzie:
$Q(q) = Q_r(q) + Q_m(q_m)$ – macierz bezwładności manipulatora mobilnego,
$C(q,\dot{q}) = C_r(q,\dot{q}) + C_m(q_m,\dot{q}_m)$ – macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych manipulatora mobilnego,
$D(q)$ – wektor grawitacji,
A_{i1} – macierz ograniczeń Pfaffa dla i-tego podsystemu,
λ_i – wektor mnożników Lagrange'a dla i-tego podsystemu,
$B(q)$ – macierz wejściowa,
τ – wektor sterowań.

Widać, że ograniczenia są nałożone na ruch każdego z podsystemów z osobna. Macierze $A_{11}(q_m)$ i $A_{21}(q_r)$ są macierzami ograniczeń Pfaffa odpowiednio dla platformy i manipulatora, natomiast $B(q)$ jest macierzą wejściową układu

$$A_{11}(q_m) = \begin{bmatrix} A_1^T(q_m) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}(q_r) = \begin{bmatrix} 0 \\ A_2^T(q_r) \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} B_{11}(q_m) & 0 \\ 0 & B_{22}(q) \end{bmatrix}.$$

Podmacierze $B_{11}(q_m)$ i $B_{22}(q)$ opisują, które współrzędne platformy i manipulatora są bezpośrednio napędzane przez silniki.

3.3. Model dynamiki we współrzędnych pomocniczych

Jak pokazano w poprzednim podrozdziale, model dynamiki wyrażony we współrzędnych uogólnionych zawsze wymaga obliczenia mnożników Lagrange'a λ. Jednak do celów sterowania nie jest to niezbędne. W rozdziale 2.1 wykazano, że nieholonomiczne równania ograniczeń Pfaffa można wyrazić w równoważnej postaci bezdryfowego układu sterowania (2.2) jako kombinację wektorów rozpinających jądro macierzy Pfaffa

$$\dot{q} = G(q)\eta. \tag{3.11}$$

Zmienne η, mające sens prędkości, będziemy nazywać za d'Andreą-Novel, Bastinem i Campionem [6], [16] *prędkościami pomocniczymi* układu nieholonomicznego, a zmienne (η, q_r) będziemy nazywali współrzędnymi pomocniczymi.

W dalszej części rozdziału pokażemy, jaką postać będą miały równania ruchu nieholonomicznych manipulatorów wyrażone we współrzędnych pomocniczych.

3.3.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych pomocniczych

Jak pokazano w podrozdziale 3.2.1, równania dynamiki manipulatora mobilnego typu (nh, h) wyrażone we współrzędnych uogólnionych przyjmują postać (3.9) z ograniczeniami równymi

$$A(q_m)\dot{q}_m = 0.$$

Ograniczenia Pfaffa można zapisać jako bezdryfowy układ sterowania w następującej postaci

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta. \tag{3.12}$$

W równaniach dynamiki można wówczas wyeliminować wyraz zawierający mnożniki Lagrange'a poprzez lewostronne przemnożenie równań platformy mobilnej

(pierwszego wiersza macierzowych równań (3.9)) przez macierz $G^T(q_m)$. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{bmatrix} G^TQ_{11}G & G^TQ_{12} \\ Q_{21}G & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} G^TQ_mG & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} G^TC_{11}G + G^TQ_{11}\dot{G} & G^TC_{12} \\ Q_{21}\dot{G} + C_{21}G & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} G^TC_mG + G^TQ_m\dot{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^TB\tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}$$

lub po pogrupowaniu wyrażeń

$$\begin{bmatrix} G^T(Q_{11} + Q_m)G & G^TQ_{12} \\ Q_{21}G & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} G^T(C_{11} + C_m)G + G^T(Q_{11} + Q_m)\dot{G} & G^TC_{12} \\ Q_{21}\dot{G} + C_{21}G & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G^TB & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Z równań (3.13) wynika, że w modelu wyrażonym za pomocą współrzędnych pomocniczych nie tylko znikają mnożniki Lagrange'a, ale także wymiar zmiennych (η, q_r) jest równy liczbie sterowań (τ_m, τ_r).

3.3.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych pomocniczych

W przypadku manipulatora mobilnego (nh, nh) ograniczenia nieholonomiczne są nałożone niezależnie na ruch każdego z podsystemów składowych. Przyjmują one wtedy postać

$$A_1(q_m)\dot{q}_m = 0, \qquad A_2(q_r)\dot{q}_r = 0,$$

przy czym A_1 jest macierzą Pfaffa dla platformy, natomiast A_2 jest macierzą Pfaffa dla manipulatora. Każdą grupę ograniczeń Pfaffa można wyrazić jako bezdryfowy układ sterowania i opisać za pomocą jednego równania kinematyki w następujący sposób

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = G\zeta, \qquad \zeta = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

gdzie ζ jest wektorem prędkości pomocniczych dla obu podsystemów. Po podstawieniu równania (3.14) do modelu dynamiki (3.10) wyrażonego we współrzędnych uogólnionych otrzymujemy

$$Q^*\dot{\zeta} + C^*\zeta + D^* = B^*\tau \tag{3.15}$$

z elementami zdefiniowanymi następująco

$$Q^* = G^T Q G, \qquad C^* = G^T(Q\dot{G} + CG), \qquad D^* = G^T D, \qquad B^* = G^T B.$$

Równanie (3.15) opisuje dynamikę podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego wyrażoną we współrzędnych pomocniczych. Podobnie jak dla manipulatora typu (nh, h), znikają w nim mnożniki Lagrange'a i dynamika staje się w pełni sterowana.

3.4. Model dynamiki we współrzędnych linearyzujących

Jak wspomniano w poprzednich podrozdziałach, zazwyczaj modele opisujące zachowanie nieholonomicznych manipulatorów mobilnych wyrażane są we współrzędnych uogólnionych bądź pomocniczych. Dla kołowych robotów mobilnych, do których należą platformy jezdne manipulatorów mobilnych, istnieje również możliwość wybrania innych współrzędnych pochodzących z teorii linearyzacji, tzw. *współrzędnych linearyzujących*. Współrzędne te zostały wprowadzone po raz pierwszy w pracy [6], w której pokazano, że spośród nieholonomicznych kołowych platform mobilnych tylko klasa $(3, 0)$ daje się w pełni zlinearyzować statycznie, natomiast dla pozostałych klas kołowych platform mobilnych jest możliwa wyłącznie częściowa statyczna linearyzacja w przestrzeni stanu (chodzi o linearyzację przez sprzężenie zwrotne). Ponadto pokazano, że liczba współrzędnych, które mogą zostać zlinearyzowane w sposób statyczny, jest równa wymiarowi dostępnych sterowań w bezdryfowym układzie sterowania.

Aby uzyskać linearyzację statyczną równań kinematyki platformy mobilnej, dla współrzędnych platformy wprowadźmy lokalny dyfeomorfizm przestrzeni stanu

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \Phi(q_m) = \begin{pmatrix} h(q_m) \in R^m \\ k(q_m) \in R^{n-m} \end{pmatrix}.$$

Pierwsza grupa współrzędnych $h(q_m) \in R^m$ nosi nazwę *wyjść linearyzujących (funkcji linearyzujących)*. Sposób wyboru tych zmiennych dla wszystkich klas kołowych robotów mobilnych można znaleźć w pracy [8]. Zmienne te zazwyczaj

opisują położenie pewnego punktu w obrębie robota, nie obejmują one natomiast orientacji platformy.

Drugą grupą współrzędnych $k(q_m) \in R^{n-m}$ są zmienne wybrane w taki sposób, aby transformacja $\Phi(q_m)$ była lokalnym dyfeomorfizmem. Te zmienne, będące w istocie niezlinearyzowanymi współrzędnymi układu, obejmują orientację platformy mobilnej.

Wyraźmy teraz równania kinematyki za pomocą nowych współrzędnych

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial h}{\partial q_m}\dot{q}_m = \frac{\partial h}{\partial q_m}G\eta. \tag{3.16}$$

Macierz wiążąca współrzędne pomocnicze η ze współrzędnymi linearyzującymi ξ_1

$$R(\xi) = \left[\frac{\partial h}{\partial q_m}G\right]^{-1}_{q=\Phi^{-1}(\xi)} \tag{3.17}$$

jest kwadratowa, jej odwrotność zaś istnieje, gdy spełniony jest warunek regularności

$$\det R(\xi) \neq 0.$$

Współrzędne punktów w obrębie platformy, dla których warunki regularności nie są spełnione, nie mogą zostać wybrane jako wyjścia linearyzujące, np. dla klasy $(2,0)$ nie można zlinearyzować współrzędnych położenia punktów leżących na osi łączącej koła.

Następnie obliczamy

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial k}{\partial q_m}\dot{q}_m = \frac{\partial k}{\partial q_m}G\eta = \frac{\partial k}{\partial q_m}GR\dot{\xi}_1 = S_2(\xi)\dot{\xi}_1. \tag{3.18}$$

Ostatecznie kinematyka platformy mobilnej przyjmuje postać

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ S_2(\xi) \end{bmatrix} v,$$

gdzie

$$\begin{aligned} v &= R^{-1}(\xi)\eta, \\ S_2(\xi) &= \left[\frac{\partial k}{\partial q_m}G\right]_{q=\Phi^{-1}(\xi)} R(\xi). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dla modelu kołowego robota mobilnego wyrażonego we współrzędnych linearyzujących równanie (3.18) jest równaniem ograniczeń (kinematyką).

3.4.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych linearyzujących

Dla manipulatorów mobilnych z ograniczeniami nieholonomicznymi częściowa linearyzacja modeli nie była dotychczas rozważana w literaturze, można natomiast uzyskać model manipulatora mobilnego (nh, h) wyrażony za pomocą współrzędnych linearyzujących w części opisującej platformę. Taki model będzie miał postać

$$\begin{bmatrix} R^T G^T (Q_{11} + Q_m) GR & R^T G^T Q_{12} \\ Q_{21} GR & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} R^T G^T [(C_{11} + C_m) GR + (Q_{11} + Q_m)(\dot{G}R + G\dot{R})] & R^T G^T C_{12} \\ C_{21} GR + Q_{21}(G\dot{R} + \dot{G}R) & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R^T G^T B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

przy czym kinematyka platformy w tych współrzędnych jest dana równaniem (3.18)

$$\dot{\xi}_2 = S_2|_{q_m = \phi^{-1}(\xi)} \, \dot{\xi}_1$$

opisującym związek pomiędzy wyjściami linearyzującymi a zmiennymi niezlinearyzowanymi w układzie.

W praktyce przydatność modelu wyrażonego we współrzędnych linearyzujących w części dotyczącej platformy jest niewielka. Jest to konsekwencją braku możliwości wybrania łącznie położenia i orientacji platformy jako wyjść linearyzujących. Wskutek tego platforma mobilna może realizować trajektorie, które będą niedopuszczalne z punktu widzenia zadań realizowanych przez manipulator mobilny, np. może wjechać na zadaną trajektorię tyłem, co uniemożliwi ramieniu manipulacyjnemu wykonanie zadania określonego dla tego podsystemu.

3.4.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych linearyzujących

Jak wspomniano w poprzednim podrozdziale, częściowa linearyzacja modeli nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, a zwłaszcza nieholonomicznych manipulatorów, nie była przedmiotem badań w literaturze. Można jednak przedstawić ogólną postać dynamiki manipulatora mobilnego (nh, nh) z równaniami ograniczeń platformy wyrażonymi we współrzędnych linearyzujących

$$\begin{bmatrix} R^T G_1^T (Q_{11} + Q_m) G_1 R & R^T G_1^T Q_{12} G_2 \\ G_2^T Q_{21} G_1 R & G_2^T Q_{22} G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \dot{u} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} R^T G_1^T [(C_{11}+C_m) G_1 R + (Q_{11}+Q_m)(\dot{G}_1 R + G_1 \dot{R})] & R^T G_1^T (Q_{12} \dot{G}_2 + C_{12} G_2) \\ G_2^T [Q_{21}(G_1 \dot{R} + \dot{G}_1 R) + C_{21} G_1 R] & G_2^T (Q_{22} \dot{G}_2 + C_{22} G_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ G_2^T D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R^T G_1^T B & 0 \\ 0 & G_2^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Warto przypomnieć, że kinematyka (równanie ograniczeń nieholonomicznych) dla platformy jest opisana równaniem (3.18).

3.5. Podsumowanie

Jak wielokrotnie wspominano w tym rozdziale, znajomość modelu dynamiki nieholonomicznych manipulatorów mobilnych pozwala na uzyskanie algorytmów sterowania o wysokiej jakości. Zastosowanie zasady d'Alemberta prowadzi do uzyskania równań opisujących zachowanie rozważanych obiektów robotycznych, jednak w zależności od wybranych zmiennych stanu uzyskiwane są różne typy modeli. Warto rozważyć przydatność poszczególnych modeli do celów sterowania manipulatorami mobilnymi.

Model dynamiki wyrażony we współrzędnych uogólnionych cechuje się bardzo dużą liczbą zmiennych stanu, z reguły dużo większą, niż wynosi liczba dostępnych sterowań. Wpływa to na dużą złożoność obliczeniową projektowanych algorytmów sterowania, nawet w przypadku algorytmów wymagających tylko częściowej znajomości modelu. Kolejną wadą tego modelu jest konieczność obliczenia sił przyczepności, a w konsekwencji jawnej postaci mnożników Lagrange'a, które zależą nie tylko od czasu i zmiennych stanu, ale również od użytego sterowania. Wspomniane cechy powodują, że model wyrażony we współrzędnych uogólnionych nie jest na ogół stosowany do celów sterowania.

Najczęściej spotykanym w literaturze modelem jest model dynamiki wyrażony we współrzędnych pomocniczych. Cechuje się on mniejszą złożonością obliczeniową ze względu na zredukowany wymiar przestrzeni stanu – liczba współrzędnych pomocniczych jest równa liczbie prędkości pomocniczych platformy i liczbie dostępnych sterowań manipulatora. Ponadto wybór współrzędnych pomocniczych powoduje, że w modelu nie występują mnożniki Lagrange'a. W tym modelu pojawia się jednak pewna trudność, mianowicie równania ograniczeń

(kinematyka) wyrażone w postaci bezdryfowego układu sterowania wymagają sygnałów sterujących, które w sensie fizycznym są prędkościami.

Kolejny model rozważany w niniejszym rozdziale to model z częściowo zlinearyzowanymi równaniami platformy. W odniesieniu do platform mobilnych traktowanych jako samodzielne urządzenia transportowe wybór współrzędnych linearyzujących, mających na ogół sens współrzędnych położenia pewnego punktu należącego do platformy, jest intuicyjny, gdyż ułatwia sterowanie systemem. W takim wypadku przynależność orientacji układu do zmiennych niezlinearyzowanych nie odgrywa istotnej roli, ponieważ podczas transportu nie jest ważne czy platforma wjedzie na przykład na zadaną trajektorię przodem, czy też tyłem. Natomiast z inną sytuacją mamy do czynienia przy sterowaniu manipulatorami mobilnymi. Ponieważ manipulator może być umieszczony w różnych miejscach na platformie mobilnej, więc możliwość sterowania orientacją platformy odgrywa kluczową rolę podczas realizacji zadań manipulatora. To decyduje o ograniczonej przydatności modelu wyrażonego we współrzędnych linearyzujących do sterowania nieholonomicznymi manipulatorami mobilnymi.

Podsumowując rozważania na temat modeli nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, należy wspomnieć, że model dynamiki takiego złożonego obiektu robotycznego, wyrażony w którychkolwiek z wymienionych współrzędnych, posiada pewne szczególne własności, które nie obowiązywały dla podsystemów składowych rozważanych oddzielnie:

- Dla manipulatora mobilnego na kołowej platformie mobilnej nie zachodzi skośna symetria [22] dla macierzy $\dot{Q}-2C$. Jeśli algorytm sterowania wymaga skośnej symetrii, to staje się niezbędne wprowadzenie pewnej niezerowej *macierzy korekcji* C_K spełniającej warunek

$$\dot{Q} = (C + C_K) + (C + C_K)^T, \qquad C_K \neq 0. \tag{3.22}$$

  Ponieważ dowolna macierz spełniająca równanie (3.22) może być macierzą korekcji, więc najczęściej wyznacza się symetryczną macierz C_K ze wzoru

$$C_K = C_K^T = \frac{1}{2}\left\{\dot{Q} - (C + C^T)\right\}. \tag{3.23}$$

- Nie można jednoznacznie zdefiniować niektórych rozwiązań, na przykład zadana trajektoria lub ścieżka może być zrealizowana poprzez ruch tylko jednego podsystemu (samej platformy lub samego ramienia manipulacyjnego) lub jako skoordynowany ruch obu podsystemów rozpatrywanych łącznie.

- Istnieją duże wzajemne interakcje dynamiczne – włączenie sterowania tylko w jednym podsystemie powoduje ruch również drugiego podsystemu manipulatora mobilnego.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że ograniczenia nieholonomiczne pojawiające się w ruchu tylko jednego podsystemu wpływają na zachowanie całego układu i muszą zostać uwzględnione w modelu dynamiki układu złożonego.

4. Sformułowanie problemu sterowania

Rozważmy zadanie, jakim jest znalezienie algorytmu sterowania dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego, gwarantującego prawidłową kooperację pomiędzy platformą mobilną a sztywnym manipulatorem zamontowanym na tej platformie. Jak wspomniano w rozdziale 1, manipulator mobilny zbudowany jest ze sztywnego ramienia manipulacyjnego, które ma realizować zadanie, oraz platformy mobilnej, której rola sprowadza się do operacji transportowych, czyli przemieszczenia manipulatora w znacznie większej przestrzeni roboczej, niż miałoby to miejsce w przypadku manipulatora o nieruchomej podstawie. Takie połączenie dwóch strukturalnie różnych systemów mechanicznych powoduje powstanie kilku problemów podczas sterowania. Jednym z nich jest wielość rozwiązań realizowanego zadania, gdyż często w praktyce zadanie może być zrealizowane np. poprzez ruch samego manipulatora, ruch samej platformy lub jednoczesne przemieszczanie obu podsystemów [85], [86]. W dalszej części pracy przyjęto założenie, że zadanie dla manipulatora mobilnego można zdekomponować na niezależne zadania dla podsystemów [91], [92]:

> Każdy podsystem ma realizować odrębne zadanie polegające na osiągnięciu zadanej konfiguracji q_d, śledzeniu pewnej ścieżki $q_d(s)$ (krzywej w przestrzeni) lub trajektorii $q_d(t)$ (krzywej sparametryzowanej czasem). Jeśli zadanie polega na śledzeniu ścieżki lub trajektorii, to zakłada się, że ścieżka lub trajektoria musi być dopuszczalna, czyli możliwa do realizacji przez układ przy nałożonych na niego ograniczeniach.

Innym problemem wynikającym z zastosowania manipulatora mobilnego zamiast manipulatora stacjonarnego jest konieczność zapewnienia prawidłowej orientacji platformy mobilnej. W operacjach transportowych, do których używa się kołowych wózków mobilnych, zazwyczaj nie jest istotna orientacja platformy, lecz jej położenie. Jeśli platforma dojedzie do zadanego punktu nieprawidłowo

zorientowana, np. tyłem, na ogół nie wpływa to na sposób realizacji jej zadania, czyli możliwość załadunku lub rozładunku. Dlatego stosowanie kołowych platform mobilnych często nie wymaga sterowania ich orientacją. Z inną sytuacją mamy jednak do czynienia w przypadku manipulatorów mobilnych, np. gdy manipulator nie może zmienić swojej orientacji względem platformy. Realizacja zadania przez podsystem manipulatora zależy wówczas wprost od możliwości sterowania orientacją platformy mobilnej. Z punktu widzenia projektowanych algorytmów sterowania oznacza to konieczność sterowania nie tylko położeniem platformy, lecz także jej orientacją. Jest to tzw. sterowanie *posturą* kołowej platformy mobilnej [8], co wymaga użycia znacznie bardziej wyszukanych algorytmów sterowania kinematyką, niż w przypadku sterowania uwzględniającego jedynie położenie platformy.

Przy projektowaniu sterowania dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego należy zwrócić uwagę na fakt, iż kompletny opis takiego układu, zawierający zarówno równania ograniczeń nieholonomicznych, jak i równania dynamiki, np. dla manipulatora typu (nh, nh)

$$\dot{q} = G(q)\zeta,$$
$$Q(q)\dot{\zeta} + C(q,\dot{q})\zeta + D(q) = B(q)\tau,$$

ma budowę kaskadową. Do poszukiwania algorytmów sterowania dla układów kaskadowych służy metoda zaproponowana w pracy [38], nazywana algorytmem całkowania wstecznego (z ang. *backstepping*). Metoda ta, której istotę przedstawiono poniżej, prowadzi do specjalnej struktury układu sterowania, a mianowicie podziału sterownika na dwie równolegle realizowane i współpracujące ze sobą części:

- sterownik kinematyczny,
- sterownik dynamiczny.

Sposób realizacji powyższych układów sterowania przedstawiono w dalszej części rozdziału.

4.1. Algorytm całkowania wstecznego

Rozważmy układ dynamiczny o strukturze kaskadowej

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1,...,x_n) + g_n(x_1,...,x_n)u. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Układ kaskadowy cechuje się tym, że poszczególne podsystemy można potraktować oddzielnie, czyli w i-tym podsystemie funkcje f_i i g_i nie mogą zależeć od zmiennych x_j dla $j \geq i+1$, natomiast zmienne o wyższych numerach, niebędące zmiennymi stanu tych podsystemów, mogą odgrywać rolę sterowań, o ile wyrażenia g_i będą odwracalne. Algorytm całkowania wstecznego polega na zaprojektowaniu sterownika dla układu (4.1) w sposób rekurencyjny, poprzez potraktowanie pewnych zmiennych jako „wirtualnych wejść", i zaproponowaniu dla nich sterowań stabilizujących zmienne x_i w zerze.

Aby pokazać sposób działania algorytmu całkowania wstecznego, rozważmy pierwszy podsystem układu (4.1) dany równaniem

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2. \tag{4.2}$$

Załóżmy, że zmienna x_2, niebędąca zmienną stanu tego układu, spełnia rolę sterowania. W celu ustabilizowania układu (4.2) wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^T x_1. \tag{4.3}$$

Niech $x_2 = \alpha_1(x_1)$ będzie funkcją stabilizującą ten podsystem, tzn. pochodna po czasie funkcji V_1 danej wzorem (4.3) liczona wzdłuż trajektorii układu (4.2) wynosi

$$\dot{V}_1 = x_1(f_1 + g_1\alpha_1). \tag{4.4}$$

Widać, że jeśli będzie spełniony warunek

$$f_1 + g_1\alpha_1 = -K_0 x_1,$$

to $\dot{V}_1$ będzie można oszacować następująco

$$\dot{V}_1 = -x_1^T K_0 x_1 = -W_1(x_1) \leq 0. \tag{4.5}$$

Ponieważ $W_1(x_1)$ jest pewną funkcją dodatnią, więc na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a (tw. 5, rozdz. 11) zmienna x_1 asymptotycznie dąży do 0.

W następnym kroku algorytmu skupimy się na większym podsystemie składającym się z dwóch równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \end{aligned} \tag{4.6}$$

gdzie rolę „wirtualnego wejścia" spełnia zmienna x_3. Aby znaleźć sterowanie dla podsystemu (4.6), rozważmy funkcję Lapunowa

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}\left(x_2 - \alpha_1\right)^T \left(x_2 - \alpha_1\right). \tag{4.7}$$

Z postaci funkcji (4.7) widać, że zapewnia ona zarówno stabilizację pierwszego podsystemu, jak i asymptotyczne spełnienie ograniczenia $x_2 = \alpha_1$ nałożonego na zmienną x_2, gdy traktowano ją jako chwilowe wejście do podsystemu (4.2). Obliczmy pochodną po czasie funkcji V_2 wzdłuż trajektorii układu (4.6). Otrzymamy wówczas

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + (x_2 - \alpha_1)^T (\dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1) = \dot{V}_1 + (x_2 - \alpha_1)^T \left(f_2 + g_2 x_3 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1 x_2) \right).$$

Widać, że jeśli x_3 będzie spełniać równanie

$$f_2 + g_2 x_3 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1 x_2) = -K_1(x_2 - \alpha_1), \qquad K_1 = K_1^T > 0,$$

lub równoważnie

$$x_3 = (g_2)^{-1} \left(-f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1 x_2) - K_1(x_2 - \alpha_1) \right) = \alpha_2(x_1, x_2),$$

to pochodna funkcji Lapunowa $\dot{V}_2$ liczona wzdłuż trajektorii układu (4.6) będzie równa

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 - (x_2 - \alpha_1)^T K_1 (x_2 - \alpha_1) \\ &\leq -W_1(x_1) - (x_2 - \alpha_1)^T K_1 (x_2 - \alpha_1) \\ &\leq -W_2(x_1, x_2) < 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Rozważając kolejne podsystemy układu kaskadowego (4.1), można znaleźć sterowanie u dla całego układu. W tym celu przyjmijmy, że funkcja Lapunowa dla pełnego systemu (4.1) ma postać

$$V_n(x_1, ..., x_n) = V_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) + \frac{1}{2} (x_n - \alpha_{n-1})^T (x_n - \alpha_{n-1}). \tag{4.9}$$

Pochodna funkcji Lapunowa V_n liczona wzdłuż trajektorii układu kaskadowego (4.1) jest równa

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + (x_n - \alpha_{n-1})^T (\dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1}) \\ &= \dot{V}_{n-1} + (x_n - \alpha_{n-1})^T (f_n + g_n u - \dot{\alpha}_{n-1}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Widać, że jeśli u będzie spełniać równanie

$$f_n + g_n u - \dot{\alpha}_{n-1} = -K_{n-1}(x_n - \alpha_{n-1}), \qquad K_{n-1} = K_{n-1}^T > 0,$$

lub równoważnie

$$u = (g_n)^{-1} (-f_n + \dot{\alpha}_{n-1} - K_{n-1}(x_n - \alpha_{n-1})) = \alpha_n(x),$$

to pochodna funkcji Lapunowa $\dot{V}_n$ wzdłuż trajektorii układu kaskadowego (4.1) będzie miała postać

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} - (x_n - \alpha_{n-1})^T K_{n-1}(x_n - \alpha_{n-1}) \\ &\leq -W_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) - (x_n - \alpha_{n-1})^T K_{n-1}(x_n - \alpha_{n-1}) \\ &\leq -W_n(x) < 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ponieważ zbiór niezmienniczy zawarty w $W_n(x) = 0$ składa się tylko z punktu 0, oznacza to, że na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a punkt $0 \in R^n$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu (4.1).

Jak wynika z procedury całkowania wstecznego, w przypadku układu kaskadowego, a taką strukturę mają równania opisujące model matematyczny nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, najpierw należy znaleźć algorytm sterowania dla mniejszego podsystemu (są to równania nieholonomicznych ograniczeń prędkościowych), a następnie uzyskane rozwiązanie wykorzystać przy projektowaniu sterowania dla całego modelu zawierającego zarówno opis ograniczeń (kinematykę), jak i dynamikę układu. Z tego względu sterownik jest podzielony na dwa równolegle realizowane i współpracujące ze sobą algorytmy sterowania:

1. Sterownik kinematyczny ζ_r – rozwiązuje zadanie dla matematycznie sformułowanych równań ograniczeń w taki sposób, jakby dynamika nie była obecna. Taki sterownik generuje pewien „profil prędkościowy" ζ_r, który zapewnia przejście od aktualnej konfiguracji podsystemu do realizowanego zadania z jednoczesnym spełnieniem ograniczeń w każdym momencie czasu.

2. Sterownik dynamiczny τ – wskutek kaskadowej struktury modelu, prędkości systemu nie są sterowane bezpośrednio, jak to było przyjęte przy planowaniu sterownika kinematycznego, ale są uzyskiwane z równań dynamiki sterowanych sygnałem τ. Oznacza to, że zadaniem sterownika dynamicznego jest wymuszenie na fizycznym obiekcie prędkości rzeczywistych ζ dążących do sygnałów pochodzących ze sterownika kinematycznego ζ_r.

Ponieważ w praktyce istnieje różnica pomiędzy rzeczywistymi prędkościami systemu nieholonomicznego ζ a prędkościami projektowanymi w sterowniku kinematycznym ζ_r, konieczne staje się sprawdzenie, jak błędy $e_\zeta = \zeta - \zeta_r$ wpływają na zachowanie całego nieholonomicznego manipulatora mobilnego. Innymi słowy, w dowodzie zbieżności algorytmu należy wykazać zbieżność błędów e_ζ do zera. Zmienne ζ mają sens prędkości pomocniczych dla każdego z podsystemów nieholonomicznych.

4.2. Sterownik kinematyczny

Zadania realizowane przez sterownik kinematyczny można sformułować następująco:

- sterowanie do punktu (asymptotyczne lub w zadanym czasie T),
- śledzenie trajektorii, czyli krzywej parametryzowanej czasem t,
- śledzenie ścieżki, czyli krzywej parametryzowanej odległością krzywoliniową s od wybranego punktu.

W dalszej części rozdziału szczegółowo zostaną omówione problemy pojawiające się podczas realizacji wspomnianych zadań sterowania.

4.2.1. Sterowanie do punktu

W ostatnich latach XX wieku rozpoczęły się bardzo intensywne poszukiwania algorytmów sterowania dla układów mechanicznych z ograniczeniami nieholonomicznymi, do których należą również nieholonomiczne manipulatory mobilne. Jednym z najtrudniejszych zadań stawianych układom nieholonomicznym okazało się sterowanie do punktu zapewniające osiągnięcie przez układ zadanej stałej konfiguracji.

Problemy pojawiające się przy próbach znalezienia takiego sterowania znalazły wytłumaczenie dzięki przełomowemu wynikowi podanemu przez Brocketta [5].

Twierdzenie 2 (Brockett). *Rozważmy układ sterowania opisany równaniem*

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad f(0, 0) = 0,$$

gdzie $x \in R^n$, zaś $u \in R^m$. Warunkiem koniecznym na to, aby istniało stabilizujące statyczne sprzężenie zwrotne $u = u(x)$ klasy C^∞ jest, żeby przekształcenie

$$(x, u) \longrightarrow f(x, u) \qquad R^n \times R^m \longrightarrow R^n$$

było typu „na” pewien otwarty podzbiór R^n zawierający 0.

Konsekwencje twierdzenia Brocketta dla sterowania układami nieholonomicznymi są daleko idące, gdyż okazało się, że kinematyka układów w pełni nieholonomicznych, mimo sterowalności, nie jest stabilizowalna przez gładkie sprzężenie zwrotne zależne od stanu. Warunek Brocketta okazał się również konieczny dla stabilizacji poprzez sprzężenie zwrotne zależne od stanu $u(x) \in C^1$, co pokazała praca Sontaga [82].

Pierwsze próby rozwiązania problemu stabilizacji w punkcie układów z ograniczeniami niecałkowalnymi polegały na poszukiwaniu gładkiego sterowania zależnego od czasu dla wybranych klas układów nieholonomicznych. I tak, dla kołowych platform mobilnych z ograniczoną mobilnością (monocykl i samochód kinematyczny) rozwiązanie podał Samson [75], [77]. Prace Samsona stały się inspiracją do poszukiwania ogólnej metody projektowania sterowania stabilizującego dla szerszej klasy układów nieholonomicznych, co zostało przedstawione w pracach Corona i Pometa [13], [14], [72]. Jednak gładkie sterowanie zależne w sposób jawny od czasu nie cechuje się szybką zbieżnością [27]. To stało się przyczyną poszukiwania alternatywnych sposobów stabilizacji układów nieholonomicznych.

Inną możliwością spełnienia warunku koniecznego podanego przez Brocketta jest zastosowanie sterowania nieciągłego [1], [9], [60], które cechuje szybka zbieżność, na ogół eksponencjalna, lub kombinacja obu prezentowanych podejść [61], [62] – niegładkie sterowanie zależne od czasu.

Sterowanie poprzez sprzężenie zwrotne jest najlepszym rozwiązaniem w praktyce, gdyż cechuje się dużą odpornością na zakłócenia, a ponadto umożliwia wykorzystanie bieżących pomiarów zmiennych stanu do celów regulacji. W literaturze pojawiło się również inne podejście, polegające na sterowaniu w pętli otwartej [56], [66], [68], [88], [89], które zapewnia dojście układu nieholonomicznego do zadanej konfiguracji w skończonym horyzoncie czasowym T. Niestety, sterowanie takie ma wady sterowania w pętli otwartej, czyli jest nieodporne na jakiekolwiek zakłócenia i nie zależy od bieżącego stanu układu nieholonomicznego. Jest ono przydatne przede wszystkim do planowania ruchu takiego układu.

4.2.2. Śledzenie trajektorii

Innym zadaniem, które może być realizowane przez podsystemy manipulatora mobilnego, jest asymptotyczna stabilizacja do zadanej trajektorii. Takie zadanie w teorii sterowania robotów jest nazywane *śledzeniem trajektorii*. W przypadku kołowych platform mobilnych klasy $(2, 0)$ rozwiązanie gwarantujące śledzenie trajektorii zostało przedstawione w pracach [34], [79]. Następne lata przyniosły próby poprawienia uzyskanych wyników poprzez osłabienie przyjętych założeń [7], [32] lub poprzez rozszerzenie klas systemów, dla których podobne rozwiązania obowiązują [90], [40]. W celu zapewnienia asymptotycznego śledzenia, wspomniane sterowniki wymagały zazwyczaj, aby zadana trajektoria cechowała się określonymi właściwościami, nazywanymi w literaturze warunkiem *trwałego wzbudzenia* [80]. Warunek taki był odmiennie definiowany w różnych pracach, jednak generalnie zawsze wykluczał śledzenie trajektorii stałej (czyli stabilizację do punktu). Wszystkie wspomniane sterowniki zależą od czasu w sposób pośredni, poprzez zależność od śledzonej trajektorii.

Istnieje kilka innych podejść próbujących potraktować w jednolity sposób zarówno stabilizację do punktu, jak i śledzenie trajektorii. Jedną z metod można znaleźć w pracach Jianga i Nijmeijera [21], [31], w których sterowanie jest funkcją zależną od czasu. Wśród technik używających sterowania zależnego od czasu do równoczesnego rozwiązywania obu zadań (stabilizacji i śledzenia) należy wymienić prace Dixona i Dawsona [20], którzy operują pojęciem *oscylatora dynamicznego*, jak i wyniki uzyskane przez Samsona i Morina [64] za pomocą tzw. *funkcji transwersalnych* będących uogólnieniem oscylatora dynamicznego, co pokazali Kozłowski i Pazderski [37]. Należy jednakże wspomnieć, że zarówno metoda funkcji transwersalnych, jak i metoda oscylatora dynamicznego dla przypadku braku założeń co do śledzonej trajektorii, zapewniają zbieżność błędu śledzenia do pewnej kuli w otoczeniu 0, której promień jest określany przed przystąpieniem do regulacji.

W dziedzinie śledzenia trajektorii dla układów nieholonomicznych istnieje twierdzenie, które spełnia podobną funkcję, jak twierdzenie Brocketta dla stabilizacji w punkcie. Twierdzenie to zostało podane przez Lizárragę [42].

Twierdzenie 3 (Lizárraga). *Rozważmy układ sterowania*

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{4.12}$$

gdzie $x \in R^n, u \in R^m, 1 < m < n$. *Niech* $\mathcal{U}$ *będzie zbiorem kawałkami ciągłych funkcji zależnych od czasu, zdefiniowanych na pewnym otwartym podzbiorze* $U \subset R^m$ *zawierającym punkt 0. Załóżmy, że* $E_1 \bigoplus E_2$ *jest dekompozycją* R^m, *która spełnia następujący warunek: w przestrzeni stanu istnieją pewne rozmaitości* $S_1, S_2 \subset R^n$, *takie że dla* $i = 1, 2$ *zachodzi*

(i) S_i *jest niezmiennicze ze względu na* $\hat{B}_i(\cdot)$,
gdzie $B_i = \{f(\cdot, u) \in \pounds : u \in U \cap E_i\}$, $\pounds$ *jest algebrą Liego gładkich pól wektorowych, zaś* $\hat{B}_i(p) = span_R\{X(p) : X \in B_i\}$,

(ii) $\dim(\hat{B}_i(\cdot))$ *jest stały na* S_i,

(iii) istnieje punkt $p \in S_1 \cap S_2$, *taki że*

$$\hat{B}_1(p) + \hat{B}_2(p) = \hat{B}_1(p) \oplus \hat{B}_2(p), \tag{4.13}$$

$$\hat{B}_1(p) + \hat{B}_2(p) \subset T_pS_1 + T_pS_2. \tag{4.14}$$

Wówczas nie istnieje ciągłe sprzężenie zwrotne zależne od czasu, które zapewni zbieżność trajektorii x *do każdej trajektorii dopuszczalnej, uzyskanej za pomocą sterowań należących do klasy* $\mathcal{U}$.

Z podanego twierdzenia można wyciągnąć praktyczne wskazówki odnośnie do możliwości znalezienia ciągłego prawa sterowania zależnego od stanu lub od czasu, które zapewniłoby śledzenie zadanej trajektorii. Zauważmy, że warunek $0 \in \mathcal{U}$ pozwala na łączne potraktowanie stabilizacji do punktu i śledzenia trajektorii. Ponadto inny wybór zbioru $\mathcal{U}$ (np. sterowań nieciągłych) spowoduje, że twierdzenie 3 nie będzie obowiązywać i uda się uzyskać odpowiednie sterowanie stabilizujące system do zadanej trajektorii. Z drugiej strony jednak twierdzenie Lizárragi pokazuje, że dla systemów nieholonomicznych, dla których zadane trajektorie dopuszczalne nie są trwale wzbudzane[1], nie można uzyskać sterowania kawałkami ciągłego, zapewniającego śledzenie trajektorii nawet wtedy, gdy sterowanie jest zależne od czasu.

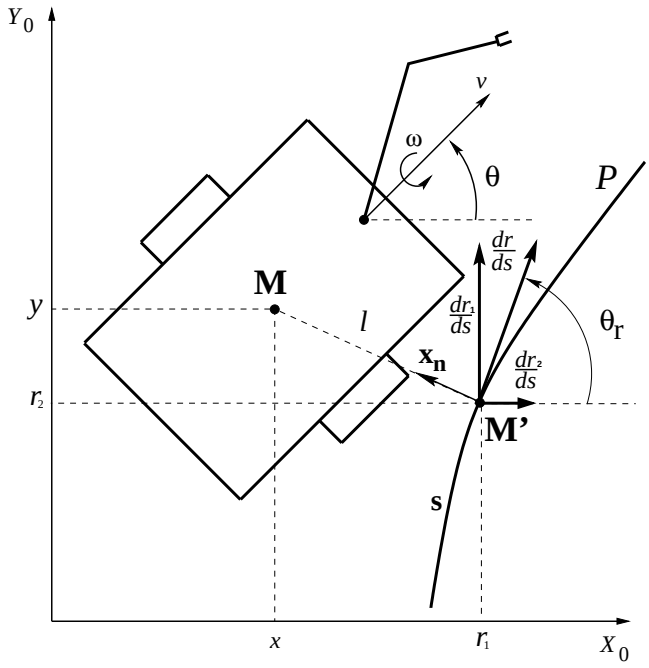
Rozważając istniejące algorytmy sterowania, zapewniające śledzenie trajektorii, nie można pominąć metod pochodzących z teorii linearyzacji. Pierwsze próby linearyzacji nieholonomicznych platform mobilnych za pomocą statycznego sprzężenia zwrotnego przyniosły tylko częściowy sukces [43]. Okazało się, że tylko klasa $(3, 0)$ kołowych platform mobilnych może być całkowicie zlinearyzowana za pomocą statycznego sprzężenia zwrotnego, natomiast pozostałe klasy wymienione w tabeli 2.1, czyli klasy nieholonomiczne, mogą być zlinearyzowane jedynie częściowo, przy czym orientacja platformy nie wchodzi do zmiennych zlinearyzowanych dla żadnej z klas (patrz rozdział 3.4). W związku z niemożnością przeprowadzenia całkowitej statycznej linearyzacji przestrzeni stanu kołowych robotów mobilnych (platform mobilnych) z ograniczoną mobilnością, podjęto próby zlinearyzowania układów nieholonomicznych za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego. Wyniki uzyskane w [10], [11], [19] pokazały, że całkowita linearyzacja przestrzeni stanu dla nieholonomicznych kołowych robotów mobilnych jest możliwa do osiągnięcia za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego. Układy w pełni linearyzowalne przez dynamiczne sprzężenie zwrotne noszą nazwę *różniczkowo płaskich*[2]. Pojęcie układu różniczkowo płaskiego zostało wprowadzone przez Fliessa i współpracowników [24] jako ważna własność strukturalna nieliniowych układów sterowania, która pozwala na przykład na rozwiązanie problemu śledzenia trajektorii, ścieżki itp.

4.2.3. Śledzenie ścieżki

Do otrzymywania równań ruchu kołowej platformy mobilnej w przestrzeni zadaniowej wyrażonych względem zadanej krzywej P (zależnej od odległości krzy-

[1] W literaturze takie trajektorie są nazywane *persistently exciting*.
[2] Układy takie w literaturze są nazywane *differentially flat systems*.

woliniowej od ustalonego punktu), którą układ ma śledzić [51], wykorzystuje się tzw. współrzędne Freneta. Przykładowa platforma mobilna, poruszająca się po płaskiej powierzchni, wraz z zadaną ścieżką została pokazana na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Ilustracja problemu śledzenia ścieżki dla platformy mobilnej
Fig. 4.1. Illustration of the path tracking problem for a mobile platform

Rozważmy poruszający się punkt M i stowarzyszony z nim układ Freneta zdefiniowany na krzywej P przez wektor jednostkowy styczny do krzywej oznaczony jako $\frac{dr}{ds}$ i wektor jednostkowy normalny do krzywej oznaczony symbolem x_n. Punkt M reprezentuje środek masy platformy mobilnej, natomiast punkt M$'$ jest rzutem prostokątnym punktu M na ścieżkę P. Współrzędne punktu M względem układu Freneta wynoszą $(0, l)$, zaś względem nieruchomego układu podstawowego są równe (x, y), przy czym l jest odległością punktu M od punktu M$'$. Układ Freneta jest obrócony względem osi Z_0 układu podstawowego o kąt $\theta_r(s)$, a jego odległość krzywoliniowa od ustalonego punktu początkowego na ścieżce jest równa s.

Przez ścieżkę będziemy rozumieli płaską krzywą opisaną parą współrzędnych

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t))^T.$$

Zdefiniujmy następnie parametr s, który jest odległością mierzoną wzdłuż ścieżki P między pewnym ustalonym punktem krzywej a bieżącym punktem M$'$

$$s = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2} d\tau = \int_0^t \parallel \dot{r}(\tau) \parallel d\tau.$$

Używając powyższej parametryzacji, można krzywą P wyrazić we współrzędnych $r(s)$ zamiast dotychczasowych współrzędnych $r(t)$. Ścieżka P opisana jest *krzywizną* $c(s)$

$$c(s) = \parallel \frac{d}{ds}\frac{dr}{ds} \parallel = \parallel \frac{d^2r}{ds^2} \parallel = \sqrt{\left(\frac{d^2r_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2r_2}{ds^2}\right)^2}, \tag{4.15}$$

która jest odwrotnością promienia okręgu stycznego do krzywej w punkcie odległym o s od początku ścieżki. Z zależności geometrycznych wiadomo, że

$$\frac{dr_1}{ds} = \parallel \frac{dr}{ds} \parallel \cos\theta_r, \qquad \frac{dr_2}{ds} = \parallel \frac{dr}{ds} \parallel \sin\theta_r. \tag{4.16}$$

Ponieważ zachodzi

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{r}}{\parallel \dot{r} \parallel} \qquad \Longrightarrow \qquad \parallel \frac{dr}{ds} \parallel = 1, \tag{4.17}$$

czyli wektor definiujący kierunek układu Freneta jest jednocześnie wektorem jednostkowym, mamy więc

$$\frac{d^2r_1}{ds^2} = -\sin\theta_r \frac{d\theta_r}{ds}, \qquad \frac{d^2r_2}{ds^2} = \cos\theta_r \frac{d\theta_r}{ds}.$$

Używając powyższych wzorów, można wyrazić krzywiznę w postaci

$$c(s) = \sqrt{\left(-\sin\theta_r \frac{d\theta_r}{ds}\right)^2 + \left(\cos\theta_r \frac{d\theta_r}{ds}\right)^2} = \mid \frac{d\theta_r}{ds} \mid .$$

W punkcie M$'$ zadana orientacja platformy θ_r spełnia więc następujące równanie

$$c(s) = \mid \frac{d\theta_r}{ds} \mid = \mid \frac{d\theta_r}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{s}} \mid \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\theta_r}{dt} = \pm c(s)\dot{s}. \tag{4.18}$$

Znak wyrażenia $c(s)$ opisującego krzywiznę ścieżki zależy od tego, jak wektor normalny do ścieżki w punkcie s jest skierowany względem krzywej P.

Następnie należy wyrazić położenie punktu M nie we współrzędnych kartezjańskich (x, y) względem układu podstawowego $X_0Y_0Z_0$, lecz względem zadanej ścieżki P. Zauważmy najpierw, że

$$r_1 - x = l \sin\theta_r, \qquad y - r_2 = l\cos\theta_r.$$

Po zróżniczkowaniu tych zależności po czasie otrzymujemy

$$\dot{r}_1 - \dot{x} = \dot{l}\sin\theta_r + l\cos\theta_r\dot{\theta}_r, \qquad \dot{y} - \dot{r}_2 = \dot{l}\cos\theta_r - l\sin\theta_r\dot{\theta}_r.$$

Następnie należy powyższe równania przemnożyć przez odpowiednie funkcje trygonometryczne, by otrzymać

$$\dot{l} = (\dot{r}_1 - \dot{x})\sin\theta_r + (\dot{y} - \dot{r}_2)\cos\theta_r,$$

$$l\dot{\theta}_r = (\dot{r}_1 - \dot{x})\cos\theta_r - (\dot{y} - \dot{r}_2)\sin\theta_r.$$

Ponieważ z równań (4.16) i (4.17) wynika, że

$$\dot{r}_1 = \frac{dr_1}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\cos\theta_r, \qquad \dot{r}_2 = \frac{dr_2}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}\sin\theta_r,$$

więc ostatecznie otrzymujemy następującą zależność pomiędzy prędkościami punktu M wyrażonymi we współrzędnych kartezjańskich i krzywoliniowych

$$\dot{l} = (-\sin\theta_r\ ,\ \cos\theta_r)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}, \qquad \dot{s} = \frac{(\cos\theta_r\ ,\ \sin\theta_r)}{1 \mp c(s)l}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}.$$

Podstawowym problemem podczas parametryzacji krzywoliniowej jest zapewnienie odpowiednich właściwości ścieżki $P(s)$. Aby punkt M$'$ istniał i był jednoznacznie zdefiniowany, muszą być spełnione następujące warunki [25], [78]:

- Promień dowolnego okręgu stycznego do krzywej $P(s)$ w dwóch lub więcej punktach musi być ograniczony od dołu pewną liczbą dodatnią $r_{\min} > 0$, natomiast wnętrze tego okręgu nie może zawierać żadnego punktu należącego do tej krzywej.

  To założenie oznacza w szczególności, że krzywizna ścieżki $c(s)$ jest nie większa niż $1/r_{\min}$.

- Przy tym założeniu, jeżeli odległość pomiędzy ścieżką P a punktem M jest mniejsza niż $r_{\min}$, to istnieje jedyny punkt na krzywej P oznaczony jako M$'$. Innymi słowy, parametryzacja względem układu Freneta jest lokalna i obowiązuje jedynie w pobliżu ścieżki.

Podsumowując, widać że położenie punktu M może być opisane względem układu podstawowego za pomocą pary współrzędnych kartezjańskich (x, y) lub równoważnie (lokalnie) względem zadanej ścieżki za pomocą pary współrzędnych (s, l) [25].

4.3. Sterownik dynamiczny

Jak wspomniano w rozdziale 4.1, kaskadowa struktura równań ruchu nieholonomicznego manipulatora mobilnego powoduje, że prędkości nie są sterowane bezpośrednio, jak przyjęto przy syntezie sterownika kinematycznego, ale są uzyskiwane z równań dynamiki sterowanych sygnałem τ. Zadanie, jakie sterownik dynamiczny ma realizować, to zbieżność rzeczywistych prędkości podsystemu nieholonomicznego do prędkości uzyskiwanych ze sterownika kinematycznego, a dla podsystemu holonomicznego zbieżność błędów położenia pojawiających się podczas wykonywania różnych zadań, np. śledzenia trajektorii lub ścieżki, do zera.

W dalszych rozważaniach przedstawimy algorytmy sterowania dynamiką, czyli sterowniki dynamiczne, projektowane dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego typu (nh, h), którego model jest wyrażony we współrzędnych pomocniczych dla platformy oraz współrzędnych uogólnionych dla manipulatora. Taki obiekt jest najtrudniejszy do sterowania ze względu na różne rodzaje współrzędnych opisujących oba podsystemy. Sterownik dynamiczny dla manipulatora mobilnego typu (nh, nh) może być potraktowany jako szczególny przypadek sterownika dla manipulatora mobilnego (nh, h) z zerowym wektorem współrzędnych uogólnionych, dlatego też sterowanie dla takiego obiektu nie będzie rozważane oddzielnie w tym rozdziale.

4.3.1. Przypadek pełnej znajomości modelu

Rozważmy dynamikę nieholonomicznego manipulatora mobilnego typu (nh, h) wyrażoną w postaci

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + D^* = B^* \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

gdzie poszczególne macierze są dane wzorem (3.13) jako

$$Q^* = \begin{bmatrix} G^T(Q_{11} + Q_m)G & G^T Q_{12} \\ Q_{21}G & Q_{22} \end{bmatrix}, \qquad B^* = \begin{bmatrix} G^T B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$C^* = \begin{bmatrix} G^T(C_{11}+C_m)G + G^T(Q_{11}+Q_m)\dot{G} & G^T C_{12} \\ Q_{21}\dot{G} + C_{21}G & C_{22} \end{bmatrix}, \qquad D^* = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}.$$

Dla modelu dynamiki (4.19) manipulatora mobilnego typu (nh, h) zaproponujemy kilka algorytmów sterowania: algorytm dokładnej linearyzacji, algorytm dysypatywny oraz algorytm uniwersalny.

Algorytm dokładnej linearyzacji

Algorytm dokładnej linearyzacji dla manipulatora mobilnego typu (nh, h) [49] projektuje się tak jak podobny algorytm dla sztywnego manipulatora [69].

Do modelu (4.19) dołączamy sterowanie postaci

$$\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} = (B^*)^{-1}(q) \left\{ Q^*(q) \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r - K_m e_\eta \\ \ddot{q}_{rd} - K_d \dot{e}_r - K_p e_r \end{pmatrix} + C^*(q,\dot{q}) \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D(q_r) \end{pmatrix} \right\}, \tag{4.20}$$

przy czym błędy są zdefiniowane następująco

$$e_\eta = \eta - \eta_r, \qquad e_r = q_r - q_{rd}, \qquad \dot{e}_r = \dot{q}_r - \dot{q}_{rd}.$$

Wartości zmiennych stanu $q^T = (q_m, q_r)$, wymagane do obliczenia macierzy modelu, uzyskiwane są zarówno z równań dynamiki, jak i z równań kinematyki. Symbolem e_η oznaczono różnicę pomiędzy rzeczywistymi prędkościami podsystemu nieholonomicznego η a prędkościami η_r projektowanymi w sterowniku kinematycznym. Z kolei błąd e_r jest to błąd pomiędzy zadaną trajektorią (zadaną konfiguracją) a rzeczywistą trajektorią (rzeczywistą konfiguracją) manipulatora. W przypadku gdy manipulator jest podsystemem holonomicznym, sterowanie do punktu jest szczególnym przypadkiem śledzenia trajektorii stałej $q_{rd}(t) = \text{const}$.

Z kolei macierze K_m, K_d i K_p

$$K_m = K_m^T > 0, \qquad K_d = K_d^T > 0, \qquad K_p = K_p^T > 0$$

to symetryczne i dodatnio określone macierze regulacji. Z tak zdefiniowanymi parametrami sterowania, wykorzystując odwracalność rzeczywistej macierzy bezwładności Q^*, otrzymujemy następujące równania błędów

$$\dot{e}_\eta + K_m e_\eta = 0,$$

$$\ddot{e}_r + K_d \dot{e}_r + K_p e_r = 0,$$

które są eksponencjalnie stabilne.

Algorytm dysypatywny

Rozważmy model manipulatora mobilnego (4.19) wyrażony we współrzędnych (η, q_r). Możemy zaproponować następujący algorytm sterowania dynamiką, zapewniający realizację zadań przez oba podsystemy

$$\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} - (K + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \right\} \tag{4.21}$$

gdzie wielkości e_η i s zdefiniowane jako

$$\begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{q}_r - \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{e}_r + \Lambda e_r \end{pmatrix}, \qquad e_r = q_r - q_{rd},$$

oznaczają odpowiednio błąd pomiędzy rzeczywistymi prędkościami podsystemu nieholonomicznego η a prędkościami projektowanymi w sterowniku kinematycznym η_r (dla platformy) oraz zmienną ślizgu s (dla manipulatora). Jak widać, zmienna s jest zdefiniowana analogicznie do zmiennej ślizgu w algorytmie Slotine'a i Li [81]. Z kolei macierze K i Λ równe

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \Lambda^T > 0$$

są symetrycznymi i dodatnio określonymi macierzami regulacji. Równanie układu (4.19) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (4.21) ma postać

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{s} \end{pmatrix} + (C^* + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} = 0.$$

Macierz C_K jest macierzą korekcji zapewniającą spełnienie warunku skośnej symetrii (3.22) pomiędzy macierzami Q^* i C^*, który dla manipulatorów umieszczonych na kołowych platformach mobilnych nie jest spełniony [22].

Algorytm uniwersalny

Uniwersalny algorytm sterowania dynamiką manipulatora mobilnego jest w rzeczywistości dynamiczną wersją algorytmu dysypatywnego [44], [50]. Sterowanie w tym algorytmie jest zdefiniowane wzorem

$$\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} - (K(t) + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \right\},$$

gdzie wszystkie zmienne i parametry są takie jak w algorytmie dysypatywnym, jedynie macierze sterowania mają wzmocnienia zależne od czasu, adaptowane jak w układzie uniwersalnym

$$\begin{aligned} K_1(t) &= K_1 \operatorname{diag}\{k_{1i}(t)\}, \quad k_{1i}(t) = \int_0^t e_{\eta i}^2(\tau)d\tau, \quad k_{1i}(0) > 0, \\ K_2(t) &= K_2 \operatorname{diag}\{k_{2j}(t)\}, \quad k_{2j}(t) = \int_0^t s_j^2(\tau)d\tau, \quad k_{2j}(0) > 0, \end{aligned}$$

gdzie K_1 i K_2 są pewnymi skalującymi współczynnikami dodatnimi. Dowód zbieżności algorytmu uniwersalnego jest analogiczny do dowodu algorytmu dysypatywnego, należy jednakże wykazać również zbieżność sygnałów $K_1(t)$ i $K_2(t)$, czyli wzmocnień w pętli sprzężenia zwrotnego, do skończonej granicy. Dowód ten można znaleźć w [48].

4.3.2. Przypadek parametrycznej nieznajomości modelu

W przypadku nieznanego modelu dynamiki nieholonomicznego manipulatora mobilnego mogą wystąpić: nieznajomość parametryczna oraz nieznajomość strukturalna. Z nieznajomością parametryczną modelu mamy do czynienia, gdy znane są siły działające na obiekt (znana jest postać funkcyjna oddziaływań), lecz nie są znane współczynniki stojące przed tymi funkcjami. W takiej sytuacji najczęściej stosuje się w praktyce algorytmy adaptacyjne wymagające bieżącej estymacji nieznanych parametrów [2], [4], [70], a także algorytmy odporne, wykorzystujące znajomość przedziałów, w których parametry te są określone [81], [87]. Dla nieznajomości strukturalnej zarezerwowane są algorytmy odporne na określony rodzaj zaburzeń [23] lub algorytmy uniwersalne [46], [50]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku nieholonomicznych manipulatorów mobilnych (nh, h) z parametryczną nieznajomością modelu dynamiki.

Z teorii sterowania adaptacyjnego dla sztywnych robotów manipulacyjnych wiadomo, że model dynamiki można sparametryzować liniowo [74], [87]. To oznacza, że przy odpowiednim wyborze nieznanych parametrów dynamikę można przedstawić jako iloczyn *macierzy regresji* Y utworzonej przez znane funkcje położenia, prędkości i przyspieszeń oraz wektora nieznanych stałych parametrów a, które zależą od parametrów mechanicznych, takich jak masy, momenty bezwładności ładunku, przegubów, platformy mobilnej, kół itp.

$$Q^*(q,a)\dot{z} + C^*(q,z,a)z + D^*(q,a) - C_K(q,z,a)e = Y(\dot{z},z,e,z,q)a, \tag{4.22}$$

gdzie dla uproszczenia notacji symbolem z oznaczono wektor prędkości

$$z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}.$$

Pierwszy argument macierzy Y jest przyspieszeniem, przez które mnożona jest macierz bezwładności Q^*, drugi argument to prędkość stojąca za macierzą Coriolisa C^*, trzeci argument to wektor, przez który mnożona jest macierz korekcji C_K. Pozostałe elementy w macierzy Y to położenia i prędkości będące argumentami wszystkich macierzy modelu. Warto zauważyć, że macierz korekcji C_K, która jest liniową kombinacją macierzy $\dot{Q}^*$ i C^*, może być wyrażona jako funkcja zależna od tych samych argumentów, co obie wspomniane macierze.

Dla przypadku parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki można zastosować adaptacyjne wersje algorytmów sterowania dynamiką podanych poprzednio dla pełnej znajomości modelu. Ponieważ jednak algorytm dokładnej linearyzacji w wersji adaptacyjnej cechuje się dużą złożonością obliczeniową i niestabilnością numeryczną, gdyż wymaga odwracania estymowanej macierzy bezwładności (patrz [4]), więc w dalszych rozważaniach zostanie on pominięty ze względu na małą przydatność praktyczną.

Adaptacyjny algorytm uniwersalny

Rozważmy następujące sterowanie dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych (nh, h), zaproponowane w pracy [51]

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} &= (B^*(q))^{-1} \left\{ Q^*(q,\hat{a}) \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + C^*(q,z,\hat{a}) \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + D^*(q,\hat{a}) \right. \\ &\qquad \left. - C_K(q,z,\hat{a}) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} - K(t) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \right\} \\ &= (B^*(q))^{-1} \left\{ Y(\dot{z}_r, z_r, e, z, q)\hat{a}(t) - K(t)e \right\}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

gdzie błędy są zdefiniowane następująco

$$e = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{q}_r - \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_\eta \\ \dot{e}_r + \Lambda e_r \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_r &= q_r - q_{rd}, \\ \Lambda &= \Lambda^T > 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Wyrażenie $\hat{a}(t)$ jest wektorem bieżących estymat nieznanych parametrów. Macierz $K(t)$ jest macierzą wzmocnień lokalnych dynamicznych sterowników uniwersalnych, obliczanych w następujący sposób

$$K(t) = \begin{bmatrix} K_1(t) & 0 \\ 0 & K_2(t) \end{bmatrix}, \qquad K_i(t) = \text{diag}\{K_{ij}(t)\}, \quad i = 1, 2, \tag{4.25}$$

przy czym $K_{ij}(0)$ muszą być większe niż 0. Każdy z lokalnych sterowników uniwersalnych ma wzmocnienie adaptowane zgodnie z regułą

$$\dot{K}_{1k}(t) = \mid e_{\eta k}(t) \mid^2, \quad k = 1, ..., m, \qquad \dot{K}_{2l}(t) = \mid s_l(t) \mid^2, \quad l = 1, ..., p. \tag{4.26}$$

Prawo adaptacji nieznanych parametrów jest dane równaniem

$$\dot{\hat{a}}(t) = \dot{\tilde{a}}(t) = -\Gamma^{-1} Y^T(\dot{z}_r, z_r, e, z, q)e, \tag{4.27}$$

gdzie symbol $\tilde{a}(t) = \hat{a}(t) - a$ oznacza błąd estymacji nieznanych parametrów, zaś macierz $\Gamma = \Gamma^T > 0$ jest nazywana macierzą wzmocnień adaptacyjnych i ma stałą wartość.

W kolejnych rozdziałach pokażemy, że proponowane algorytmy sterowania dynamiką spełniają swoją rolę, gwarantując asymptotyczną zbieżność błędów powstałych podczas regulacji do zera.

5. Wybrane algorytmy sterowania kinematyką

W rozdziale 4.1 omówiono metodę projektowania algorytmów sterowania dla układów z ograniczeniami nieholonomicznymi – całkowanie wsteczne. Wymaga ona jednoczesnego zastosowania dwóch sterowników, mianowicie sterownika kinematycznego i dynamicznego. Zaprojektowanie algorytmu sterowania na poziomie kinematycznym jest zadaniem trudnym, dlatego w wielu pracach podejmowany jest ten temat. W tym rozdziale zostaną przedstawione wybrane algorytmy sterowania kinematyką układów nieholonomicznych, będące częścią złożonych sterowników przedstawionych w kolejnych rozdziałach, realizujących różne zadania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych.

5.1. Algorytmy śledzenia trajektorii

Wśród wielu algorytmów śledzenia trajektorii dla różnych układów sterowania istnieje tylko jeden ogólny algorytm śledzenia trajektorii dla układów łańcuchowych [33], który można zastosować do sterowania manipulatorem z nieholonomicznymi sprzęgłami. Z kolei do sterowania zapewniającego śledzenie trajektorii przez kołowe platformy mobilne mogą być użyte zarówno algorytmy ogólnego przeznaczenia, takie jak algorytm linearyzacji dynamicznej [8], jak i algorytmy specjalizowane, przeznaczone dla wybranych klas nieholonomicznych platform mobilnych [39], [77].

5.1.1. Śledzenie trajektorii układów łańcuchowych

Algorytm ten został podany w 1999 roku przez Jianga i Nijmeijera w pracy [33]. Ze względu na jego obszerność w rozważaniach ograniczymy się do algorytmu dla układu 4-wymiarowego, jednak jest on rekurencyjny i może być zastosowany do układu łańcuchowego o dowolnym skończonym wymiarze.

Rozważmy system nieholonomiczny przedstawiony w postaci łańcuchowej

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= u_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1, \\ \dot{z}_4 &= z_3 u_1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

który ma śledzić zadaną trajektorię $z_d(t) = (z_{1d}(t), z_{2d}(t), z_{3d}(t), z_{4d}(t))^T$. Trajektoria zadana musi być dopuszczalna, czyli taka, aby w każdej chwili było możliwe przemieszczanie manipulatora z równoczesnym spełnieniem ograniczeń nieholonomicznych. To oznacza, że śledzona trajektoria z_d musi być generowana przez równania ograniczeń

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1d} &= u_{1d}, \\ \dot{z}_{2d} &= u_{2d}, \\ \dot{z}_{3d} &= z_{2d} u_{1d}, \\ \dot{z}_{4d} &= z_{3d} u_{1d}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

gdzie $u_d = (u_{1d}, u_{2d})$ jest pewnym zadanym sterowaniem, niezbędnym do realizacji ruchu na trajektorii z_d.

Aby do kinematyki danej równaniem (5.1) zastosować algorytm zaproponowany przez Jianga i Nijmeijera, zdefiniujmy najpierw podstawowe błędy śledzenia trajektorii jako

$$x_e = z - z_d.$$

Wprowadźmy następnie zmodyfikowane błędy śledzenia równe

$$\begin{aligned} e_1 &= x_{4e} - z_3 x_{1e}, \\ e_2 &= x_{3e} - z_2 x_{1e}, \\ e_3 &= x_{2e}, \\ e_4 &= x_{1e}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Przekształcenie pomiędzy podstawowymi błędami śledzenia x_e a zmodyfikowanymi błędami śledzenia e jest globalnym liniowym, ale zależnym od stanu, dyfeomorfizmem dla każdej trajektorii zadanej, dlatego asymptotyczna zbieżność błędów $e \to 0$ implikuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia $x_e \to 0$, co zapewnia realizację śledzenia trajektorii.

W nowych współrzędnych równania kinematyki (5.1) można wyrazić jako

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= u_{1d} e_2 - z_2 e_4 (u_1 - u_{1d}), \\ \dot{e}_2 &= u_{1d} e_3 - e_4 u_2, \\ \dot{e}_3 &= u_2 - u_{2d}, \\ \dot{e}_4 &= u_1 - u_{1d}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Procedura projektowania sterownika kinematycznego dla równań (5.4) jest oparta na algorytmie całkowania wstecznego.

Rozważmy pierwszy podsystem układu (5.4)

$$\dot{e}_1 = u_{1d}e_2 - z_2e_4(u_1 - u_{1d}),$$

dla którego e_2 spełnia rolę wirtualnego sterowania, a u_{1d} i e_4 są pewnymi funkcjami czasu. Przyjmijmy $\bar{e}_1 = e_1$. Dla tego podsystemu wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V_1(\bar{e}_1) = \frac{1}{2}\bar{e}_1^2. \tag{5.5}$$

Wzdłuż trajektorii pierwszego podsystemu (5.4) otrzymujemy wówczas

$$\dot{V}_1 = u_{1d}\bar{e}_1e_2 - z_2(u_1 - u_{1d})e_4\bar{e}_1. \tag{5.6}$$

Widać, że $e_2 = \alpha_1(e_1) = 0$ stabilizuje układ, jeśli $e_4 = 0$. Wprowadźmy więc nową zmienną

$$\bar{e}_2 = e_2 - \alpha_1(e_1).$$

Używając wprowadzonej definicji, można pochodną funkcji Lapunowa wyrazić w postaci

$$\dot{V}_1 = u_{1d}\bar{e}_1\bar{e}_2 - z_2(u_1 - u_{1d})e_4\bar{e}_1. \tag{5.7}$$

Postępując analogicznie dla kolejnych podsystemów układu (5.4) i definiując rekurencyjnie funkcje Lapunowa jako

$$V_i = \frac{1}{2}\bar{e}_1^2 + ... + \frac{1}{2}\bar{e}_i^2,$$

można pochodne kolejnych funkcji Lapunowa przedstawić w ogólnej postaci

$$\dot{V}_i = u_{1d}\bar{e}_i(e_{i+1} - \alpha_i) - h_i(e, z)(u_1 - u_{1d})e_n,$$

gdzie $h_i(e, z)$ są funkcjami zależnymi od stanu, równymi

$$h_i(z, e) = \sum_{j=1}^{i} \bar{e}_j z_{n-j-1} - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{j} \bar{e}_{j+1}\frac{\partial \alpha_j}{\partial e_k} z_{n-k-1}, \qquad 2 \le i \le n-3.$$

Ostatecznie, jako sterowanie kinematyczne dla układu (5.4) należy wybrać następujące sygnały wejściowe

$$\begin{aligned} u_{1r} &= u_{1d} + \tfrac{f}{\gamma - z_2(2e_1 + e_3)} = \alpha_4, \\ u_{2r} &= u_{2d} - c_3(e_1 + e_3) - 2u_{1d}e_2 = \alpha_3, \end{aligned} \tag{5.8}$$

gdzie

$$f = -c_4 e_4 + e_2 u_{2d} - c_3 e_2 (e_1 + e_3) - 2u_{1d} e_2^2,$$

stałe $c_3, c_4 > 0$ są parametrami regulacji, natomiast $\gamma > 0$ definiuje lokalnie obszar zbieżności (zależy od wartości początkowych błędów).

Wzdłuż trajektorii układu (5.4) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.8) pochodna po czasie funkcji Lapunowa równej

$$V_4 = \frac{1}{2}\bar{e}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{e}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{e}_3^2 + \frac{\gamma}{2}e_4^2 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}(e_1 + e_3)^2 + \frac{\gamma}{2}e_4^2 \tag{5.9}$$

spełnia nierówność

$$\dot{V}_4 = -c_3(e_1 + e_3)^2 - c_4 e_4^2 \leq 0. \tag{5.10}$$

Ponieważ funkcja V_4 jest nierosnąca, więc e_i są ograniczone. Na mocy lematu Barbalata (patrz lemat 1, rozdz. 11) można pokazać, że $\bar{e}_3 \to 0$ i $e_4 \to 0$. Z analizy równań na $\dot{\bar{e}}_i$ wynika, że

$$\lim_{t\to\infty} u_{1d}\bar{e}_i = 0, \qquad 1 \leq i \leq 3,$$

a więc wyrażenie $u_{1d}^2 V_4$ dąży do zera. Ponieważ V_4 jest malejąca wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą, oznacza to, że V_4 zbiega do pewnej nieujemnej stałej V_4^*. Skoro u_{1d} z definicji nie dąży do zera, oznacza to, że V_4^* musi być równe 0, czyli zachodzi $\bar{e}_i \to 0$, $i = 1, 2, 3$ oraz $e_4 \to 0$, a więc także $e_i \to 0$, $i = 1, ..., 4$. To kończy dowód półglobalnej zbieżności algorytmu.

5.1.2. Śledzenie trajektorii kołowych platform mobilnych

Jak wspomniano we wstępie, spośród algorytmów śledzenia trajektorii dla platform mobilnych można wyróżnić algorytmy ogólnego przeznaczenia, np. linearyzację dynamiczną, oraz algorytmy dedykowane konkretnym klasom kołowych platform mobilnych z ograniczoną mobilnością. Pierwszy z prezentowanych algorytmów to algorytm o najszerszym zakresie zastosowań – linearyzacja za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego.

Linearyzacja dynamiczna

Rozważmy kinematykę kołowej platformy mobilnej wyrażoną w postaci bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta = \sum_{i=1}^{m} g_i(q_m)\eta_i, \tag{5.11}$$

gdzie zmienne $q_m \in R^n$ to współrzędne uogólnione platformy, prędkości pomocnicze $\eta \in R^m$ spełniają rolę sterowań, zaś pola wektorowe g_i są gładkie.

Jeśli układ nie jest całkowicie linearyzowalny przez zmianę bazy (dyfeomorfizm) i statyczne sprzężenie zwrotne, to można osiągnąć pełną linearyzację poprzez użycie bardziej ogólnego prawa sterowania o postaci

$$\eta = a(q_m, \chi, \eta_{\text{ref}}),$$

$$\dot{\chi} = b(q_m, \chi, \eta_{\text{ref}}),$$

gdzie η_{ref} jest pomocniczym wejściem do systemu. Aby otrzymać dynamiczne sprzężenie zwrotne, należy najpierw wybrać m odpowiednich wyjść linearyzujących

$$y_i = h_i(q_m), \qquad i = 1, ..., m. \tag{5.12}$$

Następnie do układu (5.11) z wyjściami (5.12) należy zastosować tzw. algorytm rozszerzenia dynamicznego[1], wykorzystujący tzw. kompensator Brunovsky'ego [11]. Idea tego algorytmu polega na „opóźnianiu" sygnałów wejściowych poprzez podłączenie integratorów do pewnej kombinacji wejść oraz rozszerzeniu przestrzeni stanu, aby uzyskać rozszerzony i odsprzężony system

$$y_k^{(r_k)} = \eta_{\text{ref,k}} \qquad k = 1, ..., m, \tag{5.13}$$

gdzie $y_k^{(i)}$ oznacza i-tą pochodną wyjścia y_k po czasie, zaś r_k jest stopniem względnym wyjścia y_k. Ponadto, aby uzyskać pełną linearyzację, należy rozszerzyć przestrzeń stanu o tyle zmiennych, aby spełniony był warunek

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n_e, \tag{5.14}$$

gdzie n_e jest wymiarem przestrzeni stanu q_e po rozszerzeniu go o zmienne χ

$$q_e = \begin{pmatrix} q_m \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Jeśli warunek (5.14) jest spełniony, to możliwe jest przekształcenie transformujące

[1] Algorytm ten w literaturze jest nazywany *dynamic extension algorithm.*

rozszerzony wektor stanu q_e do postaci

$$\zeta = \Psi(q_e) = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_1^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ h_m \\ \vdots \\ h_m^{(r_m-1)} \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

przy czym Ψ jest lokalnym dyfeomorfizmem. W pracy [8] pokazano, że dla każdej klasy kołowych platform mobilnych jest spełniona następująca zależność

$$y^{(r)} = P(q_e) + K_d(q_e)\eta_{\text{ref}}, \tag{5.16}$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają

$$y^{(r)} = \begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix}, \qquad \eta_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} \eta_{\text{ref,1}} \\ \vdots \\ \eta_{\text{ref,m}} \end{pmatrix},$$

$K_d(q_e)$ jest kwadratową macierzą odsprzęgania, a wektor $P(q_r)$ jest dryfem. Jeśli $K_d(q_e)$ spełnia warunek regularności (K_d jest odwracalna), to można zagwarantować eksponencjalnie szybkie śledzenie trajektorii wyjść linearyzujących dla każdej klasy nieholonomicznych platform mobilnych poprzez zastosowanie następującego sterowania

$$\eta_{\text{ref}} = K_d^{-1}(q_e)(-P(q_e) + w) \tag{5.17}$$

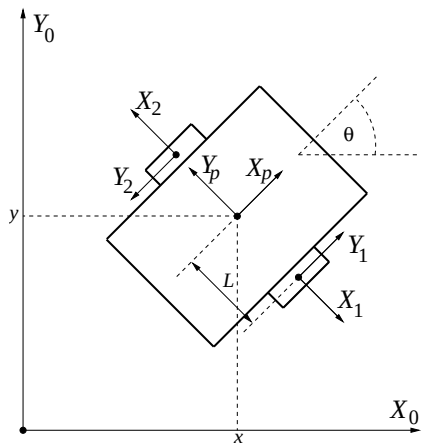
z nowym wejściem do odsprzężonego układu liniowego w, równym

$$w_i = y_{id}^{(r_i)} - \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_i^j (y_i^{(j)} - y_{id}^{(j)}), \qquad i = 1, ..., m.$$

Sterowanie (5.17) gwarantuje, że błąd śledzenia trajektorii $e_y = y - y_d$ dąży do zera eksponencjalnie, o ile parametry regulacji α_i^j są wybrane w taki sposób, aby bieguny układu liniowego, powstałego z systemu (5.16) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.17), leżały w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennych zespolonych.

Najważniejszą zaletą algorytmu linearyzacji dynamicznej jest możliwość wybrania orientacji platformy jako jednego z wyjść y_i, co oznacza, że jest ona sterowalna. Dla klas, dla których orientacja nie jest zmienną wyjściową, możliwość śledzenia orientacji platformy wynika z istnienia dyfeomorfizmu [8] pomiędzy rozszerzoną przestrzenią stanu q_e a zmiennymi ζ.

Kolejne algorytmy dotyczą nieholonomicznych platform mobilnych klasy $(2,0)$. Platforma jezdna klasy $(2,0)$ jest przedstawiona na rysunku 5.1.



Rys. 5.1. Schemat kołowej platformy mobilnej klasy $(2,0)$ (monocykla)
Fig. 5.1. Schematic of a wheeled mobile platform of $(2,0)$ class (unicycle)

Stan platformy opisują współrzędne $(x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)$, gdzie ϕ_i jest kątem obrotu i-tego koła. Zgodnie ze wzorami (2.8) i (2.9) na brak poślizgu wzdłużnego i bocznego kół konwencjonalnych otrzymujemy ograniczenia

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - R\dot{\phi}_1 = 0,$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - R\dot{\phi}_2 = 0,$$

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0.$$

Prowadzą one do następujących równań kinematyki dla platformy $(2,0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{R} & 0 \\ 0 & \frac{2}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Jak widać, równanie (5.18) ma pięć zmiennych stanu, przy czym dwa ostatnie równania

$$\dot{\phi}_1 = \frac{2}{R}\eta_1, \qquad \dot{\phi}_2 = \frac{2}{R}\eta_2$$

pokazują, że prędkości pomocnicze η_i są tylko przeskalowanymi prędkościami obrotu poszczególnych kół. Wynika stąd, że równania kinematyki można zapisać w równoważnej postaci jako

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

gdzie $v = \eta_1 + \eta_2 = \frac{R}{2}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)$ jest prędkością ruchu postępowego monocykla, a $\omega = \frac{1}{L}(\eta_1 - \eta_2) = \frac{R}{2L}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$ jest jego prędkością kątową.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, aby zapewnić śledzenie trajektorii dla całego manipulatora mobilnego, niezbędne jest znalezienie algorytmu sterowania zapewniającego zbieżność wszystkich współrzędnych do odpowiadających im trajektorii zadanych. Niestety, większość znanych algorytmów sterowania gwarantuje śledzenie jedynie dla współrzędnych położenia (x, y). Sterowanie orientacją dla platformy $(2, 0)$ wymaga użycia bardziej wyszukanych algorytmów sterowania. Przedstawimy trzy algorytmy sterowania kinematyką dla platformy klasy $(2, 0)$: algorytm Lee, Lee i Tenga [39] oraz dwie wersje algorytmu Samsona.

Algorytm Lee, Lee i Tenga

Rozważmy równanie kinematyki dla platformy klasy $(2, 0)$ dane wzorem (5.18). Zadaniem platformy jest śledzenie pewnej trajektorii dopuszczalnej, tj. spełniającej równania kinematyki wynikające z istnienia ograniczeń nieholonomicznych nałożonych na układ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{\theta}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_d \cos\theta_d \\ v_d \sin\theta_d \\ \omega_d \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Prędkość v_d i ω_d jest to prędkość liniowa i kątowa, jaką musi mieć układ, aby realizować ruch dokładnie po trajektorii zadanej (x_d, y_d, θ_d).

Aby przedstawić algorytm sterowania, zdefiniujmy najpierw referencyjne błędy śledzenia wyrażone względem układu ciała

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}(Z, -\theta) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Algorytm Lee, Lee i Tenga zapewnia asymptotyczną zbieżność błędów (x_e, y_e, θ_e) do zera. Ze względu na nieosobliwość macierzy rotacji w powyższym równaniu widać, że z asymptotycznej zbieżności błędów odniesienia do zera wynika asymptotyczna zbieżność błędów śledzenia trajektorii (e_x, e_y, e_t) do zera. Sterowania kinematyczne v_r, ω_r zapewniające zbieżność błędów odniesienia do zera, przedstawione w [39], są następujące

$$\begin{aligned}
v_r &= k_0 x_e + v_d \cos\theta_e, \\
\omega_r &= \omega_d + \frac{\beta}{\alpha} + k_1(\theta_e + \frac{\varepsilon y_e h}{1+\Lambda}), \\
\beta &= \varepsilon \left\{ \frac{\dot{h} y_e - h\omega_d x_e + h v_d \sin\theta_e}{1+\Lambda} - \frac{h y_e}{(1+\Lambda)^2 \Lambda}(y_e v_d \sin\theta_e - k_0 x_e^2) \right\}, \\
\alpha &= 1 - \frac{\varepsilon h x_e}{1+\Lambda} + \frac{\varepsilon h \theta_e y_e}{(1+\Lambda)^2 \Lambda}, \\
\Lambda &= \sqrt{\theta_e^2 + x_e^2 + y_e^2},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

gdzie $k_0, k_1 > 0$ są parametrami regulacji, $h(t) = 1 + \gamma\cos(t - t_0)$, $0 < \gamma < 1$, a $0 < \varepsilon < \frac{1}{2(1+\gamma)}$. Jak widać, do celów sterowania należy odpowiednio wybrać parametry γ i ε.

Zlinearyzowany algorytm Samsona

Rozważmy model kinematyki robota mobilnego klasy $(2, 0)$ dany równaniem (5.18). Niech trajektoria zadana spełnia ograniczenia nieholonomiczne (5.20) i niech będzie spełnione następujące założenie

Założenie 1. *Prędkości zadane monocykla v_d i ω_d spełniają warunki*

$$\lim_{t\to\infty} v_d(t) \neq 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \omega_d(t) \neq 0.$$

Gdy zróżniczkujemy (5.21), wówczas równania błędów można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_d \cos\theta_e - v \\ v_d \sin\theta_e \\ \omega_d - \omega \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Zdefiniujmy nowe wejścia do układu (5.23) jak następuje

$$u_1 = v_d \cos\theta_e - v, \qquad u_2 = \omega_d - \omega.$$

Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego równania przyjmują postać

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta_e \\ 0 \end{pmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Zlinearyzujmy teraz równania (5.24) wokół punktu $(x_e = 0, y_e = 0, \theta_e = 0, u = 0)$. Otrzymamy wówczas następujący układ zależny od czasu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & v_d(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Jeśli v_d i ω_d są stałe, to otrzymamy stacjonarny układ liniowy, którego macierz sterowalności Kalmana jest równa

$$C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_d & v_d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Widać, że układ liniowy jest sterowalny (macierz sterowalności jest pełnego rzędu), jeśli v_d i ω_d są niezależne od czasu i nie są jednocześnie równe 0.

Zaproponujmy sterowanie w następującej postaci

$$u_1 = -k_1 x_e, \qquad u_2 = -k_2 \mathrm{sgn}(v_d) y_e - k_1 \theta_e, \qquad k_1, k_2 > 0.$$

Dla tak wybranego sterowania równanie zamkniętej pętli układu jest lokalnie asymptotycznie stabilne.

Algorytm ten został przedstawiony przez Samsona w pracy [76]. Może być on stosowany tylko do śledzenia trajektorii, dla których v_d i ω_d są stałe, a zwłaszcza do śledzenia okręgów i linii prostych, którymi często aproksymuje się planowaną drogę platform mobilnych.

Algorytm Samsona i Ait-Abderrahima

Istnieje możliwość zaprojektowania sterowania dla układu (5.25), które rozszerza obszar przestrzeni stanu cechujący się lokalną asymptotyczną zbieżnością, a ponadto obejmuje przypadek, gdy zadane prędkości zależą od czasu. Jest to tzw. algorytm Samsona i Ait-Abderrahima [79]. Równania kinematyki wyrażone za pomocą referencyjnych błędów śledzenia mają postać

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega y_e + v_d \cos\theta_e - v \\ -\omega x_e + v_d \sin\theta_e \\ \omega_d - \omega \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Sterowanie kinematyczne gwarantujące śledzenie zadanej trajektorii dopuszczalnej jest dane wzorem

$$\begin{aligned} v_r &= k_1 x_e + v_d \cos\theta_e, \\ \omega_r &= \omega_d + k_2\theta_e + v_d y_e \frac{\sin\theta_e}{\theta_e}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

gdzie $k_1, k_2 > 0$ są parametrami regulacji. Widać, że sterowanie to jest dobrze zdefiniowane, gdyż dla $\theta_e \to 0$ wyrażenie $\frac{\sin\theta_e}{\theta_e} \to 1$.

Wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V(x_e, y_e, \theta_e) = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \frac{1}{2}\theta_e^2.$$

Pochodna funkcji V liczona wzdłuż trajektorii układu (5.27) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.28) wynosi

$$\dot{V}(x_e, y_e, \theta_e) = -k_1 x_e^2 - k_2\theta_e^2 \leq 0.$$

Na mocy lematu Barbalata (patrz lemat 1, rozdz. 11) można pokazać, że wszystkie błędy referencyjne dążą do zera, czyli algorytm jest globalnie asymptotycznie stabilny.

5.2. Algorytmy sterowania do punktu

Spośród algorytmów zapewniających stabilizację wokół zadanej konfiguracji można wyróżnić algorytmy sterowania w pętli zamkniętej (ze sprzężeniem zwrotnym) oraz w pętli otwartej (bez sprzężenia). Sterowanie przez sprzężenie zwrotne jest najlepszym rozwiązaniem ze względów praktycznych, gdyż cechuje się dużą odpornością na zakłócenia. Wynika to z wykonywania bieżących pomiarów zmiennych stanu i użycia zmierzonych wartości do celów regulacji. W literaturze pojawiło się również inne podejście, w którym wykorzystano tzw. sterowanie w pętli otwartej [56], [66], [68], [88], [89], zapewniające dojście układu nieholonomicznego do zadanej konfiguracji w skończonym czasie T. Niestety, sterowanie takie ma wady sterowania w pętli otwartej – jest nieodporne na jakiekolwiek zakłócenia, gdyż nie jest zależne od bieżącego stanu układu nieholonomicznego. Jedną z metod sterowania w pętli otwartej jest metoda endogenicznej przestrzeni

konfiguracyjnej [85], którą stosuje się do planowania ruchu. W metodzie tej pewne uzależnienie obliczeń od stanu układu uzyskuje się poprzez połączenie metody z ideą sterowania predykcyjnego [67].

Algorytmy stabilizacji w punkcie projektowane dla manipulatorów nieholonomicznych są algorytmami sterowania w pętli otwartej, natomiast algorytmy sterowania do punktu dla kołowych platform mobilnych są najczęściej wybierane spośród algorytmów ze sprzężeniem zwrotnym.

5.2.1. Sterowanie do punktu dla układów łańcuchowych

Przedstawione zostaną trzy algorytmy stabilizacji w punkcie dla układów łańcuchowych, które mogą być wykorzystane dla nieholonomicznych manipulatorów: algorytm wielomianowy Nakamury, Chunga i Sørdalena [68], algorytm wielomianowy z zatrzymaniem w zadanej konfiguracji, wprowadzony przez autorkę w pracy [56], oraz algorytm sterowania sinusoidalnego sformułowany przez Murraya i Sastry'ego [66]. Wszystkie wspomniane algorytmy są algorytmami sterowania w układzie otwartym.

Algorytm Nakamury, Chunga i Sørdalena

Rozważmy kinematykę układu łańcuchowego

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \nu_1, \\ \dot{z}_2 &= \nu_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2\nu_1, \\ \dot{z}_4 &= z_3\nu_1. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Niech sygnały sterujące mają postać wielomianu

$$\begin{aligned} \nu_1 &= b_0, \\ \nu_2 &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2, \end{aligned} \qquad b_0 = \frac{z_1(T) - z_1(0)}{T}. \tag{5.30}$$

Wejścia wielomianowe są stosowane ze względu na gładkość uzyskiwanych trajektorii i łatwość praktycznej realizacji. Sterowanie przeprowadzające układ (5.29) ze stanu początkowego $z(0)$ do stanu końcowego $z(T)$ w skończonym czasie T jest dane równaniem (5.30), natomiast współczynniki c_i drugiego wielomianu sterującego można obliczyć bezpośrednio poprzez scałkowanie równań stanu układu łańcuchowego. Otrzymuje się wówczas zależność

$$Mc + Nz(0) = z(T)$$

lub bardziej szczegółowo

$$\begin{bmatrix} T & \frac{1}{2}T^2 & \frac{1}{3}T^3 \\ b_0\frac{T^2}{2} & b_0\frac{T^3}{6} & b_0\frac{T^4}{12} \\ b_0^2\frac{T^3}{6} & b_0^2\frac{T^4}{24} & b_0^2\frac{T^5}{60} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_0T & 1 & 0 \\ b_0^2\frac{T^2}{2} & b_0^2T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_2(0) \\ z_3(0) \\ z_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(T) \\ z_3(T) \\ z_4(T) \end{pmatrix}.$$

Jeśli $z_1(0) \neq z_1(T)$ (czyli $b_0 \neq 0$), to macierz M jest nieosobliwa i współczynniki c_i można obliczyć jako

$$c = M^{-1}(z(T) - Nz(0)). \tag{5.31}$$

Sterowanie wielomianowe (5.30) ma postać rekurencyjną i poprzez podnoszenie stopnia drugiego wielomianu ν_2 pozwala na wysterowanie układu łańcuchowego o dowolnym skończonym wymiarze.

Algorytm osiągania zadanej konfiguracji z zatrzymaniem

Algorytm przedstawiony poprzednio pozwala na osiągnięcie w chwili T zadanej konfiguracji przez układ łańcuchowy, jednak ze względu na niezerową prędkość w chwili końcowej po wyłączeniu sterowania następuje dalsze przemieszczanie systemu. W wielu praktycznych zastosowaniach niezbędne jest jednak uzyskanie algorytmu pozwalającego na osiągnięcie zadanej konfiguracji z jednoczesnym zatrzymaniem ruchu, np. przy ustawianiu palców nieholonomicznych w konfiguracji umożliwiającej pobranie przedmiotu, podejściu do przeszkody itp. Z tego powodu sygnały sterujące należy zmodyfikować w taki sposób, aby w chwili T nastąpiło zatrzymanie. Podobnie jak w algorytmie Nakamury, Chunga i Sørdalena, sterowania mają postać wielomianową

$$\begin{aligned} \nu_1(t) &= b_0 + b_1 t, \\ \nu_2(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Aby układ łańcuchowy (5.29) zatrzymał się w chwili T, prędkości poszczególnych zmiennych stanu w chwili końcowej $\dot{z}_i(T)$ muszą być równe 0. Ze wzoru (5.29) wynika, że układ zatrzyma się w chwili T, gdy $\nu_1(T) = \nu_2(T) = 0$.

Współczynniki pierwszego wielomianu sterującego muszą być równe

$$b_0 = \frac{2(z_1(T) - z_1(0))}{T}, \qquad b_1 = \frac{2(z_1(0) - z_1(T))}{T^2},$$

natomiast współczynniki c_i drugiego wielomianu sterującego można obliczyć po scałkowaniu równań stanu układu łańcuchowego jako

$$Mc + N = z(T)$$

lub bardziej szczegółowo

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(T) \\ z_3(T) \\ z_4(T) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

gdzie poszczególne elementy równania (5.33) są równe

$$\begin{aligned}
M_{11} &= T, \\
M_{12} &= \frac{T^2}{2}, \\
M_{13} &= \frac{T^3}{3}, \\
M_{14} &= \frac{T^4}{4}, \\
M_{21} &= \frac{T^2}{2}b_0 + \frac{T^3}{3}b_1, \\
M_{22} &= \frac{T^3}{6}b_0 + \frac{T^4}{8}b_1, \\
M_{23} &= \frac{T^4}{12}b_0 + \frac{T^5}{15}b_1, \\
M_{24} &= \frac{T^5}{20}b_0 + \frac{T^6}{24}b_1, \\
M_{31} &= \frac{T^3}{6}b_0^2 + \frac{5T^4}{24}b_0b_1 + \frac{T^5}{15}b_1^2, \\
M_{32} &= \frac{T^4}{24}b_0^2 + \frac{7T^5}{120}b_0b_1 + \frac{T^6}{48}b_1^2, \\
M_{33} &= \frac{T^5}{60}b_0^2 + \frac{18T^6}{720}b_0b_1 + \frac{T^7}{105}b_1^2, \\
M_{34} &= \frac{T^6}{120}b_0^2 + \frac{77T^7}{5880}b_0b_1 + \frac{T^8}{192}b_1^2, \\
M_{41} &= 1, \\
M_{42} &= T,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{43} &= T^2, \\
M_{44} &= T^3, \\
N_1 &= z_2(0), \\
N_2 &= z_3(0) + z_2(0)b_0T + \frac{T^2}{2}z_2(0)b_1, \\
N_3 &= z_4(0) + z_3(0)(b_0T + \frac{T^2}{2}b_1) + z_2(0)\left(\frac{T^2}{2}b_0^2 + \frac{T^3}{2}b_0b_1 + \frac{T^4}{8}b_1^2\right).
\end{aligned}
$$

Macierz M jest nieosobliwa, jeśli $z_1(0) \neq z_1(T)$, czyli $b_0 \neq 0$. Współczynniki c_i sterowania wielomianowego ν_2 można wówczas obliczyć ze wzoru

$$c = M^{-1}\left(z(T) - N\right).$$

Podobnie jak w przypadku algorytmu Nakamury, Chunga i Sørdalena, sterowanie ma postać rekurencyjną – podnosząc stopień drugiego wielomianu można wysterować układ łańcuchowy o dowolnym wymiarze.

Sterowanie sinusoidalne

Idea sterowania sinusoidalnego pochodzi od Murraya i Sastry'ego [66]. Prezentowany algorytm należy, podobnie jak algorytm Nakamury, Chunga i Sørdalena oraz algorytm z zatrzymaniem, do algorytmów sterowania w układzie otwartym.

Aby pokazać przydatność sterowania okresowego, ograniczymy się do najprostszego układu łańcuchowego, a mianowicie

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= u_1, \\
\dot{z}_2 &= u_2, \\
\dot{z}_3 &= z_2u_1.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

Zadanie polega na znalezieniu w przedziale czasu $[0, T]$ takiego sterowania $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$, które przeprowadzi układ ze stanu początkowego $z(0)$ do zadanego stanu końcowego $z(T)$ oraz będzie zużywało minimum energii, tzn. będzie minimalizować całkę

$$\int_0^T u^T u \; dt = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) \; dt. \tag{5.35}$$

Równania układu (5.34) można potraktować jako równania zmiennych stanu z spełniających dodatkowe ograniczenie

$$\dot{z}_3 - z_2u_1 = \dot{z}_3 - z_2\dot{z}_1 = 0. \tag{5.36}$$

W celu znalezienia optymalnego sterowania dla układu (5.34) tworzymy lagranżian postaci

$$L(z,\dot{z}) = \sum_{i=1}^{2} \dot{z}_i^2 + \Lambda(t)(\dot{z}_3 - z_2\dot{z}_1), \tag{5.37}$$

gdzie $\Lambda(t)$ jest niezdeterminowanym mnożnikiem Lagrange'a. Po podstawieniu podanego funkcjonału $L(z,\dot{z})$ do równań Eulera–Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1(0)\cos\frac{\Lambda}{2}t + u_2(0)\sin\frac{\Lambda}{2}t, \\ u_2(t) &= -u_1(0)\sin\frac{\Lambda}{2}t + u_2(0)\cos\frac{\Lambda}{2}t, \end{aligned} \tag{5.38}$$

gdzie $\Lambda = \text{const}$.

Po wstawieniu sterowań (5.38) do równań układu (5.34) można obliczyć trajektorie układu łańcuchowego jako

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1 + \frac{2u_1(0)}{\Lambda}\sin\frac{\Lambda}{2}t - \frac{2u_2(0)}{\Lambda}\cos\frac{\Lambda}{2}t, \\ z_2(t) &= C_2 + \frac{2u_1(0)}{\Lambda}\cos\frac{\Lambda}{2}t + \frac{2u_2(0)}{\Lambda}\sin\frac{\Lambda}{2}t, \\ z_3(t) &= C_3 + \int_0^t z_2(\tau)u_2(\tau)\ d\tau, \end{aligned} \tag{5.39}$$

gdzie C_1, C_2 i C_3 są stałymi całkowania. Jeśli rozważymy przypadek szczególny

$$\begin{aligned} z_1(0) &= z_1(T), \\ z_2(0) &= z_2(T), \\ z_3(0) &\neq z_3(T), \end{aligned} \tag{5.40}$$

to możemy pokazać, że

$$\Lambda = \frac{4k\pi}{T}, \qquad k \neq 0,$$

przy czym k jest liczbą całkowitą. Widać więc, że sterowanie minimalnoenergetyczne jest okresowe. Wykorzystując powyższą własność, można określić strategię sterowania dla układu łańcuchowego o n-wymiarowej przestrzeni stanu.

Krok 1. Dzielimy horyzont sterowania na $(n-1)$ równych przedziałów

$$[0,\tau], \quad [\tau,2\tau], \quad ..., \quad [(n-2)\tau,T], \qquad \tau = \frac{T}{n-1}.$$

Krok 2. Na odcinku czasu $[0,\tau]$ za pomocą stałego sterowania przeprowadzamy układ ze stanu $z_1(0), z_2(0)$ do stanu $z_1(T), z_2(T)$. Sterowanie takie dla $t \in [0,\tau]$ musi być równe

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{z_1(T)-z_1(0)}{\tau} = \text{const}, \\ u_2(t) &= \frac{z_2(T)-z_2(0)}{\tau} = \text{const}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Efektem działania sterowania (5.41) jest także zmiana pozostałych współrzędnych $z_3, ..., z_n$, które nie są równe swoim wartościom końcowym. I tak na przykład

$$z_3(\tau) = z_3(0) + u_1 z_2(0) + \frac{1}{2}\tau^2 u_1 u_2 \neq z_3(T).$$

Krok 3. W przedziale czasu $[\tau, 2\tau]$ przeprowadzamy współrzędną $z_3(\tau)$ do jej zadanej wartości końcowej $z_3(T)$ za pomocą sterowania okresowego

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{21}\sin\omega t, \\ u_2(t) &= a_{22}\cos\omega t, \end{aligned} \tag{5.42}$$

gdzie

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{4\pi}{T}.$$

Jednocześnie wszystkie dotychczas wysterowane współrzędne w chwili końcowej wracają do poprzednio osiągniętej wartości zadanej

$$\begin{aligned} z_1(2\tau) &= z_1(T), \\ z_2(2\tau) &= z_2(T), \\ z_3(2\tau) &\neq z_3(\tau) + \frac{a_{21}a_{22}\tau^2}{4\pi} = z_3(T), \\ &\vdots \\ z_n(2\tau) &\neq z_n(T). \end{aligned} \tag{5.43}$$

W celu wyznaczenia wartości amplitud sterowań a_{2i} należy określić wartość liczbową jednego parametru, np. a_{22}, w taki sposób, aby sterowanie w chwili τ było ciągłe, a następnie wyznaczyć drugi parametr a_{21} spełniający warunek (5.43).

Krok i**.** Postępując analogicznie, tj. za pomocą sterowań dla $t \in [(i-2)\tau, (i-1)\tau]$ równych

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{i1} \sin \omega t, \\ u_2(t) &= a_{i2} \cos \omega t, \end{aligned} \tag{5.44}$$

można wysterować i-tą zmienną od wartości $z_i((i-1)\tau)$ do zadanej wartości końcowej $z_i(T)$.

5.2.2. Sterowanie do punktu dla kołowych platform mobilnych

Dla kołowych platform mobilnych istnieje algorytm sterowania ogólnego przeznaczenia, który za pomocą sprzężenia zwrotnego zależnego od czasu stabilizuje w zadanej konfiguracji wszystkie klasy nieholonomicznych platform mobilnych. Algorytm ten, podany przez Pometa w pracy [72], należy do grupy algorytmów, w których warunek konieczny Brocketta sformułowany w tw. 2 jest spełniony poprzez zastosowanie gładkiego sprzężenia zwrotnego zależnego w sposób jawny nie tylko od stanu, ale i od czasu. Jak wspomniano w rozdziale 4, takie algorytmy są wolnozbieżne.

Twierdzenie 4 (Pomet). *Rozważmy układ sterowania postaci*

$$\dot{x} = G(x)\eta = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)\eta_k, \tag{5.45}$$

gdzie $x \in R^n, \eta \in R^m$, $m < n$ *jest liczbą prędkości pomocniczych, a* g_k *są gładkimi polami wektorowymi. Załóżmy, że powyższy układ spełnia warunki:*

1. $\forall\ x \neq 0$

$$\text{rank } \{ad_{g_1}^j g_k \mid k = 1, ..., m,\ j \geq 0\}(x) = n, \tag{5.46}$$

gdzie

$$\text{dla} \quad j \geq 1 \qquad ad_{g_1}^j g_k(x) = [g_1, ad_{g_1}^{j-1} g_k](x), \qquad ad_{g_1}^0 g_k(x) = g_k(x),$$

2. *pole wektorowe $g_1(x)$ można wyprostować w otoczeniu punktu $0 \in R^n$ (można więc założyć, że $g_1(x) = e_1$),*

3. *jest określona pewna funkcja Lapunowa $V(t,x)$*

$$V(t,x) = \frac{1}{2}(x_1 + h(t, x_2, ..., x_n))^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + ...\frac{1}{2}x_n^2, \tag{5.47}$$

gdzie
$$h(t,x) = h(t, x_2, ..., x_n) = \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right) \cos t, \tag{5.48}$$

4. *pola wektorowe g_k i funkcja V są takie, że zachodzą warunki*

$$\left.\begin{array}{ll} L_{g_k}V(t,x) = 0 & k = 2, ..., m \\ \frac{\partial^j h(t,x)}{\partial t^j} = 0 & j \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, \tag{5.49}$$

gdzie
$$L_f\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x).$$

Wówczas 0 jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu (5.45) z zamkniętą pętlą następującego sprzężenia zwrotnego

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_1 = -\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - k_1 L_{g_1} V(t,x), \\ \eta_2 = -k_1 L_{g_2} V(t,x), \\ \vdots \\ \eta_m = -k_1 L_{g_m} V(t,x). \end{array}\right. \qquad k_1 > 0, \tag{5.50}$$

Jak wspomniano wcześniej, algorytm ten jest wprawdzie asymptotycznie zbieżny do zera, jednak zbieżność ta jest powolna. Ponadto podczas stosowania tego algorytmu występuje zjawisko gwałtownego przełączania kierunków ruchu, co może mieć niekorzystny wpływ na mechanikę platformy.

5.3. Algorytmy śledzenia ścieżki

Algorytmy śledzenia ścieżki dla manipulatorów nieholonomicznych do tej pory nie były publikowane w literaturze, dlatego w tym podrozdziale zostaną przedstawione jedynie znane z literatury algorytmy śledzenia ścieżki dla kołowych platform mobilnych z ograniczoną mobilnością. Śledzenie ścieżki wszystkich nieholo-

nomicznych platform mobilnych może być zrealizowane na podstawie tw. 4 podanego przez Pometa, co pokazała autorka w pracy [51], lub za pomocą algorytmów przeznaczonych dla poszczególnych klas. Takim algorytmem jest na przykład algorytm Samsona gwarantujący śledzenie ścieżki dla platformy klasy $(2, 0)$.

5.3.1. Śledzenie ścieżki kołowych platform mobilnych

Jeśli zadaniem zdefiniowanym dla nieholonomicznej kołowej platformy mobilnej będzie śledzenie trajektorii, to nie będzie możliwe zastosowanie algorytmu Pometa, ponieważ tw. 4 jest słuszne jedynie dla układów bezdryfowych, śledzenie trajektorii zaś powoduje powstanie dryfu w równaniach błędu kinematyki układu nieholonomicznego [33], [71]. Jednak zadanie śledzenia ścieżki może być przekształcone za pomocą współrzędnych Freneta do postaci wymaganej przez algorytm Pometa.

Algorytm Pometa dla współrzędnych Freneta

W rozdziale 4.2.3 pokazano, że zachodzą następujące zależności pomiędzy prędkościami platformy mobilnej wyrażonymi we współrzędnych kartezjańskich i krzywoliniowych

$$\dot{l} = (-\sin\theta_r \quad \cos\theta_r)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad \dot{s} = \frac{(\cos\theta_r \quad \sin\theta_r)}{1 \mp c(s)l}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

gdzie l jest odległością platformy od ścieżki, s jest bieżącym parametrem ścieżki (odległością krzywoliniową od wybranego punktu), $c(s)$ jest krzywizną ścieżki, θ_r jest zadaną orientacją ścieżki, natomiast $\dot{x}, \dot{y}$ można wyrazić np. za pomocą równań ograniczeń nieholonomicznych dla platformy mobilnej z ograniczoną mobilnością.

Niech $\tilde{\theta} = \theta - \theta_r$ będzie błędem orientacji. W zależności od klasy kołowej platformy mobilnej, zmienne $s, l, \tilde{\theta}$ oraz ewentualnie β_i, $i = 1, 2$ stanowią zbiór nowych współrzędnych dla systemu poruszającego się wzdłuż ścieżki. Używając tej parametryzacji i definiując nowe wejścia, można błąd śledzenia ścieżki wyrazić w postaci bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{\xi} = \tilde{G}(\xi)\eta = \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi)\eta_i, \tag{5.52}$$

gdzie dla konkretnych klas kołowych platform mobilnych powyższe symbole mają następujący sens

- **klasa $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$:**

  Kinematyka platformy należącej do tej klasy jest opisana równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\theta v, \\ \dot{y} &= \sin\theta v, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \tag{5.53}$$

  gdzie v i ω oznaczają prędkość liniową i kątową platformy.
  Ze wzorów (5.51) obliczamy

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\sin\theta_r \dot{x} + \cos\theta_r \dot{y} = -\sin\theta_r \cos\theta v + \cos\theta_r \sin\theta v \\ &= \sin(\theta - \theta_r) v = \sin\tilde{\theta} v, \\ \dot{s} &= \frac{\cos\tilde{\theta}}{1 \mp c(s) l} v, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = \dot{\theta} - c(s)\dot{s} = \omega - \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l}(\cos\theta_r \dot{x} + \sin\theta_r \dot{y}) \\ &= \omega - \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l}(\cos\theta_r \cos\theta v + \sin\theta_r \sin\theta v) \\ &= \omega - \frac{c(s)\cos\tilde{\theta}}{1 \mp c(s) l} v. \end{aligned}$$

  Błędy śledzenia ścieżki można wtedy przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\tilde{\theta} \end{pmatrix} v, \tag{5.54}$$

  z nowym wejściem $u = \omega - \frac{c(s)\cos\tilde{\theta}}{1 \mp c(s) l} v$.

- **klasa $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$:**

  Kinematyka platformy należącej do tej klasy jest opisana równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos(\theta + \beta) v, \\ \dot{y} &= \sin(\theta + \beta) v, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\beta} &= \zeta, \end{aligned} \tag{5.55}$$

gdzie β jest orientacją koła sterowanego (kierownicy), v i ω reprezentują prędkość liniową i prędkość kątową platformy, a ζ opisuje prędkość kątową orientacji kierownicy.

Ze wzorów (5.51) obliczamy

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= -\sin\theta_r\dot{x} + \cos\theta_r\dot{y} = -\sin\theta_r\cos(\theta+\beta)v + \cos\theta_r\sin(\theta+\beta)v \\
&= \sin(\theta+\beta-\theta_r)v = \sin(\tilde{\theta}+\beta)v, \\
\dot{s} &= \frac{\cos(\tilde{\theta}+\beta)}{1\mp c(s)l}v, \\
\dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = \dot{\theta} - c(s)\dot{s} = \omega - \frac{c(s)}{1\mp c(s)l}(\cos\theta_r\dot{x} + \sin\theta_r\dot{y}) \\
&= \omega - \frac{c(s)}{1\mp c(s)l}(\cos\theta_r\cos(\theta+\beta)v + \sin\theta_r\sin(\theta+\beta)v) \\
&= \omega - \frac{c(s)\cos(\tilde{\theta}+\beta)}{1\mp c(s)l}v.
\end{aligned}$$

Błędy śledzenia ścieżki można wówczas przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{l} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\tilde{\theta}+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \zeta, \tag{5.56}$$

z nowym wejściem $u = \omega - \frac{c(s)\cos(\tilde{\theta}+\beta)}{1\mp c(s)l}v$.

- **klasa $(\mathbf{1},\mathbf{2})$:**

Kinematyka platformy należącej do tej klasy jest opisana równaniami:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -L(\sin\beta_1\sin(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\theta+\beta_1))v, \\
\dot{y} &= L(\sin\beta_1\cos(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\cos(\theta+\beta_1))v, \\
\dot{\theta} &= \sin(\beta_2-\beta_1)v, \\
\dot{\beta}_1 &= \zeta_1, \\
\dot{\beta}_2 &= \zeta_2,
\end{aligned} \tag{5.57}$$

gdzie β_1 i β_2 to kąty orientacji dwóch niezależnie sterowanych kierownic, zaś L jest połową odległości pomiędzy kierownicami.

Ze wzorów (5.51) obliczamy

$$
\begin{aligned}
\dot{l} &= -\sin\theta_r\dot{x} + \cos\theta_r\dot{y} = \\
&= Lv[\sin\theta_r(\sin\beta_1\sin(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\theta+\beta_1)) \\
&\quad + \cos\theta_r(\sin\beta_1\cos(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\cos(\theta+\beta_1))] \\
&= Lv\sin\beta_1[\sin\theta_r\sin(\theta+\beta_2) + \cos\theta_r\cos(\theta+\beta_2)] \\
&\quad + Lv\sin\beta_2[\sin\theta_r\sin(\theta+\beta_1) + \cos\theta_r\cos(\theta+\beta_1)] \\
&= Lv\sin\beta_1\cos(\theta+\beta_2-\theta_r) + Lv\sin\beta_2\cos(\theta+\beta_1-\theta_r) \\
&= Lv\sin\beta_1\cos(\tilde{\theta}+\beta_2) + Lv\sin\beta_2\cos(\tilde{\theta}+\beta_1), \\
\dot{s} &= \frac{-L}{1\mp c(s)l}[\sin\beta_1\sin(\tilde{\theta}+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\tilde{\theta}+\beta_1)], \\
\dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = \dot{\theta} - c(s)\dot{s} = \sin(\beta_2-\beta_1)v - \frac{c(s)}{1\mp c(s)l}(\cos\theta_r\dot{x} + \sin\theta_r\dot{y}) \\
&= \sin(\beta_2-\beta_1)v + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\cos\theta_r[\sin\beta_1\sin(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\theta+\beta_1)] \\
&\quad - \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\theta_r[\sin\beta_1\cos(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2\cos(\theta+\beta_1)] \\
&= \sin(\beta_2-\beta_1)v + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta_1[\cos\theta_r\sin(\theta+\beta_2) - \sin\theta_r\cos(\theta+\beta_2)] \\
&\quad + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta_2[\cos\theta_r\sin(\theta+\beta_1) - \sin\theta_r\cos(\theta+\beta_1)] \\
&= \sin(\beta_2-\beta_1)v + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta_1\sin(\theta+\beta_2-\theta_r) \\
&\quad + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta_2\sin(\theta+\beta_1-\theta_r) \\
&= \sin(\beta_2-\beta_1)v + \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}[\sin\beta_1\sin(\tilde{\theta}+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\tilde{\theta}+\beta_1)].
\end{aligned}
$$

Błędy śledzenia ścieżki można wówczas przedstawić w postaci

$$
\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\zeta_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\zeta_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{33}(\xi) \\ g_{34}(\xi) \end{pmatrix} v, \tag{5.58}
$$

gdzie

$$
g_{33}(\xi) = \sin(\beta_2-\beta_1) + \frac{Lc(s)}{1\mp c(s)l}[\sin\beta_1\sin(\tilde{\theta}+\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\tilde{\theta}+\beta_1)],
$$

$$g_{34}(\xi) = L\left(\sin\beta_1\cos(\tilde{\theta}+\beta_2)+\sin\beta_2\cos(\tilde{\theta}+\beta_1)\right).$$

- **klasa $(\mathbf{1},\mathbf{1})$:**

Kinematyka platformy należącej do tej klasy jest opisana równaniami [8]:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= L\sin\theta\sin\beta v,\\
\dot{y} &= -L\cos\theta\sin\beta v,\\
\dot{\theta} &= -\cos\beta v,\\
\dot{\beta} &= \zeta,
\end{aligned} \tag{5.59}$$

gdzie L jest połową odległości pomiędzy osią łączącą koła ustalone a środkiem kierownicy.

Ze wzorów (5.51) obliczamy

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= -\sin\theta_r\dot{x}+\cos\theta_r\dot{y} = -\sin\theta_r L\sin\theta\sin\beta v - \cos\theta_r L\cos\theta\sin\beta v\\
&= -Lv\sin\beta(\sin\theta_r\sin\theta+\cos\theta_r\cos\theta) = -Lv\sin\beta\cos(\theta-\theta_r)\\
&= -Lv\sin\beta\cos\tilde{\theta},\\
\dot{s} &= \frac{L\sin\beta\sin\tilde{\theta}}{1\mp c(s)l}v,\\
\dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta}-\dot{\theta}_r = \dot{\theta}-c(s)\dot{s} = -\cos\beta v - \frac{c(s)}{1\mp c(s)l}(\cos\theta_r\dot{x}+\sin\theta_r\dot{y})\\
&= -\cos\beta v - \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta(\cos\theta_r\sin\theta-\sin\theta_r\cos\theta)\\
&= -\cos\beta v - \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta\sin(\theta-\theta_r) = -\cos\beta v - \frac{Lc(s)v}{1\mp c(s)l}\sin\beta\sin\tilde{\theta}.
\end{aligned}$$

Błędy śledzenia ścieżki można wówczas przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{\tilde{\theta}}\\ \dot{l}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\zeta + \begin{pmatrix}0\\ g_{22}(\xi)\\ g_{23}(\xi)\end{pmatrix}v, \tag{5.60}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
g_{22}(\xi) &= -\cos\beta - L\frac{c(s)\sin\beta\sin\tilde{\theta}}{1\mp c(s)l},\\
g_{23}(\xi) &= L\sin\beta\cos\tilde{\theta}.
\end{aligned}$$

W podanych równaniach, a także w równaniach opisujących błędy śledzenia ścieżki dla pozostałych klas nieholonomicznych platform mobilnych, pominięto równanie na $\dot{s}$, ponieważ trajektoria nie osiąga zadanej ścieżki, tylko zbliża się do niej (śledzenie jest asymptotyczne) [25].

Łatwo sprawdzić, że powyższe równania spełniają założenia tw. 4, czyli asymptotyczna stabilizacja układu, dla którego sterowanie jest generowane za pomocą algorytmu Pometa, może być dowiedziona.

Algorytm Samsona dla współrzędnych Freneta

W wielu dotychczasowych pracach do rozwiązania zadania śledzenia ścieżki przez platformę stosowano algorytm Pometa [72]. Zaletą wspomnianego algorytmu jest możliwość zastosowania do dowolnej klasy nieholonomicznych kołowych platform mobilnych, co pokazano w [51]. Jednak algorytm Pometa cechuje powolna zbieżność oraz przełączanie kierunków ruchu. Z tych względów może on być stosowany tylko w procesie zbliżania się do ścieżki. Jeżeli jednak wymagany jest algorytm sterowania zapewniający nie tylko zbieżność do ścieżki, ale także dalsze przemieszczanie się wzdłuż niej, to należy użyć algorytmu odpowiedniego dla określonej klasy platform mobilnych. Dla platform klasy $(2,0)$ takim algorytmem jest algorytm Samsona [76].

Zgodnie ze wzorem (5.54), błędy śledzenia ścieżki dla platformy $(2,0)$ można zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{l} &= v \sin \tilde{\theta}, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= u, \end{aligned} \tag{5.61}$$

gdzie u jest nowym sterowaniem dla drugiego równania.

Jak pokazano w [8], algorytm Samsona definiuje v i u w taki sposób, że prędkość liniowa v nie może zanikać do zera, natomiast u zależy od prędkości liniowej platformy. W naszych rozważaniach skoncentrujemy się na przypadku $v(t) = \text{const} \neq 0$, ponieważ chcemy, aby platforma poruszała się ze stałą prędkością wzdłuż ścieżki. Sterowanie kinematyczne Samsona jest wówczas równe

$$v = \text{const}, \qquad u = -k_2 l v \frac{\sin \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} - k_3 \tilde{\theta}, \qquad k_2, k_3 > 0. \tag{5.62}$$

Dla układu dynamicznego (5.61) wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V_k(\xi) = k_2 \frac{l^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2}. \tag{5.63}$$

Następnie obliczmy pochodną funkcji Lapunowa $\dot{V}_k$ wzdłuż trajektorii układu (5.61) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.62)

$$\dot{V}_k = k_2 l\dot{l} + \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -k_3\tilde{\theta}^2 \leq 0. \tag{5.64}$$

Ponieważ V_k nie rośnie wzdłuż trajektorii układu, oznacza to, że l i $\tilde{\theta}$ są ograniczone, i wtedy

$$\ddot{V}_k = -2k_3\tilde{\theta}(-k_2 lv\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} - k_3\tilde{\theta})$$

jest również sumą iloczynów funkcji ograniczonych, co jest równoznaczne z jednostajną ograniczonością funkcji $\dot{V}_k$. Z lematu Barbalata wynika więc, że $\dot{V}_k$ dąży do zera, czyli $\tilde{\theta} \to 0$. Ponieważ $\tilde{\theta} = 0$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu (5.61)–(5.62), łatwo pokazać, że $\ddot{\tilde{\theta}}$ jest również ograniczona (jest sumą iloczynów wyrażeń ograniczonych), a więc $\dot{\tilde{\theta}}$ musi dążyć do zera. We wzorze (5.62) opisującym dynamikę błędu $\dot{\tilde{\theta}}$ wyrażenia k_2, v i $\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}}$ są różne od zera w pobliżu $\tilde{\theta} = 0$, czyli zachodzi $l \to 0$.

Ostatecznie widać więc, że

$$(l, \tilde{\theta}) = (0, 0)$$

jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi. To kończy dowód zbieżności algorytmu kinematycznego Samsona.

6. Sterowanie manipulatorów mobilnych do punktu

Sterowanie do punktu ma na celu ustawienie manipulatora mobilnego w odpowiedniej konfiguracji, obejmującej zadaną posturę platformy (tj. jej położenie i orientację) oraz określone położenie przegubów ramienia manipulacyjnego umieszczonego na platformie. Osiągnięcie zadanej konfiguracji jest często punktem wyjścia do realizacji kolejnych zadań, jakie ma wykonać manipulator mobilny, polegających na przykład na pobraniu ładunku z ustalonego punktu przestrzeni roboczej. Informację o konieczności ustawienia się we wskazanej konfiguracji moduł transportowo-wykonawczy, jakim jest manipulator mobilny, otrzymuje zazwyczaj od systemu nadrzędnego [73].

Ze względu na specyfikę budowy manipulatora mobilnego obejmującą dwa strukturalnie różne podsystemy (platformę mobilną i ramię manipulacyjne), realizowane zadanie dla każdego z podukładów można sformułować następująco:

- platforma mobilna ma przemieścić się do ustalonego punktu przestrzeni i zatrzymać się w nim z ustaloną orientacją,
- ramię manipulacyjne ma osiągnąć zadaną konfigurację w przestrzeni wewnętrznej, czyli przegubowej.

Ponieważ zadanie sterowania do punktu jest realizowane w odmienny sposób w zależności od budowy nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, więc należy je rozważyć oddzielnie dla poszczególnych typów wspomnianych obiektów.

6.1. Sterowanie manipulatora mobilnego (nh, h) do ustalonej konfiguracji

Rozważmy manipulator mobilny typu (nh, h) opisany równaniami kinematyki (3.12) wyrażającymi wyłącznie brak poślizgów kół platformy podczas ruchu

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta$$

oraz równaniami dynamiki (4.19) wyrażonymi w współrzędnych pomocniczych. Jak pokazano w rozdziale 4, rozwiązanie problemu sterowania do ustalonej konfiguracji wymaga zastosowania procedury całkowania wstecznego [38], a więc znalezienia sterowania kinematycznego rozwiązującego problem ograniczeń, a następnie użycie go do sterowania dynamiką obiektu. Jako algorytm kinematyczny zostanie użyty algorytm Pometa, przedstawiony w podrozdziale 5.2.2, natomiast sterowanie dynamiką jest dane równaniem (4.21).

6.1.1. Sterowanie kinematyczne

Algorytm Pometa może być stosowany do realizacji zadania osiągania zadanej postury przez kołowe platformy mobilne z ograniczoną mobilnością. Można pokazać, że wszystkie klasy nieholonomicznych platform mobilnych spełniają założenia tw. 4. W tym celu przekształćmy równania kinematyki dowolnej klasy nieholonomicznych platform kołowych do następującej postaci normalnej:

- klasa $(2,0)$:
  wektor stanu $\xi = (\theta, x, y)^T$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} v, \tag{6.1}$$

- klasa $(2,1)$:
  wektor stanu $\xi = (\theta, x, y, \beta)^T$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta+\beta) \\ \sin(\theta+\beta) \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \zeta, \tag{6.2}$$

- klasa $(1,2)$:
  wektor stanu $\xi = (\beta_1, \beta_2, \theta, x, y)^T$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \zeta_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \zeta_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\beta_2 - \beta_1) \\ g_{34}(\xi) \\ g_{35}(\xi) \end{pmatrix} v, \tag{6.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} g_{34}(\xi) &= -L\left[\sin\beta_1 \sin(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2 \sin(\theta+\beta_1)\right], \\ g_{35}(\xi) &= L\left[\sin\beta_1 \cos(\theta+\beta_2) + \sin\beta_2 \cos(\theta+\beta_1)\right], \end{aligned}$$

- klasa $(1,1)$:

  wektor stanu $\xi = (\beta, \theta, x, y)^T$

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tan\beta}{L} \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} v. \tag{6.4}$$

Jak widać, równania kinematyki każdej z klas nieholonomicznych platform mobilnych można wyrazić w takiej postaci, aby pierwsze pole wektorowe $g_1(\xi)$ było wyprostowane. Ponadto w przypadku nieholonomicznych kołowych platform mobilnych wykazano [72], [87], że dla modelu kinematyki platformy mobilnej dowolnej klasy można znaleźć taką zmianę współrzędnych oraz statyczne sprzężenie zwrotne, że powstały w ten sposób nowy układ sterowania spełnia pozostałe założenia tw. 4. Na mocy tego twierdzenia prawo sterowania (5.50) podane przez Pometa zapewnia asymptotyczną zbieżność postury platformy mobilnej do postury wymaganej w zadaniu.

6.1.2. Sterowanie dynamiczne

Rozważmy całkowicie znany model dynamiki manipulatora mobilnego (4.19) wyrażony we współrzędnych pomocniczych. Załóżmy, że znane są kinematyczne prędkości referencyjne $\eta_r(t)$ obliczone według algorytmu Pometa (5.50), które rozwiązują problem sterowania do punktu dla platformy mobilnej.

Z kolei zadana trajektoria dla przegubów manipulatora pokładowego nie zależy od czasu, czyli jest ustaloną konfiguracją przegubową $q_{rd}(t) = q_{rd} = \text{const}$. Warto wspomnieć, że w przypadku manipulatorów holonomicznych zadanie sterowania do ustalonej konfiguracji przegubowej (sterowanie do punktu) jest szczególnym przypadkiem śledzenia trajektorii i może być rozwiązane za pomocą tych samych algorytmów, które są dedykowane zadaniu śledzenia trajektorii.

Zaproponujmy prawo sterowania dynamiką

$$\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + D^* - (K + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \right\}, \tag{6.5}$$

gdzie symbole są zdefiniowane jako

$$\begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{q}_r - \dot{q}_{\mathrm{ref}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{e}_r + \Lambda e_r \end{pmatrix}, \qquad e_r = q_r - q_{rd}.$$

Wyrażenie e_η oznacza wektor błędów prędkości pomocniczych – różnic pomiędzy rzeczywistymi prędkościami η nieholonomicznej platformy a prędkościami η_r projektowanymi w sterowniku kinematycznym. Z kolei zmienna s jest zdefiniowana analogicznie do zmiennej ślizgu w algorytmie Slotine'a i Li [81], natomiast trajektoria q_{ref} jest pewną trajektorią referencyjną, definiowaną za pomocą zmiennej ślizgu s jako

$$\dot{q}_{\mathrm{ref}} = \dot{q}_{rd} - \Lambda e_r, \qquad \ddot{q}_{\mathrm{ref}} = \ddot{q}_{rd} - \Lambda \dot{e}_r.$$

Macierze K i Λ, równe

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \Lambda^T > 0,$$

są symetrycznymi i dodatnio określonymi macierzami regulacji. Macierz C_K jest macierzą korekcji daną wzorem (3.23), niezbędną do uzyskania warunku skośnej symetrii (3.22) pomiędzy macierzami Q^* i C^*, który dla manipulatorów umieszczonych na kołowych platformach mobilnych nie jest spełniony [22]. Łatwo sprawdzić, że równanie zamkniętej pętli (4.19), (6.5) na poziomie dynamicznym można przedstawić jako

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{s} \end{pmatrix} + (C^* + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} = 0. \tag{6.6}$$

6.1.3. Dowód zbieżności

Przed rozpoczęciem rozważań na temat zbieżności błędów śledzenia (6.6) należy uwzględnić wpływ błędów e_η na sterowanie kinematyczne (5.50).

Prędkości referencyjne η_r to sygnały sterowania kinematycznego uzyskiwane w przypadku idealnym, tzn. bez uwzględniania poziomu dynamicznego w równaniach obiektu. Jednak w rzeczywistym przypadku, tj. z uwzględnieniem dynamiki, jako sterowanie kinematyczne (prędkości podawane na wejścia układu) należy wziąć zmodyfikowane sterowania $\eta = \eta_r + e_\eta$ równe

$$\begin{cases} \eta_1 = -\frac{\partial h(t,\xi)}{\partial t} - L_{g_1} V(t,\xi) + e_{\eta_1}, \\ \eta_2 = -L_{g_2} V(t,\xi) + e_{\eta_2}, \\ \vdots \\ \eta_m = -L_{g_m} V(t,\xi) + e_{\eta_m}, \end{cases} \tag{6.7}$$

w których występują mierzone błędy prędkości e_η. Błędy te pojawiają się wtedy, gdy rzeczywista prędkość układu nie może osiągnąć wartości referencyjnej η_r, np. ze względu na dużą bezwładność obiektu.

Dla systemu (6.6), (6.7) wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$W = V(t,\xi) + \frac{1}{2}(\ e_\eta\ ,\ s\ )^T Q^* \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

gdzie $V(t,\xi)$ jest funkcją Lapunowa (5.47) dla sterowania kinematycznego, zaproponowaną w tw. 4. Obliczmy pochodną po czasie funkcji W wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.6) i ze sterowaniem kinematycznym (6.7), uwzględniającym oddziaływanie dynamiki

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= -(L_{g_1}V)^2 + e_{\eta_1}L_{g_1}V + ... - (L_{g_m}V)^2 + e_{\eta_m}L_{g_m}V - \left(e_\eta^T\ s^T\right) K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \\
&\leq -\frac{3}{4}(L_{g_1}V)^2 - \left(\frac{1}{2}L_{g_1}V - e_{\eta_1}\right)^2 - (K_1-1)e_{\eta_1}^2 + ... - \frac{3}{4}(L_{g_m}V)^2 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}L_{g_m}V - e_{\eta_m}\right)^2 - (K_1-1)e_{\eta_m}^2 - s^T K_2 s \leq 0.
\end{aligned}$$

Ze względu na zależność funkcji W od czasu, stabilność proponowanego algorytmu sterowania zostanie wykazana przy pomocy twierdzenia La Salle'a–Yoshizawy (patrz tw. 7, rozdz. 11).

Widać, że jeśli parametry regulacji są odpowiednio dobrane, czyli $K_1 > 1$ i $K_2 > 0$, to spełnione jest oszacowanie

$$\begin{aligned}
\dot{W} &\leq -\left[\frac{3}{4}(L_{g_1}V)^2 + (K_1-1)e_{\eta_1}^2 + ... + \frac{3}{4}(L_{g_m}V)^2 + (K_1-1)e_{\eta_m}^2 + s^T K_2 s\right] \\
&= -H(e_\eta, s, L_{g_i}V) \leq 0, \qquad i = 1, ..., m,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

czyli wszystkie trajektorie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego spełniają warunek

$$\lim_{t\to+\infty} H(e_\eta, s, L_{g_i}V) = 0, \qquad i = 1, ..., m. \tag{6.10}$$

To oznacza, że punkt w przestrzeni stanu manipulatora mobilnego

$$(e_\eta, s, L_{g_i}V) = (0,0,0), \qquad i = 1, ..., m,$$

jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Kolejną właściwością, którą należy pokazać, jest fakt, że warunek $L_{g_i}V = 0$ dla $i = 1, ..., m$ zapewnia zbieżność zmiennych ξ platformy do 0 oraz że $s = 0$ gwarantuje osiągnięcie przez manipulator ustalonej konfiguracji. Jednak zbieżność ξ do 0 jest konsekwencją założenia (5.49) twierdzenia 4, gdyż z postaci funkcji $h(t, \xi)$ danej wzorem (5.48) wynika natychmiast

$$\frac{\partial^j h(t, \xi)}{\partial t^j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0,$$

natomiast dla ramienia manipulacyjnego zadany punkt w przestrzeni przegubowej $q_{rd}(t) = q_{rd}$ jest szczególnym przypadkiem trajektorii i zachodzi dla niego zbieżność

$$s = \dot{e}_r + \Lambda e_r = 0, \qquad e_r = q_r - q_{rd},$$

jeśli $\Lambda = \Lambda^T > 0$. To kończy dowód.

6.2. Sterowanie manipulatora mobilnego (nh, nh) do ustalonej konfiguracji

W manipulatorach mobilnych typu (nh, nh) ograniczenia nieholonomiczne są nałożone na ruch każdego z podsystemów składowych. Podobnie jak dla manipulatorów typu (nh, h), aby rozwiązać zadanie sterowania do punktu dla takiego obiektu, należy zastosować sterowanie kinematyczne, np. przedstawione w rozdziale 5.2, a następnie otrzymane prędkości referencyjne użyć do zaprojektowania sterowania obiektem uwzględniającego również jego równania dynamiki.

Jak pokazano w rozdziale 5.2, algorytmy prezentowane w literaturze działają w otwartej lub zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. W rozdziale 6.1 dowiedziono, że wybór algorytmu kinematycznego ze sprzężeniem zwrotnym od stanu gwarantuje osiągnięcie celu sterowania, jakim jest np. ustawienie manipulatora mobilnego w zadanej konfiguracji. W dalszej części rozdziału pokazano, jak uwzględnienie równań dynamiki wpływa na zachowanie podukładu, w którym sterowanie kinematyczne jest projektowane bez sprzężenia zwrotnego.

6.2.1. Sterowanie kinematyczne

Aby sprawdzić, jak dynamika wpływa na trajektorie podsystemu nieholonomicznego, dla którego użyto sterowania kinematycznego bez sprzężenia zwrotnego, rozważmy najprostszy układ łańcuchowy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1, \end{aligned} \tag{6.11}$$

w którym sterowanie kinematyczne ma postać wielomianową podaną przez Nakamurę, Chunga i Sørdalena

$$\begin{aligned} u_1 &= b_0, \\ u_2 &= c_0 + c_1 t, \end{aligned} \tag{6.12}$$

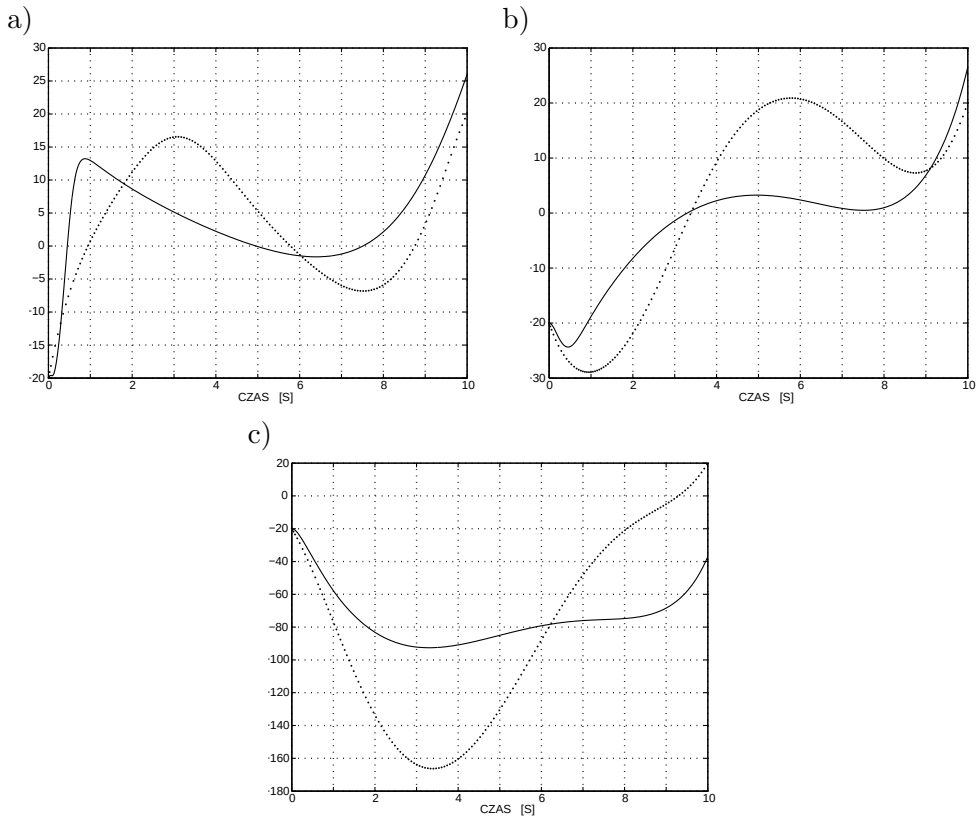
ze współczynnikami b_0, c_0 i c_1 obliczonymi ze wzorów (5.30) i (5.31). Jak wspomniano w rozdziale 6.1, wzięcie pod uwagę równań dynamiki w modelu sterowanego obiektu powoduje konieczność uwzględnienia dodatkowych błędów $e_\eta = \eta - \eta_r$, które pochodzą od poziomu dynamicznego i na poziomie kinematycznym muszą zostać uwzględnione jako zakłócenie. Dostajemy wówczas zmodyfikowane sterowanie kinematyczne postaci

$$\begin{aligned} u_1 &= b_0 + e_{\eta 1}, \\ u_2 &= c_0 + c_1 t + e_{\eta 2}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Takie sterowanie zastosowane do równań (6.11) generuje następujące trajektorie

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + b_0 t + \int_0^t e_{\eta 1} d\tau, \\ x_2(t) &= x_2(0) + c_0 t + \frac{1}{2} c_1 t^2 + \int_0^t e_{\eta 2} d\tau, \\ x_3(t) &= x_3(0) + x_2(0) b_0 t + \frac{1}{2} c_0 b_0 t^2 + \frac{1}{6} c_1 b_0 t^3 + \int_0^t x_2 e_{\eta 1} d\tau \\ &+ \int_0^t (b_0 + e_{\eta 1}) d\tau \int_0^t e_{\eta 2} d\sigma. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Współczynniki wielomianów sterujących b_0, c_0 i c_1 są projektowane w taki sposób, aby w określonym horyzoncie czasowym T, przy nieobecnych zakłóceniach, zmienne stanu osiągnęły zadane wartości $x_1(T)$, $x_2(T)$ i $x_3(T)$. Aby jednak uzyskać taką zależność w równaniach zaburzonych (6.14), wszystkie całki zawierające błędy $e_{\eta 1}$ i $e_{\eta 2}$ musiałyby w chwili T równać się zero. Ponieważ jednak zastosowanie równolegle sterowania kinematycznego i dynamicznego zapewnia zbieżność do zera błędów e_η, nie zaś ich całek, to wyrażenia całkowe w równaniach stanu nie są równe zeru. Wynika stąd, że wprawdzie ramię manipulacyjne zatrzyma się po czasie T, jednak nie w wymaganej konfiguracji. Wielkość przesunięcia (niedokładności pozycjonowania) zależy od przebiegu błędów e_η i można ją zbadać symulacyjnie.

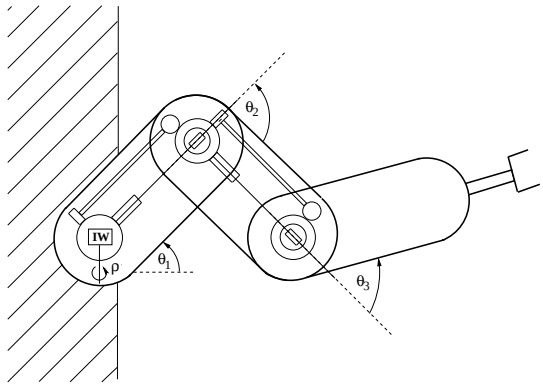


Rys. 6.1. Wpływ sterownika dynamicznego o wzmocnieniu $K = 80$ na zachowanie układu. Linia kropkowana – konfiguracja kinematyczna (hipotetyczna), linia ciągła – rzeczywista konfiguracja przegubów: a) kąt x_1, b) kąt x_2, c) kąt x_3

Fig. 6.1. Influence of the dynamical controller with gain $K = 80$ on the behavior of the system. Dotted line – ideal kinematic configuration, solid line – real configuration of robot joints: a) joint x_1, b) joint x_2, c) joint x_3

W tym celu przeprowadzono badania symulacyjne zachowania nieholonomicznego trójwahadła, w którym jako algorytmu kinematycznego, gwarantującego osiągnięcie ustalonej konfiguracji przez nieholonomiczny manipulator, użyto rozważanego algorytmu wielomianowego Nakamury, Chunga i Sørdalena. Symulacje przeprowadzono używając pakietu Matlab i Simulink[1].

Schemat nieholonomicznego trójwahadła został pokazany na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Planarne trójwahadło z napędem nieholonomicznym
Fig. 6.2. Planar 3-pendulum with nonholonomic gear

Kinematyka nieholonomicznego trójwahadła jest opisana równaniami (2.10) oraz (2.11)

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \sin\theta_1 \\ 0 & a_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = G_2(q_r)u,$$

gdzie u_1 to prędkość kątowa pierwszego przegubu, zaś u_2 to prędkość kątowa koła IW w pierwszym przegubie. Model dynamiki nieholonomicznego trójwahadła, ze względu na obszerność, został pominięty, jednak można go znaleźć w pracy [52].

Konfiguracja zadana była równa

$$x(0) = [-20^{\circ}, -20^{\circ}, -20^{\circ}], \qquad x(T) = [20^{\circ}, 20^{\circ}, 20^{\circ}],$$

z horyzontem czasowym $T = 10$ s. Podłączenie do układu sterownika dynamicznego powoduje powstanie dodatkowych błędów śledzenia wszystkich przegubów, co widać na rys. 6.1.

[1]Matlab i Simulink były dostępne dzięki Wrocławskiemu Centrum Sieciowo-Superkomputerowemu.

Znaczne różnice pomiędzy projektowanymi i rzeczywistymi położeniami przegubów decydują o niewielkiej przydatności algorytmów kinematycznych pracujących w pętli otwartej, a co za tym idzie, sugerują wybór algorytmu ze sprzężeniem zwrotnym.

6.2.2. Sterowanie dynamiczne

Model manipulatora (nh, nh) jest opisany równaniami ograniczeń (3.14)

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = G\zeta$$

i dynamiką daną wzorem (3.15) jako

$$Q^*\dot{\zeta} + C^*\zeta + D^* = B^*\tau.$$

Zamiast algorytmu kinematycznego działającego w pętli otwartej zastosujmy do równań kinematyki manipulatora nieholonomicznego (3.14), podobnie jak do platformy, algorytm kinematyczny Pometa (5.50). Jako sterownik dynamiczny wybierzmy prawo sterowania

$$\tau = (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{u}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ u_r \end{pmatrix} + D^* - (K + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} \right\}, \qquad (6.15)$$

gdzie symbole są zdefiniowane w następujący sposób

$$\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ u - u_r \end{pmatrix}.$$

Widać, że proponowane prawo sterowania jest szczególnym przypadkiem algorytmu (6.5) zaproponowanego w rozdziale 6.1 do wysterowania do punktu manipulatora mobilnego (nh, h), w którym podsystem holonomiczny nie występuje. To oznacza, że dowód zbieżności algorytmu (6.5) będzie słuszny również w przypadku manipulatora podwójnie nieholonomicznego.

7. Śledzenie trajektorii manipulatorów mobilnych

Zadania związane ze śledzeniem trajektorii przez manipulator mobilny pojawiają się zawsze wtedy, gdy jest istotne nie tylko wykonanie ruchu wzdłuż określonego konturu, ale również zrealizowanie go z określoną prędkością [55]. Trajektoria zadana jest rozumiana jako krzywa (zazwyczaj klasy C^2, niekiedy gładka) parametryzowana czasem, zdefiniowana dla każdego z podsystemów w następujący sposób:

- Platforma mobilna ma przemieszczać się po podłożu wzdłuż zadanej krzywej $\xi_d(t)$ zależnej od czasu, zdefiniowanej w taki sposób, aby możliwe było wykonanie ruchu z jednoczesnym spełnieniem ograniczeń nieholonomicznych. Taka trajektoria jest nazywana *trajektorią dopuszczalną* dla systemu. W praktyce, trajektorie dopuszczalne muszą spełniać równania ograniczeń nieholonomicznych nałożonych na ruch układu.

- Efektor ramienia manipulacyjnego ma wykonywać ruch wzdłuż innej krzywej zależnej od czasu. Jeśli zadanie zdefiniowane dla efektora przekształci się przez odwrotne zadanie kinematyki, to równoważnie można stwierdzić, że manipulator ma osiągnąć zadaną trajektorię $q_d(t)$ w przestrzeni wewnętrznej, czyli przegubowej.

Śledzenie trajektorii jest realizowane w odmienny sposób, w zależności od budowy nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, dlatego należy je rozważyć oddzielnie dla poszczególnych typów wspomnianych obiektów.

7.1. Śledzenie trajektorii manipulatora mobilnego (nh, h)

Manipulator mobilny typu (nh, h) zawiera tylko jeden podsystem nieholonomiczny, mianowicie kołową platformę mobilną, opisaną równaniami kinematyki (3.12)

wyrażającymi brak poślizgów kół platformy podczas ruchu, oraz równaniami dynamiki (4.19) wyrażonymi we współrzędnych pomocniczych (η, q_r). W rozdziale 4 pokazano, że zadanie polegające na śledzeniu trajektorii wymaga zastosowania procedury całkowania wstecznego, a więc znalezienia sterowania kinematycznego rozwiązującego problem ograniczeń, a następnie użycia go jako sygnału referencyjnego do sterowania dynamiką obiektu. Jako sterowanie kinematyczne zostanie zastosowany algorytm linearyzacji dynamicznej, który może być użyty dla dowolnej klasy kołowych platform mobilnych z ograniczoną mobilnością. Z kolei sterowanie dynamiką zostanie przedstawione zarówno dla całkowitej znajomości modelu, jak i dla przypadku parametrycznej nieznajomości dynamiki obiektu.

7.1.1. Sterowanie kinematyczne

Rozważmy kinematykę kołowej platformy mobilnej wyrażoną w postaci ogólnej

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta = \sum_{i=1}^{m} g_i(q_m)\eta_i, \tag{7.1}$$

gdzie zmienne $q_m \in R^n$ to współrzędne uogólnione platformy, prędkości pomocnicze $\eta \in R^m$ spełniają rolę sterowań, zaś pola wektorowe g_i są gładkie. W rozdziale 5.1.2 pokazano, że jeśli układ nie jest całkowicie linearyzowalny przez zmianę bazy i statyczne sprzężenie zwrotne, to pełną linearyzację można uzyskać poprzez użycie bardziej ogólnego sterowania z dynamicznym sprzężeniem zwrotnym

$$\eta = a(q_m, \chi, \eta_r),$$

$$\dot{\chi} = b(q_m, \chi, \eta_r),$$

gdzie η_r jest pomocniczym wejściem do systemu. Aby otrzymać dynamiczne sprzężenie zwrotne, należy najpierw wybrać m odpowiednich wyjść linearyzujących

$$y_i = h_i(q_m), \qquad i = 1, ..., m. \tag{7.2}$$

Jako zmienne y_i mogą zostać wybrane współrzędne środka masy platformy oraz jej orientacja [8], [18].

Następnie do układu (7.1) z wyjściami (7.2) należy zastosować algorytm rozszerzenia dynamicznego, polegający na podłączeniu integratorów do pewnej kombinacji wejść oraz rozszerzeniu przestrzeni stanu o zmienne χ

$$q_e = \begin{pmatrix} q_m \\ \chi \end{pmatrix},$$

co umożliwia transformację rozszerzonego wektora stanu q_e do postaci

$$\zeta = \Psi(q_e)$$

za pomocą lokalnego dyfeomorfizmu. W rozdziale 5.1.2 pokazano, że dla każdej klasy kołowych platform mobilnych spełniona jest następująca zależność

$$y^{(r)} = P(q_e) + K_d(q_e)\eta_r. \tag{7.3}$$

Jeśli macierz $K_d(q_e)$ jest odwracalna, to przez zastosowanie sterowania

$$\eta_r = K_d^{-1}(q_e)(-P(q_e) + w) \tag{7.4}$$

z nowym wejściem do odsprzężonego układu liniowego w, równym

$$w_i = y_{id}^{(r_i)} - \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_i^j (y_i^{(j)} - y_{id}^{(j)}), \qquad i = 1, ..., m,$$

uzyskuje się następujące równanie

$$y_i^{(r_i)} - y_{id}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_i^j (y_i^{(j)} - y_{id}^{(j)}) = 0, \qquad i = 1, ..., m. \tag{7.5}$$

Parametry regulacji α_{ij} muszą być wybrane w taki sposób, aby bieguny układu liniowego, otrzymanego poprzez podłączenie do układu (7.3) sprzężenia zwrotnego (7.4), leżały w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Zdefiniujmy błąd śledzenia trajektorii jako

$$e_y = y - y_d = \begin{pmatrix} y_1 - y_{1d} \\ \vdots \\ y_m - y_{md} \end{pmatrix},$$

natomiast błąd śledzenia współrzędnych niech będzie równy

$$e_\zeta = \zeta - \zeta_d, \tag{7.6}$$

gdzie

$$\zeta = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ y_m \\ \vdots \\ y_m^{(r_m-1)} \end{pmatrix}, \qquad \zeta_d = \begin{pmatrix} y_{1d} \\ \vdots \\ y_{1d}^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ y_{md} \\ \vdots \\ y_{md}^{(r_m-1)} \end{pmatrix}.$$

Widać, że jeśli $e_\zeta \to 0$, to również $e_y \to 0$.

Obliczmy dynamikę błędu e_ζ dla odsprzężonego układu liniowego

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\zeta &= \begin{pmatrix} \dot{e}_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_1}^{(r_1)} \\ \vdots \\ \dot{e}_{y_m} \\ \vdots \\ e_{y_m}^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -\alpha_1^0 & -\alpha_1^1 & \dots & -\alpha_1^{r_1-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -\alpha_m^{(r_m-1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_1}^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ e_{y_m} \\ \vdots \\ e_{y_m}^{(r_m-1)} \end{pmatrix} \\
&= Ae_\zeta.
\end{aligned}$$

Aby pokazać zbieżność błędu e_ζ do zera, wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V(e_\zeta) = \frac{1}{2} e_\zeta^T P e_\zeta, \tag{7.7}$$

gdzie macierz $P = P^T > 0$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa

$$A^T P + PA = -M, \qquad M = M^T > 0. \tag{7.8}$$

Widać, że prawdziwe jest oszacowanie

$$\dot{V}(e_\zeta) = -e_\zeta^T M e_\zeta = -E(e_\zeta) \leq 0.$$

Z zasady niezmienniczości La Salle'a (tw. 5, rozdz. 11) wynika, że błąd e_ζ dąży asymptotycznie do zera. To kończy dowód zbieżności algorytmu.

7.1.2. Sterowanie dynamiczne

Dla manipulatora mobilnego typu (nh, h) rozważmy dodatkowo w pełni znane równanie dynamiki (4.19)

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + D^* = B^* \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}.$$

Dla powyższego równania wybierzmy następujący dysypatywny algorytm sterowania dynamiką

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} &= (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\text{ref}} \end{pmatrix} + D^* \right. \\
&- \left. (K + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned} \tag{7.9}$$

w którym człon $\kappa \in R^m$, umożliwiający kompensację pewnych niepożądanych wyrazów pojawiających się na poziomie kinematycznym, zostanie zdefiniowany później, parametry zaś regulacji są równe

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \qquad K_i = \mathrm{diag}\{k_i\}, \qquad k_i > 0, \qquad i = 1, 2.$$

Przypomnijmy ponadto, że symbol e_η oznacza wektor błędów prędkości pomocniczych, czyli różnic pomiędzy rzeczywistymi prędkościami η nieholonomicznej platformy a prędkościami projektowanymi w sterowniku kinematycznym η_r. Błędy e_η pojawiają się na poziomie kinematycznym po dołączeniu do opisu układu nieholonomicznego równań dynamiki. Należy je uwzględnić w sterowaniu kinematycznym w postaci zaburzenia powodującego modyfikację sterowania referencyjnego

$$\eta = \eta_r + e_\eta = K_d^{-1}(q_e)\left[-P(q_e) + w\right] + e_\eta. \tag{7.10}$$

Pojawienie się błedu e_η w sterowaniu kinematycznym powoduje wygenerowanie zakłócenia w dynamice funkcji wyjściowych y

$$y^{(r)} = P(q_e) + K_d(q_e)[\eta_r + e_\eta] = w + K_d(q_e)e_\eta,$$

a w konsekwencji również zmianę dynamiki błędu układu odsprzężonego do postaci

$$\dot{e}_\zeta = Ae_\zeta + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ K_{d1}(q_e)e_\eta \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ K_{dm}(q_e)e_\eta \end{pmatrix} = Ae_\zeta + \delta, \tag{7.11}$$

gdzie $K_{di}(q_e)$ jest i-tym wierszem macierzy odsprzęgania K_d.

7.1.3. Dowód zbieżności

Aby pokazać, że algorytm (7.9) sterowania dynamiką wraz ze zmodyfikowanym sterowaniem kinematycznym (7.10) zapewnia zbieżność błędów śledzenia do zera, wybierzmy następującą funkcję Lapunowa dla manipulatora mobilnego (nh, h) opisanego zarówno równaniami kinematyki, jak i dynamiki

$$W(e_\zeta, e_\eta, s) = V(e_\zeta) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} Q^* \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

gdzie $V(e_\zeta)$ jest funkcją Lapunowa (7.7) wyłącznie dla równań kinematyki.

Równania dynamiki układu (4.19) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (7.9) mają postać

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{s} \end{pmatrix} + (C^* + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{7.13}$$

Pochodna po czasie funkcji W wzdłuż trajektorii układu (7.13) oraz (7.11), czyli sterowania kinematycznego uwzględniającego oddziaływania dynamiki, jest równa

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{V}(e_\zeta) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} \dot{Q}^* \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} Q^* \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e_\zeta^T (A^T P + PA) e_\zeta + e_\zeta^T P \delta + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} \dot{Q}^* \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} \left\{ -(C^* + C_K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -e_\zeta^T M e_\zeta + e_\zeta^T P \delta - e_\eta^T K_1 e_\eta - s^T K_2 s + e_\eta^T \kappa. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Wyraz zawierający zakłócenie można wyrazić w równoważnej postaci jako

$$e_\zeta^T P \delta = e_\zeta^T \Upsilon e_\eta, \qquad \Upsilon = \sum_{j=1}^{m} P_{i,r_j} K_{dj}(q_e), \tag{7.15}$$

a więc z macierzą Υ równą sumie macierzy powstałych przez przemnożenie r_j-tych kolumn macierzy P przez j-te wiersze macierzy $K_d(q_e)$. Jeśli wyraz kompensujący zostanie wybrany jako

$$\kappa = -\Upsilon^T e_\zeta,$$

to $\dot{W}$ będzie spełniała oszacowanie

$$\dot{W} \le -e_\zeta^T M e_\zeta - e_\eta^T K_1 e_\eta - s^T K_2 s \le -\gamma W \le 0, \tag{7.16}$$

gdzie γ jest pewną liczbą dodatnią. Z II metody Lapunowa (tw. 6, rozdz. 11) można wywnioskować, że punkt

$$(e_\zeta, e_\eta, s) = (0, 0, 0)$$

jest eksponencjalnie stabilnym punktem równowagi. To kończy dowód zbieżności proponowanego algorytmu sterowania.

W przypadku parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki można zastosować adaptacyjną wersję sterowania dynamicznego. Załóżmy więc, że nie są znane parametry modelu dynamiki, takie jak masy ogniw, momenty bezwładności ogniw i platformy, itp. Wektor stałych nieznanych parametrów rzeczywistych oznaczymy jako a. Sterowanie na poziomie dynamicznym ma wówczas postać

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} &= (B^*(q))^{-1} \left\{ Q^*(q,\hat{a}) \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \ddot{q}_{\mathrm{ref}} \end{pmatrix} + C^*(q,z,\hat{a}) \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\mathrm{ref}} \end{pmatrix} + D^*(q,\hat{a}) \right. \\
&- \left. C_K(q,z,\hat{a}) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (B^*(q))^{-1} \left\{ Y(\dot{z}_r, z_r, e, z, q)\hat{a}(t) - K \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad (7.17)
\end{aligned}$$

gdzie

$$z = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}, \qquad z_r = \begin{pmatrix} \eta_r \\ \dot{q}_{\mathrm{ref}} \end{pmatrix}, \qquad e = z - z_r, \qquad \kappa = -\Upsilon^T e_\zeta,$$

$$e_r = q_r - q_{rd}, \qquad s = \dot{q}_r - \dot{q}_{\mathrm{ref}} = \dot{e}_r + \Lambda e_r, \qquad \Lambda = \Lambda^T > 0.$$

Zastosowanie sterowania (7.17) do modelu dynamiki (4.19) manipulatora mobilnego (nh, h) daje następujące równania układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{s} \end{pmatrix} = -(C^* + C_K + K) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + Y(\dot{z}_r, z_r, e, z, q)\tilde{a}(t) + \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

przy czym wyrażenie $\tilde{a}(t) = \hat{a}(t) - a$ jest wektorem błędów estymacji parametrów. Bieżące oszacowania nieznanych parametrów otrzymuje się z prawa adaptacji parametrów

$$\dot{\hat{a}}(t) = \dot{\tilde{a}}(t) = -\Gamma^{-1} Y^T(\dot{z}_r, z_r, e, z, q) \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix}, \qquad (7.19)$$

gdzie $\Gamma = \Gamma^T > 0$ jest stałą i symetryczną macierzą wzmocnień adaptacyjnych.

Aby dowieść zbieżności proponowanego adaptacyjnego prawa sterowania dynamiką, wybierzmy funkcję Lapunowa

$$W_a(e_\zeta, e_\eta, s, \tilde{a}) \quad = \quad V(e_\zeta) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & s^T \end{pmatrix} Q^* \begin{pmatrix} e_\eta \\ s \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\tilde{a}^T \Gamma \tilde{a}.$$

Pochodna po czasie funkcji W_a wzdłuż trajektorii układu (7.3), (4.19) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (7.10), (7.17), (7.19) jest równa

$$\dot{W}_a \leq -e_\zeta^T M e_\zeta - e_\eta^T K_1 e_\eta - s^T K_2 s \leq 0. \tag{7.20}$$

Ponieważ pochodna funkcji Lapunowa $\dot{W}_a$ nie zależy od wszystkich składowych błędów, więc wnioskowanie o stabilności należy przeprowadzić na podstawie tw. 7, rozdz. 11, sformułowanego przez Yoshizawę i La Salle'a. Z warunku (11.9) wynika, że punkt

$$(e_\zeta, e_\eta, s) = (0, 0, 0)$$

jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi. Należy wspomnieć, że podobnie jak większość algorytmów adaptacyjnych, proponowany algorytm nie zapewnia zbieżności błędów estymacji $\tilde{a}(t)$ do zera, a więc za pomocą prawa adaptacji (7.19) nie jest możliwe uzyskanie estymat zbieżnych do a – rzeczywistych wartości nieznanych parametrów. Pomimo to, na mocy zasady równoważnej pewności [80], cel sterowania, jakim było śledzenie trajektorii przez poszczególne podsystemy manipulatora mobilnego (nh, h), został osiągnięty. To kończy dowód zbieżności algorytmu adaptacyjnego.

7.1.4. Badania symulacyjne

Jako obiekty symulacji wzięto modele manipulatora RTR zamontowanego na platformie klasy $(2, 1)$ oraz na platformie klasy $(1, 2)$.

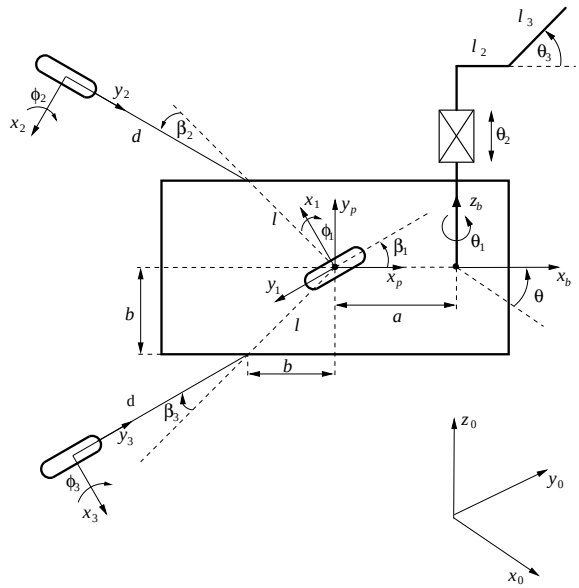
Model manipulatora RTR na platformie klasy $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$

Manipulator RTR zamontowany na platformie klasy $(2, 1)$ został przedstawiony na rysunku 7.1. Równanie kinematyki dla platformy ma postać

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta,$$

przy czym współrzędne platformy to

$$q_m^T = (x, y, \theta, \phi_1, \beta_1, \phi_2, \beta_2, \phi_3, \beta_3)^T,$$



Rys. 7.1. Manipulator typu RTR na platformie klasy $(2, 1)$
Fig. 7.1. Mobile RTR manipulator with platform of $(2, 1)$ class

macierz ograniczeń ma postać

$$G(q_m) = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\beta_1) & \cos(\theta+\beta_1) & 0 \\ \sin(\theta+\beta_1) & \sin(\theta+\beta_1) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{R}\left(\sin(\beta_2-\beta_1+\frac{\pi}{4})-\sin\beta_2\right) & \frac{1}{R}\sin(\beta_2-\beta_1+\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}b}+\frac{1}{d}\left(\cos(\beta_2-\beta_1+\frac{\pi}{4})-\cos\beta_2\right) & \frac{1}{d}\cos(\beta_2-\beta_1+\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\sin\beta_3+\sin(\beta_1+\beta_3+\frac{\pi}{4})\right) & \frac{1}{R}\sin(\beta_1+\beta_3+\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}b}+\frac{1}{d}\left(\cos(\beta_3+\beta_1+\frac{\pi}{4})+\cos\beta_3\right) & \frac{1}{d}\cos(\beta_3+\beta_1+\frac{\pi}{4}) & 0 \end{bmatrix},$$

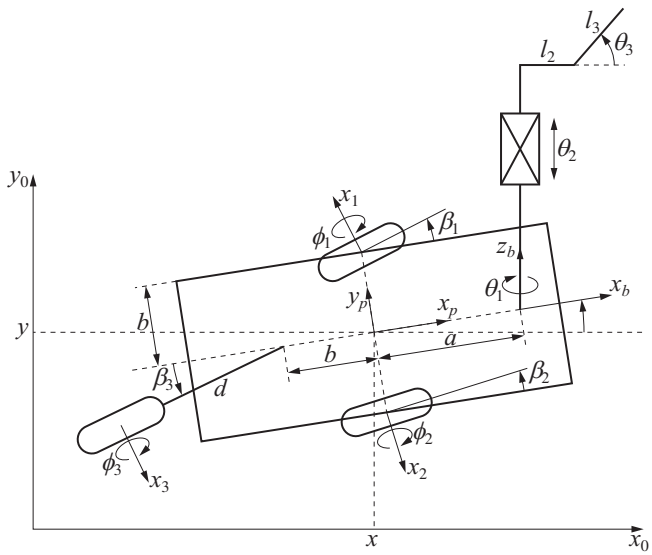
wektor prędkości pomocniczych jest natomiast równy

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta_1 \end{pmatrix},$$

gdzie η_1 jest prędkością liniową platformy, η_2 jest jej prędkością kątową, zaś ζ_1 jest prędkością zmian orientacji $\dot{\beta}_1$ dla koła sterowanego (kierownicy). Model dynamiki manipulatora RTR na platformie $(2,1)$, ze względu na obszerność, został pominięty, jednak można go znaleźć w pracy [45].

Model manipulatora RTR na platformie klasy $(\mathbf{1},\mathbf{2})$

Manipulator RTR zamontowany na platformie klasy $(1,2)$ został przedstawiony na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Manipulator typu RTR na platformie klasy $(1,2)$
Fig. 7.2. Mobile RTR manipulator with platform of $(1,2)$ class

Równania kinematyki dla platformy mają postać

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta,$$

przy czym współrzędne platformy to

$$q = (x, y, \theta, \phi_1, \beta_1, \phi_2, \beta_2, \phi_3, \beta_3),$$

macierz ograniczeń ma postać

$$G(q_m) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ G_{21} & 0 & 0 \\ G_{31} & 0 & 0 \\ G_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{61} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ G_{81} & 0 & 0 \\ G_{91} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z elementami zdefiniowanymi w następujący sposób

$$\begin{aligned}
G_{11} &= -b\left\{\cos(\theta+\beta_1)\sin\beta_2 + \cos(\theta+\beta_2)\sin\beta_1\right\}, \\
G_{21} &= -b\left\{\sin(\theta+\beta_1)\sin\beta_2 + \sin(\theta+\beta_2)\sin\beta_1\right\}, \\
G_{31} &= \sin(\beta_2-\beta_1), \\
G_{41} &= -\frac{2b}{R}\sin\beta_2, \\
G_{61} &= -\frac{2b}{R}\sin\beta_1, \\
G_{81} &= -\frac{b}{R}\left\{\sin\beta_1\cos(\beta_3-\beta_2) + \sin\beta_2\cos(\beta_3-\beta_1) + \sin\beta_3\sin(\beta_2-\beta_1)\right\}, \\
G_{91} &= \frac{b}{d}\left\{\sin\beta_1\sin(\beta_3-\beta_2) + \sin\beta_2\sin(\beta_3-\beta_1) - \cos\beta_3\sin(\beta_2-\beta_1)\right\} \\
&\quad -\sin(\beta_2-\beta_1),
\end{aligned}$$

wektor prędkości pomocniczych jest równy

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix}^T,$$

gdzie η_1 jest prędkością liniową platformy, ζ_1 to prędkość zmian orientacji pierwszego koła sterowanego, a ζ_2 to prędkość zmian orientacji drugiego koła sterowanego (drugiej kierownicy). Model dynamiki manipulatora RTR na platformie $(1, 2)$, podobnie jak dla manipulatora RTR na platformie $(2, 1)$, został pominięty, można go jednak znaleźć w pracy [45].

Śledzenie trajektorii zadanej

Celem symulacji było sprawdzenie zachowania rozważanych manipulatorów mobilnych podczas śledzenia następujących trajektorii zadanych dla obu podsystemów:

- okręgu o promieniu 10 m dla platformy

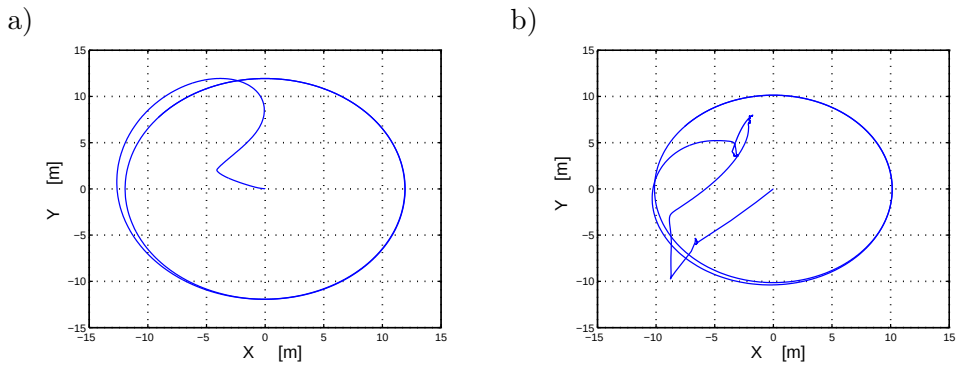
$$(x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)) = (10 \sin t, -10 \cos t, t)$$

- trajektorii dla przegubów manipulatora równej

$$(\theta_{1d}(t), \theta_{2d}(t), \theta_{3d}(t)) = (\sin t, 1, \cos t).$$

Wzmocnienia dla sterownika kinematycznego (5.17) były równe $\alpha_0 = 10$ oraz $\alpha_1 = 10$, wzmocnienia zaś sterownika dynamicznego wynosiły $K_1 = 10$, $K_2 = 10$ i $\Lambda = 10$. Porównywano przede wszystkim zbieżność algorytmu sterowania dla obu rodzajów manipulatorów mobilnych.

Trajektorie obu platform mobilnych na płaszczyźnie XY przedstawiono na rysunku 7.3, natomiast błędy śledzenia poszczególnych współrzędnych platform mobilnych pokazano na rysunkach 7.4–7.6. Z kolei błędy śledzenia dla przegubów manipulatora RTR przedstawiono na rysunkach 7.7–7.9.

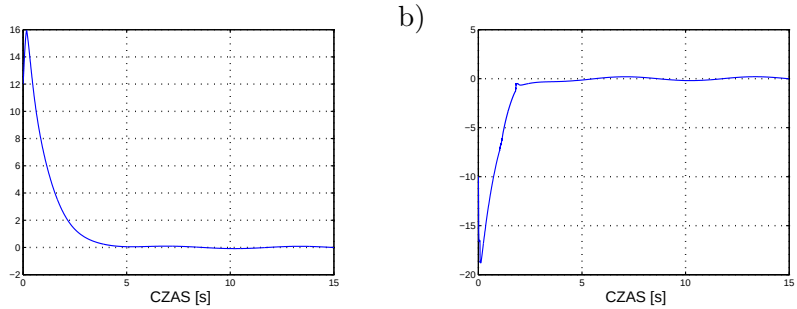


Rys. 7.3. Śledzenie trajektorii na płaszczyźnie XY dla środka masy platformy mobilnej: a) klasy $(2, 1)$, b) klasy $(1, 2)$
Fig. 7.3. Trajectory tracking on XY plane for the mass center of the mobile platforms coming from: a) $(2, 1)$ class, b) $(1, 2)$ class

7.2. Śledzenie trajektorii manipulatora mobilnego (nh, nh)

W manipulatorach mobilnych typu (nh, nh) ograniczenia nieholonomiczne są nałożone na ruch każdego z podsystemów składowych. Podobnie jak dla manipulatorów typu (nh, h), aby rozwiązać zadanie śledzenia trajektorii takiego obiektu,

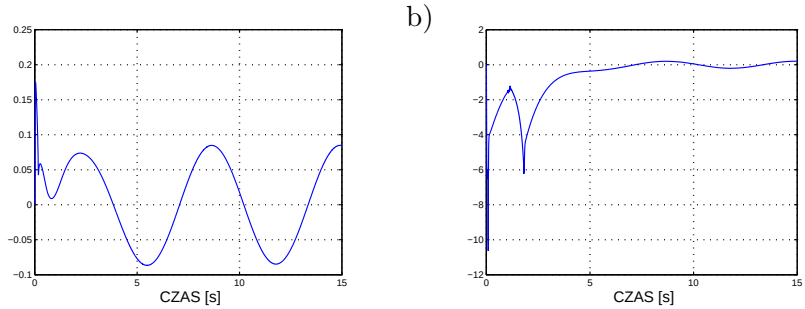
a) b)



Rys. 7.4. Błąd śledzenia $e_x = x - x_d$ dla platformy mobilnej: a) klasy $(2, 1)$, b) klasy $(1, 2)$

Fig. 7.4. Tracking errors $e_x = x - x_d$ for the mobile platforms coming from: a) $(2, 1)$ class, b) $(1, 2)$ class

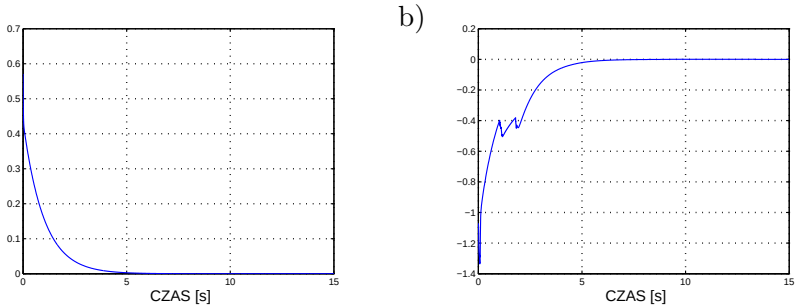
a) b)



Rys. 7.5. Błąd śledzenia $e_y = y - y_d$ dla platformy mobilnej: a) klasy $(2, 1)$, b) klasy $(1, 2)$

Fig. 7.5. Tracking errors $e_y = y - y_d$ for the mobile platforms coming from: a) $(2, 1)$ class, b) $(1, 2)$ class

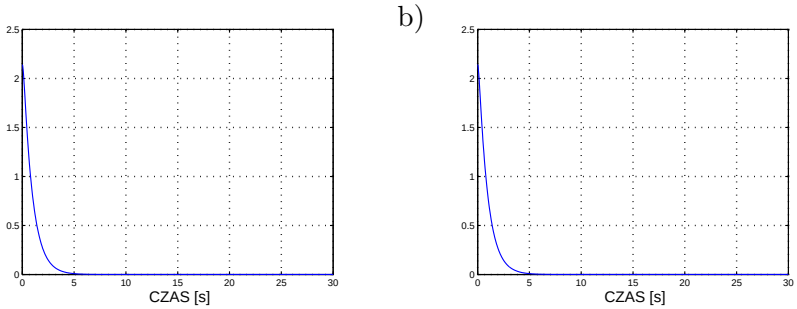
a) b)



Rys. 7.6. Błąd śledzenia $e_\theta = \theta - \theta_d$ dla platformy mobilnej: a) klasy $(2, 1)$, b) klasy $(1, 2)$

Fig. 7.6. Tracking errors $e_\theta = \theta - \theta_d$ for the mobile platforms coming from: a) $(2, 1)$ class, b) $(1, 2)$ class

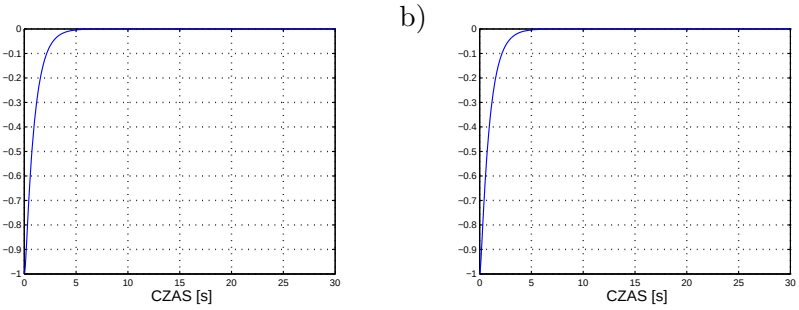
a) b)



Rys. 7.7. Błąd śledzenia $e_1 = q_1 - q_{1d}$ dla manipulatora RTR: a) na platformie klasy $(2,1)$, b) na platformie klasy $(1,2)$

Fig. 7.7. Tracking error $e_1 = q_1 - q_{1d}$ for the RTR manipulator: a) on the platform of $(2,1)$ class, b) on the platform of $(1,2)$ class

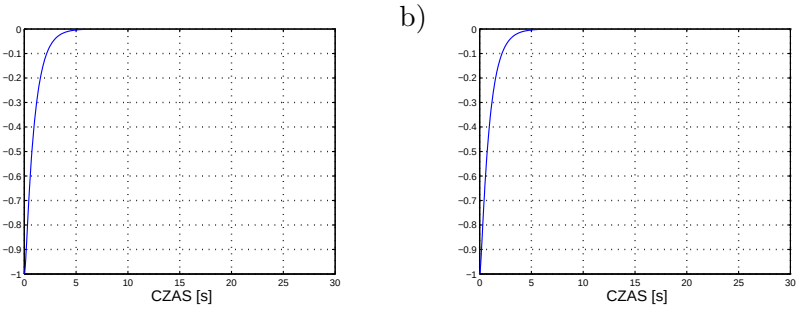
a) b)



Rys. 7.8. Błąd śledzenia $e_2 = q_2 - q_{2d}$ dla manipulatora RTR: a) na platformie klasy $(2,1)$, b) na platformie klasy $(1,2)$

Fig. 7.8. Tracking error $e_2 = q_2 - q_{2d}$ for the RTR manipulator: a) on the platform of $(2,1)$ class, b) on the platform of $(1,2)$ class

a) b)



Rys. 7.9. Błąd śledzenia $e_3 = q_3 - q_{3d}$ dla manipulatora RTR: a) na platformie klasy $(2,1)$, b) na platformie klasy $(1,2)$

Fig. 7.9. Tracking error $e_3 = q_3 - q_{3d}$ for the RTR manipulator: a) on the platform of $(2,1)$ class, b) on the platform of $(1,2)$ class

należy obliczyć sterowanie kinematyczne, a następnie wykorzystać otrzymane sterowanie referencyjne do zaprojektowania sterowania obiektem uwzględniającego również jego równania dynamiki.

7.2.1. Sterowanie kinematyczne

Jako sterowanie kinematyczne dla platformy mobilnej zostanie użyty algorytm linearyzacji dynamicznej, przedstawiony już w części opisującej sterowanie kinematyczne manipulatora mobilnego (nh, h). Natomiast dla nieholonomicznego manipulatora jako algorytm kinematyczny wybrano algorytm Jianga i Nijmeijera, przedstawiony w rozdziale 5.1. Warto podkreślić, że nie jest konieczne wybranie takiego samego algorytmu kinematycznego dla obu podsystemów nieholonomicznych, można również wybrać algorytmy gwarantujące realizację różnych zadań, na przykład sterowanie manipulatorem nieholonomicznym do punktu i jednocześnie śledzenie trajektorii platformy mobilnej.

Działanie algorytmu Jianga i Nijmeijera zilustrowano na przykładzie nieholonomicznego trójwahadła. Algorytm Jianga i Nijmeijera, przeznaczony dla układów łańcuchowych, zapewnia zbieżność do zera podstawowych błędów śledzenia trajektorii

$$x_e = z - z_d,$$

gdzie z_d to dopuszczalne trajektorie przegubów manipulatora z nieholonomicznym przeniesieniem napędu, a z to rzeczywiste położenia przegubów.

Wprowadźmy przekształcenie pomiędzy błędami śledzenia x_e a zmodyfikowanymi błędami śledzenia

$$\begin{aligned} e_1 &= x_{4e} - z_3 x_{1e}, \\ e_2 &= x_{3e} - z_2 x_{1e}, \\ e_3 &= x_{2e}, \\ e_4 &= x_{1e}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że asymptotyczna zbieżność błędów e do zera implikuje asymptotyczną zbieżność do zera błędów śledzenia x_e, a więc realizację śledzenia trajektorii.

Jeśli dla równań ograniczeń (5.4) zostanie wybrane sterowanie o postaci (5.8), to można pokazać, że pochodna po czasie funkcji Lapunowa (5.9)

$$V_4 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}(e_1 + e_3)^2 + \frac{\lambda}{2}e_4^2$$

spełnia warunek

$$\dot{V}_4 = -c_3(e_1 + e_3)^2 - c_4 e_4^2 \leq 0, \quad c_3, c_4 > 0. \tag{7.21}$$

Parametr regulacji $\lambda > 0$ definiuje lokalnie obszar zbieżności, a więc na mocy lematu Barbalata (lemat 1, rozdz. 11), jak pokazano w rozdziale 5.2, można wnioskować o lokalnej asymptotycznej zbieżności $e \to 0$.

7.2.2. Sterowanie dynamiczne

Rozważmy problem sterowania dynamiką manipulatora mobilnego typu (nh, nh). Zaproponujemy zmodyfikowaną wersję algorytmu podanego przez Oyę, Su i Katoha w pracy [71]. W tym celu rozważmy model dynamiki (3.15) podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + D^* = B^* \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z transformacją $z = h(q_r)$ daną równaniem (2.17), definiującą zmianę współrzędnych manipulatora do postaci łańcuchowej, model dynamiki (3.15) należy przekształcić w następujący sposób

$$Q_1(q_m, z) \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} + C_1(q_m, z, \dot{q}_m, \dot{z}) \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + D_1(q_m, z) = B_1(q_m, z)\tau, \tag{7.22}$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_1(q_m, z) &= Q^*(q)|_{q_m, q_r = h^{-1}(z)} \\ C_1(q_m, z, \dot{q}_m, \dot{z}) &= C^*(q)|_{q_m, q_r = h^{-1}(z), \dot{q}_r = \frac{\partial h^{-1}(z)}{\partial z}\dot{z}} \\ D_1(q_m, z) &= D^*(q)|_{q_m, q_r = h^{-1}(z)} \\ B_1(q_m, z) &= B^*(q)|_{q_m, q_r = h^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że sterowanie kinematyczne jest zaburzane przez sygnał błędów prędkości, które pochodzą z poziomu dynamiki i zakłócają postać sterowania kinematycznego. Sterowanie u_r, zdefiniowane według algorytmu Jianga i Nijmeijera równaniem (5.8), będzie sygnałem sterowania na poziomie kinematycznym w przypadku idealnym (tzn. bez uwzględnionej dynamiki), natomiast rzeczywiste sterowanie kinematyczne będzie sygnałem zaburzonym o postaci

$$u_1 = u_{1r} + e_{\eta 1} \qquad u_2 = u_{2r} + e_{\eta 2}. \tag{7.23}$$

Algorytm sterowania dla dynamiki gwarantujący śledzenie trajektorii dla obu podsystemów podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego ma postać

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix} &= (B_1)^{-1}\left\{Q_1\begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{u}_r \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} \eta_r \\ u_r \end{pmatrix} + D_1 - C_K\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix}\right. \\ &- \left. K\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \beta \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned} \tag{7.24}$$

gdzie η_r jest idealnym sygnałem sterowania kinematycznego (linearyzacji dynamicznej) dla nieholonomicznej platformy, zaś u_r to sterowanie kinematyczne dla nieholonomicznego manipulatora obliczane według algorytmu Jianga i Nijmeiera. Pozostałe symbole oznaczają

$$\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ u - u_r \end{pmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \quad K_i = \mathrm{diag}\{k_i\}, \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma e_4 - z_2 e_4(2e_1 + e_3) \\ -e_2 e_4 \end{pmatrix}, \qquad \kappa = -\Upsilon^T e_\zeta,$$

przy czym e_ζ jest błędem śledzenia współrzędnych dla platformy

$$e_\zeta = \zeta - \zeta_d, \qquad \zeta = \Psi(q_{me}), \qquad \zeta_d = \Psi(q_{med}),$$

zdefiniowanym równaniem (7.6) w algorytmie linearyzacji dynamicznej, Υ zaś jest dany równaniem (7.15).

7.2.3. Dowód zbieżności

Aby pokazać, że podwójnie nieholonomiczny manipulator mobilny śledzi zadaną trajektorię, wybierzmy następującą funkcję Lapunowa dla całego obiektu

$$W_1(e_\zeta, e_\eta, e_u, e, q_m, z) = V(e_\zeta) + V_4(e) + \frac{1}{2}\left(e_\eta^T \; e_u^T\right) Q_1(q_m, z)\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix}, \tag{7.25}$$

gdzie $V(e_\zeta)$ i $V_4(e)$ są dane odpowiednio wzorami (7.7) i (5.9).

Zanim rozpoczniemy szacowanie pochodnej funkcji Lapunowa W_1 wzdłuż trajektorii układu, sprawdźmy najpierw, jakim równaniem jest opisana dynamika (7.22) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (7.24)

$$Q_1\begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{e}_u \end{pmatrix} = -\left(C_1 + C_K\right)\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} - K\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \kappa \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{7.26}$$

Następnie sprawdźmy, jakim równaniem jest opisana dynamika błędów w zaburzonym algorytmie Jianga i Nijmeiejera. Przypomnijmy, że sterowania referencyjne obliczane są ze wzoru

$$\dot{V}_4 = -c_3\dot{\tilde{e}}_3^2 + e_4[(\gamma - z_2(2e_1 + e_3))(u_1 - u_{1d}) - e_2u_2].$$

W miejsce sterowań u_1 i u_2 wstawmy sygnały zakłócone dane wzorem (7.23)

$$\dot{V}_4 = -c_3\dot{\tilde{e}}_3^2 + e_4[(\gamma - z_2(2e_1 + e_3))(u_{1r} + e_{u1} - u_{1d}) - e_2(u_{2r} + e_{u2})],$$

gdzie sterowania referencyjne u_{1r} i u_{2r} są zdefiniowane równaniem (5.8). Pochodna funkcji Lapunowa jest wówczas równa

$$\dot{V}_4 = -c_3\dot{\tilde{e}}_3^2 - c_4\dot{e}_3^2 + e_4(\gamma - z_2(2e_1 + e_3))e_{u1} - e_4e_2e_{u2}. \tag{7.27}$$

Znając dynamikę rzeczywistych błędów na poziomie kinematycznym i dynamicznym, obliczmy pochodną po czasie $\dot{W}_1$ funkcji Lapunowa dla całego układu

$$\dot{W}_1 = \dot{V}(e_\zeta) + \dot{V}_4(e) + \begin{pmatrix} e_\eta^T & e_u^T \end{pmatrix}^T Q_1 \begin{pmatrix} \dot{e}_\eta \\ \dot{e}_u \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & e_u^T \end{pmatrix} \dot{Q}_1 \begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix}.$$

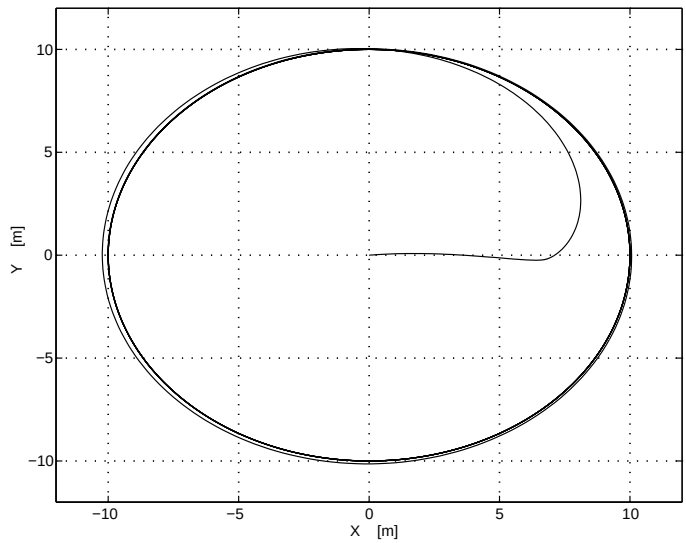
Po podstawieniu równania zamkniętej pętli na poziomie dynamicznym (7.26) i kinematycznym (7.14) i (7.27) do $\dot{W}_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\dot{W}_1 &= -e_\zeta^T M e_\zeta + e_\zeta^T \Upsilon e_\eta - c_3(e_1 + e_3)^2 - c_4e_4^2 + e_{u1}\beta_1 + e_{u2}\beta_2 \\
&\quad + \begin{pmatrix} e_\eta^T & e_u^T \end{pmatrix} \left\{ (-(C_1 + C_K)\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} - K\begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \kappa \\ \beta \end{pmatrix} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e_\eta^T & e_u^T \end{pmatrix} \dot{Q}_1 \begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} \\
&= -e_\zeta^T M e_\zeta - c_3(e_1 + e_3)^2 - c_4e_4^2 - e_\eta^T K_1 e_\eta - e_u^T K_2 e_u.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Na mocy lematu Barbalata można wywnioskować, że zarówno błędy śledzenia położenia e_i i e_ζ, jak i błędy prędkości e_η i e_u dążą do 0. To kończy dowód asymptotycznej zbieżności przedstawionego algorytmu sterowania.

7.2.4. Badania symulacyjne

Jako obiekty symulacji wzięto nieholonomiczny manipulator typu trójwahadło, przedstawiony na rys. 6.2, zamontowany na platformie klasy $(2, 0)$. Równania kinematyki platformy są dane wzorem (2.14), a manipulatora z nieholonomicznym



Rys. 7.10. Śledzenie trajektorii platformy mobilnej na płaszczyźnie XY
Fig. 7.10. Trajectory tracking of the mobile platform in XY plane

napędem to równania (2.10) oraz (2.11). Model dynamiki podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego typu trójwahadło na monocyklu został pominięty ze względu na obszerność, jednak można go znaleźć w pracy [56].

Celem symulacji było sprawdzenie zachowania rozważanego manipulatora mobilnego podczas śledzenia następujących trajektorii zadanych dla obu podsystemów:

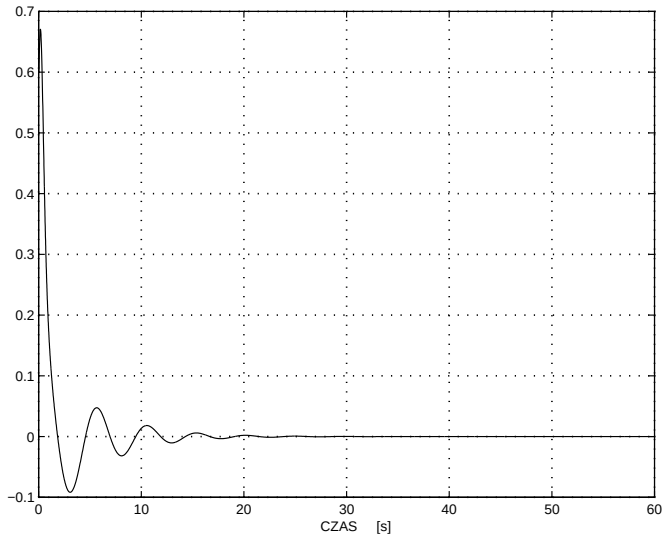
- okręgu o promieniu 10 m dla platformy

$$(x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)) = (10 \sin t, -10 \cos t, t),$$

- trajektorii dla przegubów manipulatora zdefiniowanej przez zadane prędkości dla napędów nieholonomicznych

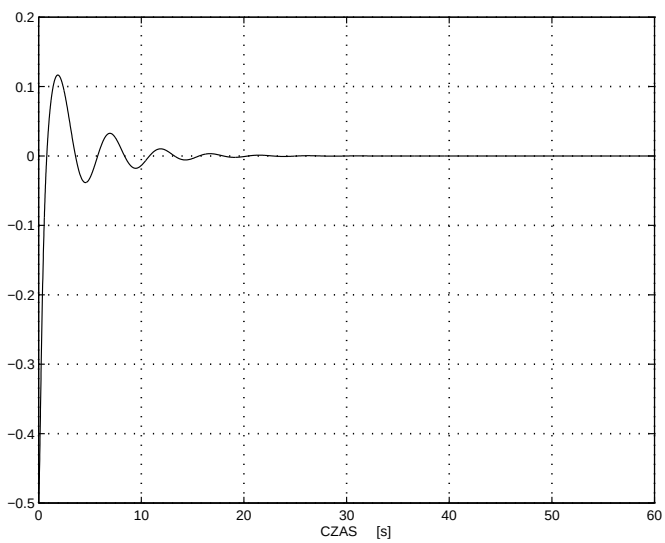
$$\begin{pmatrix} u_{1d}(t) \\ u_{2d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \sin t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wzmocnienia sterowników kinematycznych wynosiły $\gamma = 20$, $c_3 = 1$, $c_4 = 10$ dla algorytmu Jianga i Nijmeijera, $\alpha_0 = 10$ oraz $\alpha_1 = 10$ dla algorytmu linearyzacji dynamicznej oraz $K_1 = K_2 = 80$ dla algorytmu dynamicznego. Położenie początkowe manipulatora wynosiło $(\theta_1(0); \theta_2(0); \theta_3(0)) = (0,5; -0,5; 0)$, położenie zaś początkowe platformy $(x(0); y(0); \theta(0)) = (0; 0; 0,1)$.



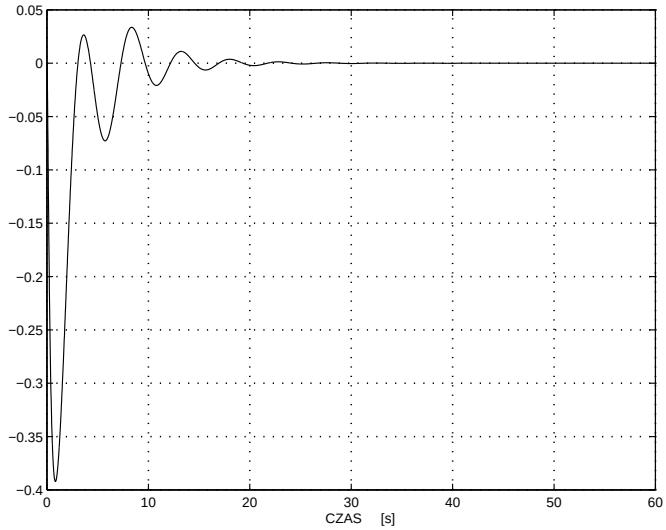
Rys. 7.11. Błąd śledzenia $e_1 = \theta_1(t) - \theta_{1d}(t)$ [rad] dla pierwszego przegubu nieholonomicznego trójwahadła

Fig. 7.11. Tracking error $e_1 = \theta_1(t) - \theta_{1d}(t)$ [rad] for joint 1 of the nonholonomic 3-pendulum



Rys. 7.12. Błąd śledzenia $e_2 = \theta_2(t) - \theta_{2d}(t)$ [rad] dla drugiego przegubu nieholonomicznego trójwahadła

Fig. 7.12. Tracking error $e_2 = \theta_2(t) - \theta_{2d}(t)$ [rad] for joint 2 of the nonholonomic 3-pendulum



Rys. 7.13. Błąd śledzenia $e_3 = \theta_3(t) - \theta_{3d}(t)$ [rad] dla trzeciego przegubu nieholonomicznego trójwahadła

Fig. 7.13. Tracking error $e_3 = \theta_3(t) - \theta_{3d}(t)$ [rad] for joint 3 of the nonholonomic 3-pendulum

Trajektorię platformy mobilnej na płaszczyźnie XY przedstawiono na rysunku 7.10, natomiast błędy śledzenia poszczególnych współrzędnych manipulatora nieholonomicznego pokazano na rysunkach 7.11–7.13.

8. Odsprzęganie we–wy manipulatorów mobilnych

W problematyce sterowania manipulatorem mobilnym, ze względu na jego specyficzną budowę (połączenie dwóch strukturalnie różnych podsystemów), wyróżnia się dwie grupy metod.

W pierwszym podejściu stosuje się dekompozycję zadania na podzadania definiowane dla każdego podsystemu z osobna. Przy takiej strategii jest niezbędne rozważenie i skompensowanie interakcji występujących pomiędzy platformą a manipulatorem [12], [29]. Z kolei druga strategia sterowania polega na wykorzystaniu jednolitego sterowania dla obu podsystemów równocześnie, przy czym planowanie ruchu i sterowanie może być rozważane zarówno na poziomie kinematycznym, jak i dynamicznym. Przykładem metody stosowanej w tym podejściu jest sterowanie oparte na pojęciu endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej [85], [86]. W podejściu drugim pewną redundancję występującą w ruchu manipulatora mobilnego można wykorzystać do uzyskania sterowania optymalnego, np. wykorzystując miary jakości [3] lub przez dodanie pewnych zadań, mających na celu rozwiązanie problemu redundancji [54].

Celem, który chcemy osiągnąć w tym rozdziale, jest śledzenie zadanej trajektorii, przy czym trajektoria zadana $y_d(t)$ jest zdefiniowana w przestrzeni roboczej (zewnętrznej), a nie w przestrzeni przegubowej, jak to było rozważane w rozdziale 7. Sformułujmy zatem następujący problem sterowania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych:

> Należy znaleźć takie prawo sterowania τ, aby efektor manipulatora mobilnego o całkowicie znanej dynamice śledził trajektorię zadaną, zdefiniowaną w przestrzeni zewnętrznej, w obecności ograniczeń nieholonomicznych.

Przyjmijmy ponadto założenie, że trajektoria zadana dla efektora $y_d(t)$ oraz jej pochodne po czasie do rzędu równego stopniowi względnemu są ciągłe i ograniczone.

8.1. Warunki regularności

Niniejszy rozdział prezentuje podejście do projektowania układów sterowania wykorzystujące odsprzęganie wejściowo–wyjściowe. Aby zaprojektować sterowanie odsprzęgające, zapewniające śledzenie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej, należy najpierw podać warunki gwarantujące istnienie takiego sterowania. W pracach [69], [30] podano tzw. warunki regularności, które definiują istnienie sterowania odsprzęgającego przekształcenie wejściowo–wyjściowe dla układów dynamicznych.

Rozważmy gładki, nieliniowy i afiniczny układ sterowania o postaci

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \qquad x \in R^n, \tag{8.1}$$

przy czym przekształcenie stan–wyjście jest równe

$$y = h(x), \qquad y \in R^w. \tag{8.2}$$

Dla takiego układu istnieje sterowanie odsprzęgające odwzorowanie wejście–wyjście, jeśli są spełnione następujące warunki:

(i) $w = m$ – liczba wejść jest równa liczbie wyjść,

(ii) istnieje wektor $r = (r_1, ..., r_m)$ zwany stopniem względnym wyjścia w punkcie x_0, gdzie skończone nieujemne liczby całkowite $r_1, ..., r_m$ są zwane stopniami względnymi poszczególnych wyjść, taki że

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x_0) = 0, \qquad \forall \quad 1 \le i, j \le m, \qquad k < r_i - 1, \tag{8.3}$$

(iii) macierz A wymiaru $m \times m$, równa

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & ... & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & ... & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix},$$

jest nieosobliwa w punkcie $x = x_0$,

gdzie $L_{g_i} h_j$ i $L_f h_j$ są pochodnymi Liego funkcji h_j odpowiednio wzdłuż pól wektorowych g_i i f.

Warunki te oznaczają, że pochodna rzędu r_i po czasie wyjścia y_i może być sterowana przez j-te wejście, tzn.

$$y^{(r)} = L_f^r h + Au. \tag{8.4}$$

Aby otrzymać system z odsprzężonym przekształceniem wejściowo–wyjściowym, należy użyć następującego sterowania

$$u = A^{-1}(-L_f^r h + v), \tag{8.5}$$

gdzie v jest wektorem nowych wejść do układu odsprzężonego. System (8.4) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (8.5) staje się wówczas liniowy i odsprzężony, tzn. zachodzi

$$y_i^{(r_i)} = v_i, \qquad i = 1, ..., m. \tag{8.6}$$

Sprzężenie zwrotne (8.5) pozwala na dekompozycję układu nieliniowego (8.1) na podukład liniowy (8.6), o wymiarze $r^* = \sum_{i=1}^m r_i$, który jest całkowicie odpowiedzialny za zachowanie wejściowo–wyjściowe układu, oraz pewien system nieliniowy o wymiarze $n - r^*$, którego zachowanie nie wpływa na wyjście układu nieliniowego (8.1). Taki system nieoddziałujący na wyjście nosi nazwę *dynamiki zerowej* [30].

Równania dynamiki zerowej uzyskuje się przez zastosowanie do układu nieliniowego (8.1) następującego sprzężenia zwrotnego

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

które dla $v = 0$ nie powoduje pojawienia się sygnału na wyjściach układu nieliniowego, czyli zapewnia spełnienie warunku

$$y_i(t) = 0 \quad \forall\, t, \qquad i = 1, ..., m.$$

Skoro $y_i(t) \equiv 0$, to dla wszystkich pochodnych po czasie funkcji wyjściowych musi zachodzić $y_i^{(j)} \equiv 0$, a więc także

$$y^{(r)} = L_f^r h + Au = L_f^r h + A\alpha + A\beta v = 0. \tag{8.7}$$

Z równania (8.7) wynika, że dla każdego wejścia istnieje sterowanie $\bar{u}$, jednoznacznie zdefiniowane [30], które dla $v = 0$ nie powoduje pojawienia się sygnałów na wyjściach

$$\bar{u} = -A^{-1} L_f^r h. \tag{8.8}$$

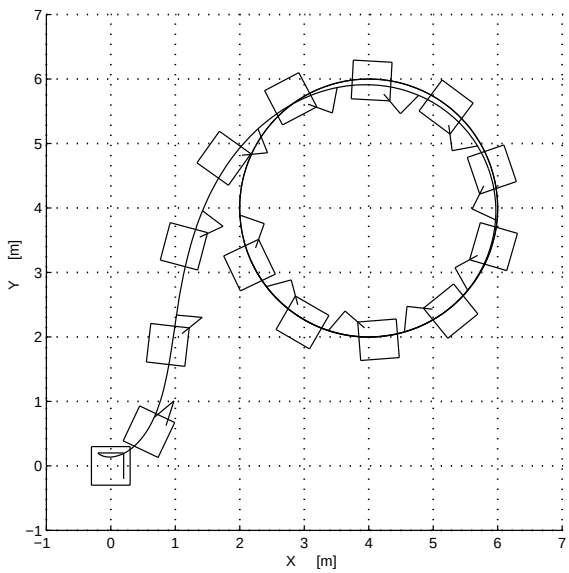
Jeśli $r^* < n$, to podsystem nieliniowy, opisany równaniami

$$\dot{\sigma} = f(\sigma) + \sum_{i=1}^m g_i(\sigma)\bar{u}_i, \qquad \sigma \in R^{n-r^*},$$

jest dynamiką zerową afinicznego układu sterowania (8.1). W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że dynamika zerowa jest stabilna, czyli zmienne nieobserwowalne σ są ograniczone.

8.2. Odsprzęganie we–wy manipulatora mobilnego (nh, h)

Autorami pierwszych prac dotyczących sterowania nieholonomicznym manipulatorem mobilnym dla zadań definiowanych w przestrzeni zewnętrznej byli Yamamoto i Yun. W pracach [91], [92] wspomniani autorzy ograniczyli się wyłącznie do zagadnienia sterowania manipulatorem mobilnym typu dwuwahadło z poziomo umieszczonym ramieniem manipulacyjnym. Taki manipulator mobilny mógł przemieszczać swój efektor tylko w przestrzeni 2D, a jego ruch w praktyce mógł być realizowany w bardzo ograniczonym zakresie – zadanie sformułowane dla całego manipulatora mobilnego było wykonywane tylko poprzez ruch platformy mobilnej, natomiast ramię manipulacyjne ustawiało się w stałej konfiguracji o maksymalnej manipulowalności. Przykładową posturę takiego manipulatora podczas śledzenia okręgu przedstawiono na rys. 8.2.



Rys. 8.1. Postura poziomego dwuwahadła zamontowanego na platformie klasy $(2, 0)$ podczas śledzenia trajektorii cyklicznej przez efektor

Fig. 8.1. Posture of the 2-pendulum mounted on the unicycle during tracking the desired cycle by the end-effector

Tak sformułowane zadanie nie umożliwiało manipulatorowi wykonywania ruchów względem platformy, z powodu ograniczenia przestrzeni zadaniowej do poziomej płaszczyzny nie pozwalało na pełne wykorzystanie technik sterowania z odsprzę-

ganiem. To stało się przyczyną poszukiwania innych algorytmów sterowania w przestrzeni zadaniowej, umożliwiających realizację bardziej złożonych sposobów przemieszczania poszczególnych podsystemów składowych nieholonomicznego manipulatora mobilnego. Podejście prezentowane przez Yamamoto i Yuna omówiono w rozdziale 8.2.1. W rozdziale 8.2.2 przedstawiono inną metodę wybierania funkcji wyjściowych, która pozwala na rozszerzenie możliwości poruszania się ramienia manipulatora względem platformy.

8.2.1. Algorytm Yamamoto i Yuna

Podejście zaproponowane przez Yamamoto i Yuna w [91] determinowało specyficzny wybór funkcji wyjścia dla manipulatora mobilnego, a mianowicie

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m) \in R^m \\ y_2(q_r) \in R^p \end{pmatrix}.$$

Funkcje wyjścia $y_1(q_m)$ to wektor wybranych współrzędnych globalnych efektora manipulatora mobilnego z unieruchomionym ramieniem manipulacyjnym, wyrażonych względem podstawowego układu odniesienia $\mathrm{X}_0\mathrm{Y}_0$, natomiast funkcje $y_2(q_r)$ opisują położenie i orientację manipulatora względem układu lokalnego $\mathrm{X}_p\mathrm{Y}_p$ stowarzyszonego ze środkiem masy platformy mobilnej. Wymiar wektora $y_1(q_m)$ jest równy liczbie sterowań η (prędkości pomocniczych) w nieholonomicznej platformie mobilnej, a wymiar wektora $y_2(q_r)$ jest równy liczbie napędów (stopni swobody, gdyż z założenia każdy stopień swobody ma swój bezpośredni napęd) w manipulatorze.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań przekształćmy równanie dynamiki (4.19) manipulatora mobilnego typu (nh, h)

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + D^* = B^* \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{pmatrix}$$

do następującej postaci

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} = (Q^*)^{-1} \left\{ -[C^* z + D^*] + B^* \tau \right\}, \tag{8.9}$$

gdzie $z^T = (\eta, \dot{q}_r)$ jest wektorem współrzędnych pomocniczych układu. Obliczmy następnie pochodną po czasie funkcji wyjściowych

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} \dot{q}_m \\ \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \dot{q}_r \end{pmatrix}.$$

Po wstawieniu do pierwszego równania wyrażenia opisującego ograniczenia nieholonomiczne (3.12) otrzymamy

$$\dot{y}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_m(q_m) & 0 \\ 0 & \Phi_r(q_r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \Phi(q_m, q_r) z.$$

Widać, że $\dot{y}$ nie zależy od sterowania τ. Obliczmy następnie drugą pochodną funkcji wyjściowych po czasie

$$\ddot{y} = \dot{\Phi} z + \Phi \dot{z}.$$

Po podstawieniu przekształconej dynamiki (8.9) manipulatora mobilnego (nh, h) do powyższego równania otrzymamy

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{\Phi} z + \Phi \left\{ -(Q^*)^{-1}[C^* z + D^*] + (Q^*)^{-1} B^* \tau \right\} \\ &= \dot{\Phi} z + \Phi F + \Phi H \tau, \end{aligned} \tag{8.10}$$

gdzie $F = -(Q^*)^{-1}[C^* z + D^*]$, a $H = (Q^*)^{-1} B^*$. Z warunków regularności (8.3) wynika, że sterowanie odsprzęgające (8.10) dla przekształcenia we–wy istnieje, jeśli macierz ΦH jest odwracalna.

8.2.2. Rozszerzone funkcje wyjściowe

Inaczej niż w algorytmie zaprezentowanym przez Yamamoto i Yuna, w pracach [53], [57] i [58] zaproponowano rozszerzenie pojęcia funkcji wyjściowej do ogólniejszej postaci, a mianowicie

$$y(q) = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

gdzie $y_1(q_m, q_r)$ jest wektorem wybranych współrzędnych globalnych efektora manipulatora mobilnego, zaś $y_2(q_r)$ reprezentuje współrzędne lokalne ramienia manipulacyjnego względem układu $X_p Y_p$ stowarzyszonego ze środkiem masy platformy mobilnej. Taki wybór funkcji wyjściowych y_1 umożliwia równoczesne sterowanie położeniem efektora i ruchem ramienia manipulatora względem platformy. To oznacza, że pozycją platformy można sterować pośrednio, poprzez kompensację jej dryfu, używając do tego celu funkcji wyjściowych y_2.

Współrzędne globalne efektora manipulatora mobilnego względem nieruchomego układu podstawowego $X_0 Y_0$ można obliczyć z transformacji

$$A_0^n = \mathrm{Trans}(X,x)\mathrm{Trans}(Y,y)\mathrm{Rot}(Z,\theta)A_p^n = \begin{bmatrix} R_0^n & T_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie A_p^n opisuje kinematykę manipulatora o n stopniach swobody wyrażoną względem środka masy platformy mobilnej, a więc w układzie lokalnym X_pY_p. Współrzędne globalne efektora zależą od zmiennych $q^T = (q_m, q_r)$ w następujący sposób

- położenie:

$$T_0^n = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{eff}} = f_x(q_m, q_r) \\ y_{\mathrm{eff}} = f_y(q_m, q_r) \\ z_{\mathrm{eff}} = f_z(q_r) \end{pmatrix},$$

- orientacja (kąty RPY):

$$R_0^n = \mathrm{Rot}(Z,\alpha)\mathrm{Rot}(Y,\beta)\mathrm{Rot}(X,\gamma) \to \begin{pmatrix} \alpha = f_\alpha(q_m, q_r) \\ \beta = f_\beta(q_r) \\ \gamma = f_\gamma(q_r) \end{pmatrix}.$$

Jako wyjściowe funkcje y_1, zależne od q_m, można wybrać tylko zmienne x_{eff}, y_{eff} lub α. Natomiast z_{eff} może zostać wybrana tylko jako wyjściowa funkcja y_2, ponieważ ta współrzędna jest zdefiniowana lokalnie i zależy wyłącznie od współrzędnych manipulatora q_r.

Aby otrzymać równanie opisujące odsprzęganie wejściowo–wyjściowe dla przypadku rozszerzonych wyjść, obliczmy pochodną po czasie funkcji wyjściowych (8.11)

$$\dot{y}(q) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial y_1}{\partial q_r}\dot{q}_r \\ \frac{\partial y_2}{\partial q_r}\dot{q}_r \end{pmatrix}.$$

Pochodna $\dot{y}$ dla manipulatora mobilnego typu (nh, h) jest równa

$$\dot{y}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m}G_1 & \frac{\partial y_1}{\partial q_r} \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix} z = \Phi(q)z. \tag{8.12}$$

Podobnie jak w algorytmie Yamamoto i Yuna, widać, że pierwsza pochodna po czasie funkcji wyjściowych nie zależy od sterowań. Po powtórnym zróżniczkowaniu funkcji y względem czasu otrzymujemy

$$\ddot{y} = \dot{\Phi}z + \Phi\dot{z}.$$

Po podstawieniu przekształconego równania dynamiki (8.9) manipulatora mobilnego (nh, h) do powyższego równania otrzymujemy wyrażenie

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{\Phi} z + \Phi \left\{ -(Q^*)^{-1}[C^* z + D^*] + (Q^*)^{-1} B^* \tau \right\} \\ &= \dot{\Phi} z + \Phi F + \Phi H \tau, \end{aligned} \tag{8.13}$$

które zależy od sygnału wejściowego τ. Jeśli użyjemy prawa sterowania

$$\tau = H^{-1} \Phi^{-1} \left(-\dot{\Phi} z - \Phi F + v \right), \tag{8.14}$$

gdzie v jest nowym wejściem do systemu, to otrzymamy odsprzężony układ liniowy o postaci

$$\ddot{y} = v.$$

Sterowanie odsprzęgające (8.14) może być zrealizowane w praktyce jedynie wtedy, gdy macierze Φ i H będą odwracalne. Macierz $H = (Q^*)^{-1} B^*$ jest zawsze odwracalna, ponieważ rzeczywista macierz bezwładności jest zawsze dodatnio określona [84], macierz zaś wejściowa, zależna od sposobu zamontowania silników, jest wybierana w taki sposób, aby istniała macierz $(B^*)^{-1}$ (jest to zawsze możliwe, patrz rozdz. 7.2 w pracy [8]).

Z kolei odwracalność macierzy Φ zależy od wyboru funkcji wyjściowych. W tym celu zapiszmy, czemu jest równa odwrotność macierzy odsprzęgania dla rozszerzonych funkcji wyjść

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_m^{-1} & -\Phi_m^{-1} \Phi_{mr} \Phi_r^{-1} \\ 0 & \Phi_r^{-1} \end{bmatrix}.$$

Macierz Φ dana równaniem (8.12) jest nieosobliwa, jeśli jej wyznacznik

$$\det \Phi = \det \Phi_m \det \Phi_r$$

jest różny od zera. Jest to równoważne następującym warunkom

$$\det \Phi_m \neq 0 \quad \text{i} \quad \det \Phi_r \neq 0. \tag{8.15}$$

Rozważmy najpierw odwracalność macierzy $\Phi_m(q)$. Macierz ta jest kwadratowa, ponieważ z warunków regularności (8.3) wiadomo, że liczba m wejść układu musi być równa liczbie w wyjść. Liczba współrzędnych manipulatora, które można będzie śledzić, zależy od klasy nieholonomicznej platformy mobilnej. I tak, jeśli platforma należy do klasy $(2, 0)$ lub $(1, 1)$, to jest możliwe śledzenie tylko dwóch współrzędnych globalnych manipulatora (kinematyka tych dwóch klas ma tylko dwa wejścia sterujące). Natomiast jeśli platforma z ograniczoną mobilnością

należy do klasy $(1,2)$ lub $(2,1)$, to można śledzić trzy współrzędne globalne efektora manipulatora mobilnego.

Macierz $\Phi_m(q)$ jest odwracalna, jeśli jej wyznacznik nie jest równy zeru. Ponieważ $\det \Phi_m$ jest funkcją współrzędnych manipulatora mobilnego, więc konieczne jest wykluczenie tych wartości zmiennych q, które prowadzą do osobliwej macierzy $\Phi_m(q)$.

Kolejna macierz, która musi być odwracalna, to macierz Φ_r. Łatwo zauważyć, że macierz Φ_r jest w rzeczywistości macierzą Jacobiego dla manipulatora. Ta macierz jest odwracalna, jeśli konfiguracje ramienia manipulacyjnego są nieosobliwe. Oznacza to, że w trakcie trwania procesu regulacji konfiguracje manipulatora muszą być dostatecznie oddalone od osobliwości.

8.2.3. Śledzenie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej przez manipulator mobilny (nh, h)

Rozważmy dynamikę manipulatora mobilnego (nh, h) daną równaniem (4.19)

$$Q^*\dot{z} + C^*z + D^* = B^*\tau$$

oraz równania ograniczeń nieholonomicznych (3.12) dla platformy

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta.$$

Zadaniem manipulatora mobilnego jest śledzenie wybranych współrzędnych (położenia i orientacji) efektora w m-wymiarowej przestrzeni zewnętrznej. Śledzone współrzędne są zadane funkcjami wyjściowymi

$$y = k(q),$$

gdzie $k : R^n \to R^m$ przy $m \leq n$ oznacza pewną m-wymiarową, nieliniową transformację współrzędnych uogólnionych manipulatora mobilnego. Błąd śledzenia trajektorii w przestrzeni zewnętrznej można zdefiniować jako $e = y - y_d$.

Zaproponujmy prawo sterowania

$$\tau = H^{-1}\Phi^{-1}[-\dot{\Phi}z - \Phi F + v], \tag{8.16}$$

przy czym symbole występujące w równaniu są definiowane jako

$$\begin{aligned} v &= \ddot{y}_d - K_d\dot{e} - K_p e, \qquad K_d = \operatorname{diag}\{K_{di}\} > 0, \quad K_p = \operatorname{diag}\{K_{pi}\} > 0, \\ F &= -(Q^*)^{-1}[C^*z + D^*], \\ H &= (Q^*)^{-1}B^*. \end{aligned}$$

Macierz Φ jest macierzą odsprzęgania daną równaniem (8.12) dla zadanych funkcji wyjściowych y. Równanie układu (4.19), (3.12) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (8.16) ma wówczas postać

$$\ddot{e}+K_d\dot{e}+K_pe=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{E}=\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix}=AE. \tag{8.17}$$

Dla diagonalnych macierzy regulacji K_d i K_p o dodatnich elementach liniowe równania błędów (8.17) są równaniami Hurwitza. Ze stabilności równań błędów wynika, że funkcja

$$V(e,\dot{e})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^T & \dot{e}^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}E^TPE \tag{8.18}$$

jest funkcją Lapunowa układu, a więc istnieje rozwiązanie $P=P^T>0$ równania Lapunowa

$$A^TP+PA=-M, \qquad M=M^T>0, \tag{8.19}$$

przy czym zadana macierz M odpowiada za szybkość zbiegania błędów E do zera. Widać, że prawdziwe jest oszacowanie

$$\dot{V}=-\frac{1}{2}E^TME\leq-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)(\| e \|^2+\| \dot{e} \|^2)=-W(e,\dot{e})\leq 0.$$

Z zasady niezmienniczości La Salle'a wynika, że $e(t)$ i $\dot{e}(t)$ dążą do zera. Ponadto można pokazać, że zbieżność ta jest eksponencjalna.

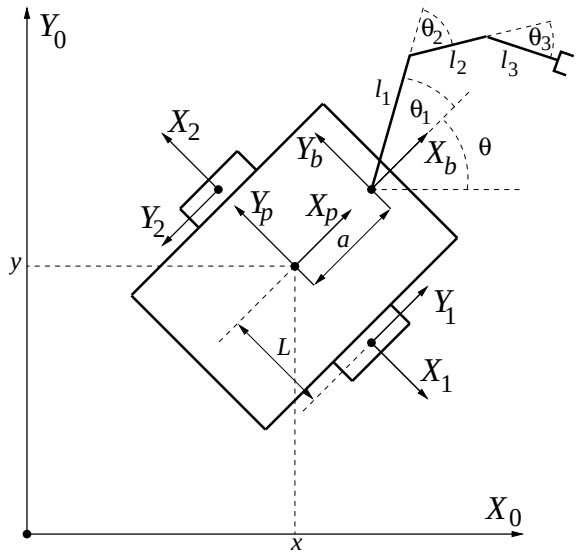
8.2.4. Badania symulacyjne

Aby zilustrować działanie sterowania odsprzęgającego dla rozszerzonych funkcji wyjścia, rozważmy zachowanie pionowego trójwahadła zamontowanego na platformie klasy $(2,0)$. Manipulator jest wyposażony w silniki dla poszczególnych stopni swobody, a więc jest holonomiczny. Obiekt badań symulacyjnych przedstawiono na rys. 8.2.

Ograniczenia nieholonomiczne dla platformy mają postać równania

$$\dot{q}_m=\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}=G_1(q_m)\eta. \tag{8.20}$$

Prędkości pomocnicze $\eta=(v,\omega)^T$ mają sens prędkości liniowej i prędkości kątowej platformy.



Rys. 8.2. Manipulator typu pionowe trójwahadło na platformie klasy $(2,0)$
Fig. 8.2. Vertical 3-pendulum mounted on the unicycle

Jako funkcje wyjściowe dla manipulatora mobilnego (nh, h) wybierzmy

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{eff}} \\ y_{\text{eff}} \\ z_{\text{eff}} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0(k_c + a) + x \\ s_0(k_c + a) + y \\ k_s \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

gdzie:

- $k_c = l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1$,
- $k_s = l_3 s_{123} + l_2 s_{12} + l_1 s_1$,
- $s_0 = \sin\theta$,
- $c_0 = \cos\theta$,
- $s_1 = \sin\theta_1$,
- $c_1 = \cos\theta_1$,
- $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$,

- $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$,
- $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$,
- $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

Taki wybór funkcji y prowadzi do następującej macierzy odsprzęgania

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix},$$

przy czym poszczególne podmacierze są równe

$$\begin{aligned}
\Phi_m &= \left[\frac{\partial y_1}{\partial q_m} G_1 \right] = \begin{bmatrix} c_0 & -s_0(k_c + a) \\ s_0 & c_0(k_c + a) \end{bmatrix}, \\
\Phi_r &= \left[\frac{\partial y_2}{\partial q_r} \right] = \begin{bmatrix} k_c & l_3 c_{123} + l_2 c_{12} & l_3 c_{123} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\Phi_{mr} &= \left[\frac{\partial y_1}{\partial q_r} \right] = \begin{bmatrix} -c_0 k_s & -c_0(l_3 s_{123} + l_2 s_{12}) & -c_0 l_3 s_{123} \\ -s_0 k_s & -s_0(l_3 s_{123} + l_2 s_{12}) & -s_0 l_3 s_{123} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

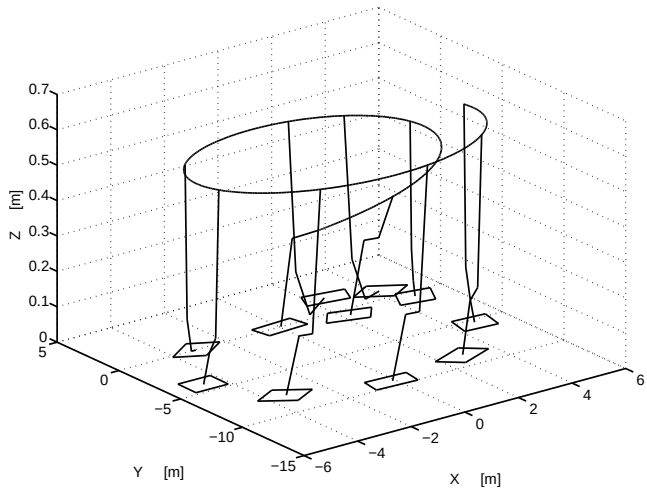
Warunki regularności (8.15) gwarantujące odwracalność macierzy odsprzęgania Φ to

$$\det \Phi_m = k_c + a \neq 0, \qquad \det \Phi_r = k_c \neq 0.$$

Pierwszy warunek oznacza, że efektor nie może przechodzić przez punkty leżące na osi łączącej koła platformy. Będzie to oznaczało, że ruch manipulatora musi być ograniczony do pewnego obszaru względem osi Y_p – do przedniej lub tylnej półprzestrzeni roboczej. Natomiast drugi warunek wyklucza przemieszczenie efektora nad osią Y_b układu stowarzyszonego z podstawą manipulatora.

Symulacje przeprowadzono dla zadanych funkcji wyjściowych i warunków początkowych równych

$$y_{d(nh,\,h)} = \begin{pmatrix} 5 \sin 2t \\ -5 \cos 2t \\ 0,6 \\ -0,375 \cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1,35 \\ 0,74 \\ 0,24 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



Rys. 8.3. Postura manipulatora mobilnego (nh, h) podczas śledzenia zadanej trajektorii efektora

Fig. 8.3. Posture of the mobile manipulator of (nh, h) type during tracking the desired trajectory of the end-effector

z parametrami regulacji równymi $K_d = K_p = 100$. Symulacje wykonano, korzystając z oprogramowania Matlab i pakietu Simulink dla czasu $T = 10$ s.

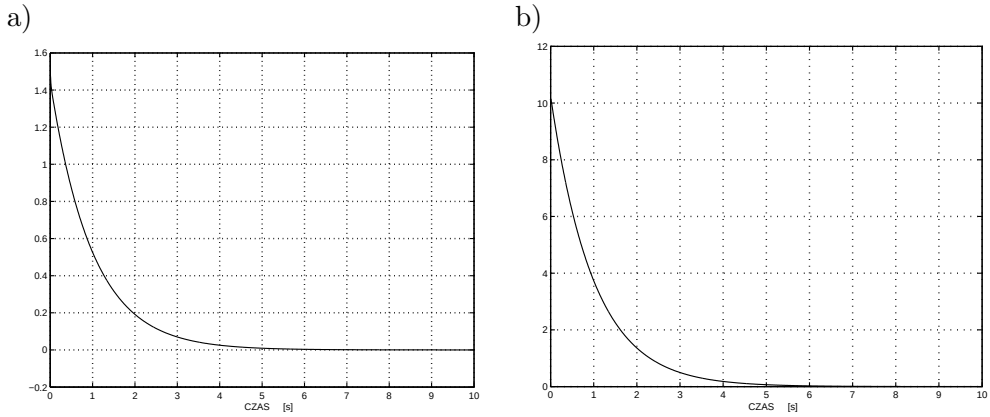
Posturę manipulatora mobilnego w przestrzeni 3D przedstawiono na rysunku 8.3, a błędy śledzenia poszczególnych funkcji wyjściowych pokazano na rysunkach 8.4–8.6. Z przedstawionych wykresów wynika, że wszystkie błędy śledzenia funkcji wyjściowych e_y dążą do zera.

8.3. Odsprzęganie we–wy manipulatora mobilnego (nh, nh)

W przypadku podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego zadanie śledzenia trajektorii w przestrzeni zewnętrznej nie było do tej pory rozważane w literaturze. Jednak warto się zastanowić, jakie możliwości będzie miał taki manipulator i jakie ograniczenia w realizowanych przez niego zadaniach pojawią się przy próbie odsprzęgania transformacji wejściowo–wyjściowej.

Manipulator mobilny typu (nh, nh) jest opisany równaniem kinematyki (3.14)

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = G\zeta, \qquad \zeta = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix},$$



Rys. 8.4. Błędy śledzenia funkcji wyjściowych manipulatora mobilnego (nh, h): a) błąd $y_{11} - y_{11d}$, b) błąd $y_{12} - y_{12d}$

Fig. 8.4. Trajectory tracking errors for the output functions of the (nh, h) mobile manipulator: a) error $y_{11} - y_{11d}$, b) error $y_{12} - y_{12d}$

gdzie ζ jest wektorem prędkości pomocniczych dla obu podsystemów oraz równaniem dynamiki (3.15)

$$Q^*\dot{\zeta} + C^*\zeta + D^* = B^*\tau.$$

Równanie to można przekształcić do następującej postaci

$$\dot{\zeta} = (Q^*)^{-1}\left\{-[C^*\zeta + D^*] + B^*\tau\right\}. \tag{8.21}$$

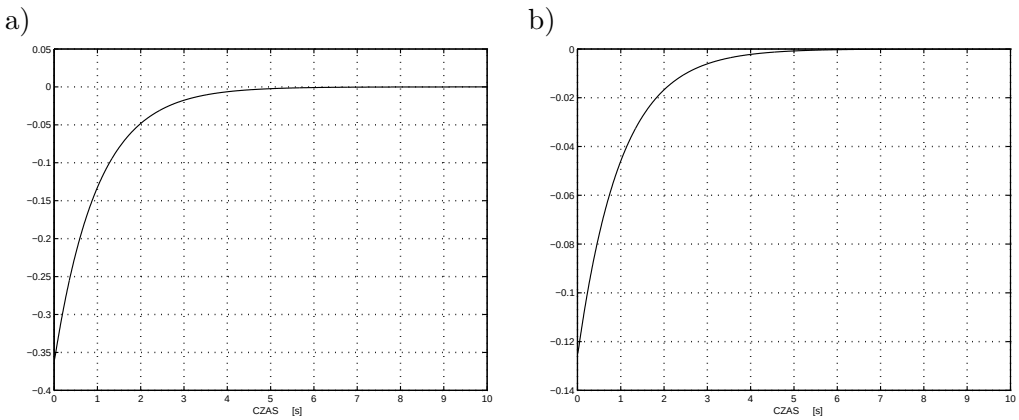
Podobnie jak dla manipulatora (nh, h), wybierzmy rozszerzone funkcje wyjściowe (8.11) jako

$$y = \begin{pmatrix} y_1(q_m, q_r) \\ y_2(q_r) \end{pmatrix} = k(q).$$

Wyjścia $y_1(q_m, q_r)$ opisują wybrane współrzędne globalne efektora podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego, natomiast $y_2(q_r)$ to jego współrzędne lokalne względem platformy.

Obliczmy $\dot{y}$ dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego (nh, nh)

$$\dot{y}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial q_m}G_1 & \frac{\partial y_1}{\partial q_r}G_2 \\ 0 & \frac{\partial y_2}{\partial q_r}G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix} \zeta = \Phi(q)\zeta. \tag{8.22}$$



Rys. 8.5. Błędy śledzenia funkcji wyjściowych manipulatora mobilnego (nh, h): a) błąd $y_{21} - y_{21d}$, b) błąd $y_{22} - y_{22d}$

Fig. 8.5. Trajectory tracking errors for the output functions of the (nh, h) mobile manipulator: a) error $y_{21} - y_{21d}$, b) error $y_{22} - y_{22d}$

Widać, że pierwsza pochodna po czasie funkcji wyjścia nie zależy od sterowania. Jeśli y zróżniczkujemy powtórnie względem czasu oraz podstawimy do $\ddot{y}$ przekształconą dynamikę (8.21), to otrzymamy

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{\Phi}\zeta + \Phi\left\{-(Q^*)^{-1}[C^*\zeta + D^*] + (Q^*)^{-1}B^*\tau\right\} \\ &= \dot{\Phi}\zeta + \Phi\bar{F} + \Phi\bar{H}\tau, \end{aligned} \tag{8.23}$$

gdzie $\bar{F} = -(Q^*)^{-1}[C^*\zeta + D^*]$, a $\bar{H} = (Q^*)^{-1}B^*$. Aby uzyskać liniową i odsprzężoną transformację wejściowo–wyjściową, należy użyć następującego sterowania odsprzęgającego

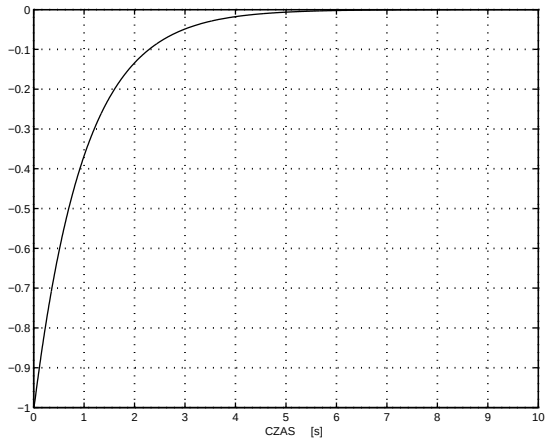
$$\tau = \bar{H}^{-1}\Phi^{-1}\left(-\dot{\Phi}\zeta - \Phi\bar{F} + v\right). \tag{8.24}$$

Tak jak dla manipulatora mobilnego (nh, h), najistotniejszą sprawą ze względu na sterowanie jest zagwarantowanie odwracalności macierzy Φ. Macierz ta będzie zależała od wyboru funkcji wyjściowych y.

8.3.1. Śledzenie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej przez manipulator mobilny (nh, nh)

Dynamika manipulatora mobilnego (nh, nh) jest dana równaniem (3.15)

$$Q^*\dot{\zeta} + C^*\zeta + D^* = B^*\tau,$$



Rys. 8.6. Błąd śledzenia $y_{23} - y_{23d}$ dla manipulatora mobilnego (nh, h)

Fig. 8.6. Trajectory tracking error $y_{23} - y_{23d}$ for the (nh, h) mobile manipulator

a ograniczenia nieholonomiczne mają postać

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = G\zeta.$$

Zadaniem manipulatora mobilnego jest śledzenie wybranych współrzędnych (położenia lub orientacji) efektora w przestrzeni m-wymiarowej, zdefiniowanych w następujący sposób

$$y(t) = k(q(t)).$$

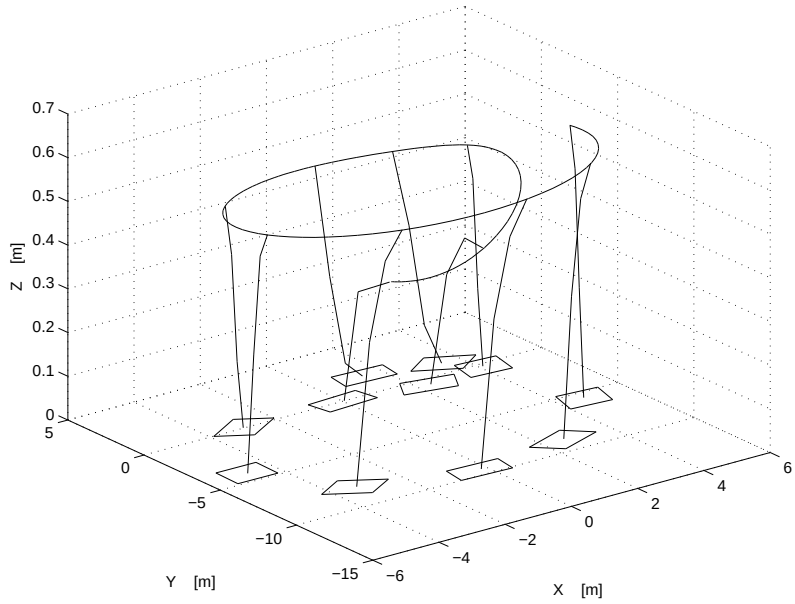
Aby uzyskać śledzenie zadanych funkcji wyjściowych $y_d(t)$, wybierzmy sterowanie

$$\tau = \bar{H}^{-1}\Phi^{-1}[-\dot{\Phi}\zeta - \Phi\bar{F} + v], \tag{8.25}$$

przy czym symbole oznaczają

$$\begin{aligned} e &= y - y_d, \\ v &= \ddot{y}_d - K_d\dot{e} - K_p e, \qquad K_d = \operatorname{diag}\{K_{di}\} > 0, \quad K_p = \operatorname{diag}\{K_{pi}\} > 0, \\ \bar{F} &= -(Q^*)^{-1}[C^*\zeta + D^*], \\ \bar{H} &= (Q^*)^{-1}B^*. \end{aligned}$$

Macierz Φ jest dana równaniem (8.22) dla wybranych funkcji wyjściowych y. Równania układu (3.15), (5.18) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (8.25)



Rys. 8.7. Postura manipulatora mobilnego (nh, nh) podczas śledzenia zadanej trajektorii efektora

Fig. 8.7. Posture of the mobile manipulator of (nh, nh) type during tracking the desired trajectory of the end-effector

mają wówczas postać

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{E} = \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix} = AE,$$

podobną do (8.17). Nastawy regulacji również zapewniają hurwitzowskość powyższego równania błędu. Na mocy tych samych argumentów, jakie przedstawiono w rozdziale 8.2.3, można więc pokazać zbieżność błędów śledzenia e do zera, czyli śledzenie trajektorii w przestrzeni roboczej (zewnętrznej).

8.3.2. Badania symulacyjne

Podobnie jak dla manipulatora (nh, h), działanie sterowania odsprzęgającego zostanie pokazane dla pionowego trójwahadła zamontowanego na platformie klasy $(2, 0)$. Tym razem przyjęto założenie, że manipulator jest wyposażony w nieholonomiczne sprzęgła konstrukcji Nakamury, Chunga i Sørdalena. Obiekt badań symulacyjnych pokazano na rys. 8.2.

Jako funkcje wyjściowe dla manipulatora mobilnego (nh, nh) wybierzmy

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{eff}} \\ y_{\text{eff}} \\ z_{\text{eff}} \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0(k_c + a) + x \\ s_0(k_c + a) + y \\ k_s \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Taki wybór prowadzi do następującej postaci macierzy odsprzęgania

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{mr} \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix},$$

przy czym podmacierze są równe

$$\begin{aligned}
\Phi_m &= \left[\tfrac{\partial y_1}{\partial q_m} G_1 \right] = \begin{bmatrix} c_0 & -s_0(k_c + a) \\ s_0 & c_0(k_c + a) \end{bmatrix}, \\
\Phi_r &= \left[\tfrac{\partial y_2}{\partial q_r} G_2 \right] = \begin{bmatrix} k_c & a_2 s_1(l_3 c_{123} + l_2 c_{12}) + a_3 s_2 c_1(l_3 c_{123}) \\ 0 & a_2 s_1 \end{bmatrix}, \\
\Phi_{mr} &= \left[\tfrac{\partial y_1}{\partial q_r} G_2 \right] = \begin{bmatrix} -c_0 k_s & -c_0[a_2 s_1(l_3 s_{123} + l_2 s_{12}) + a_3 s_2 c_1 l_3 s_{123}] \\ -s_0 k_s & -s_0[a_2 s_1(l_3 s_{123} + l_2 s_{12}) + a_3 s_2 c_1 l_3 s_{123}] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy Φ_m jest taki jak dla manipulatora mobilnego (nh, h). Z kolei wyznacznik macierzy Φ_r jest równy wyrażeniu

$$\det \Phi_r = a_2 s_1 k_c \neq 0.$$

Ponieważ współczynnik przełożenia a_2 w nieholonomicznym sprzęgle jest zawsze dodatni, oznacza to, że

$$\det \Phi_r \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 \neq 0, \pi, \quad \text{i} \quad k_c \neq 0.$$

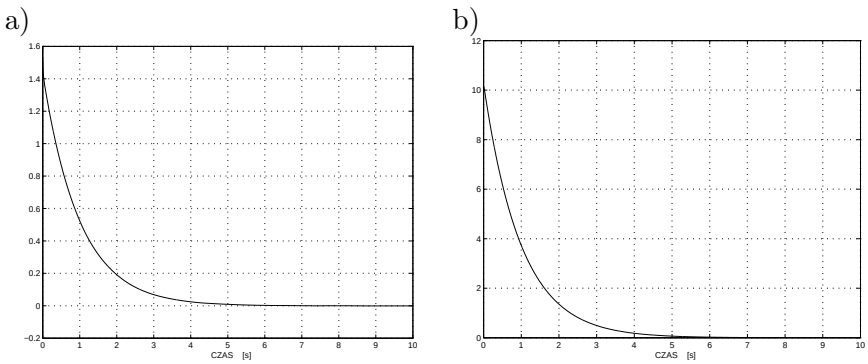
Z podanego warunku wynika, że w porównaniu z manipulatorem mobilnym (nh, h) ruch podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego jest bardziej ograniczony, ponieważ należy wykluczyć konfiguracje $\theta_1 = \{0, \pi\}$ dla pierwszego przegubu ramienia manipulacyjnego.

Trajektoria zadana oraz położenie początkowe zostały wybrane tak jak dla manipulatora mobilnego (nh, h)

$$y_{d(nh,nh)} = \begin{pmatrix} 5 \sin 2t \\ -5 \cos 2t \\ 0,6 \\ -0,375 \cos 2t \end{pmatrix} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1,35 \\ 0,74 \\ 0,24 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

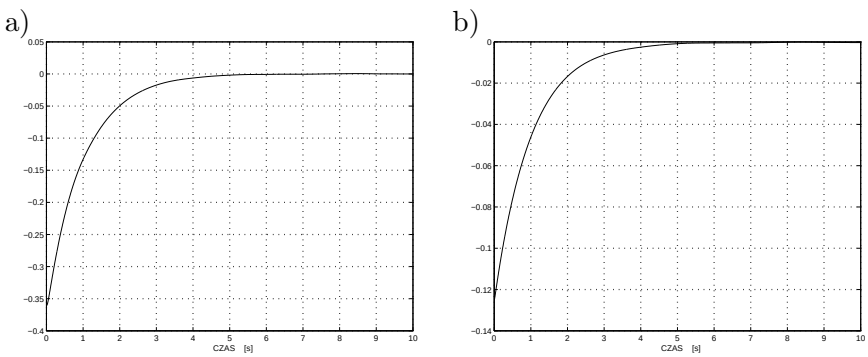
a parametry regulacji wybrano ponownie jako $K_d = K_p = 100$. Czas trwania symulacji wynosił $T = 10$ s. Posturę manipulatora mobilnego w przestrzeni 3D przedstawiono na rys. 8.7, natomiast błędy śledzenia poszczególnych funkcji wyjściowych pokazano na rysunkach 8.8–8.9.

Z przedstawionych wykresów błędów śledzenia funkcji wyjściowych wynika, że również dla manipulatora mobilnego (nh, nh) błędy $e = y - y_d$ dążą do 0.



Rys. 8.8. Błędy śledzenia funkcji wyjściowych manipulatora mobilnego (nh, nh): a) błąd $y_{11} - y_{11d}$, b) błąd $y_{12} - y_{12d}$

Fig. 8.8. Trajectory tracking errors for the output functions of the (nh, nh) mobile manipulator: a) error $y_{11} - y_{11d}$, b) error $y_{12} - y_{12d}$



Rys. 8.9. Błędy śledzenia funkcji wyjściowych manipulatora mobilnego (nh, nh): a) błąd $y_{21} - y_{21d}$, b) błąd $y_{22} - y_{22d}$

Fig. 8.9. Trajectory tracking errors for the output functions of the (nh, nh) mobile manipulator: a) error $y_{21} - y_{21d}$, b) error $y_{22} - y_{22d}$

9. Śledzenie ścieżki manipulatorów mobilnych

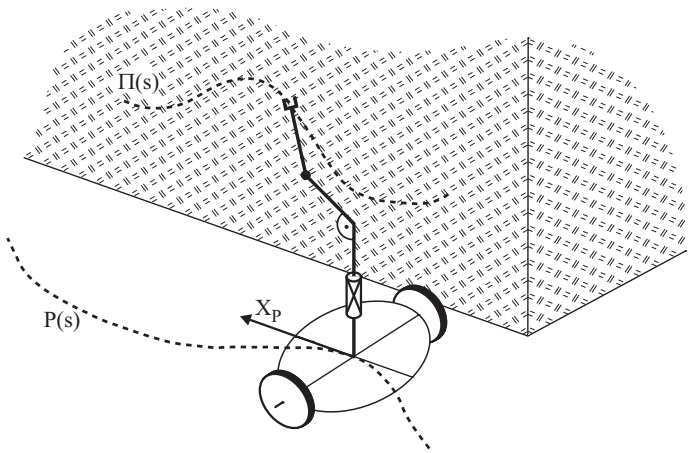
Ścieżka, którą manipulator mobilny ma śledzić, jest pewną krzywą geometryczną w przestrzeni. W odróżnieniu od trajektorii, która zależy od czasu, ścieżka jest parametryzowana odległością krzywoliniową punktu od ustalonego punktu początkowego. Problematyka poruszania się manipulatora mobilnego wzdłuż zadanej ścieżki pojawiająca się w literaturze przedmiotu jest formułowana w różny sposób. W wielu pracach, np. [85], [86], ścieżka jest definiowana dla efektora zamontowanego na platformie mobilnej. Takie podejście oznacza, że ruch wzdłuż krzywej może być zrealizowany przez dowolny podsystem manipulatora mobilnego, bez konieczności dekompozycji zadania na zadania dla poszczególnych podukładów. Jednak wadą proponowanej metody jest nie tylko bardzo skomplikowana postać sterowania, ale także bardzo wąska klasa zadań, jakie mogą być dzięki niej rozwiązane – metoda może być zastosowana jedynie do rozwiązania zadań z ustalonym horyzontem czasowym.

Inne podejście do zagadnienia śledzenia ścieżki przez manipulatory mobilne jest prezentowane w tym rozdziale, co ilustruje rys. 9.1. Zadanie, które chcemy rozwiązać, może być zdekomponowane na dwie niezależnie realizowane części:

- efektor (ostatnie ogniwo części manipulacyjnej) ma podążać wzdłuż zadanej krzywej geometrycznej $\Pi(s)$ opisanej względem podstawy manipulatora, a więc względem platformy,

- platforma ma się poruszać wzdłuż pewnej krzywej płaskiej $P(s)$ na podłożu.

Dekompozycja zadania umożliwia użycie manipulatora mobilnego na przykład do podążania wzdłuż pewnych znaczników (linii) zaznaczonych na podłożu i jednoczesne malowanie pewnych powierzchni, rozładowywanie przewożonych ładunków w trakcie przemieszczania się itp.



Rys. 9.1. Zadanie śledzenia ścieżki manipulatora mobilnego: $P(s)$ – zadana ścieżka platformy, $\Pi(s)$ – zadana ścieżka manipulatora

Fig. 9.1. Desired path of mobile manipulator: $P(s)$ – desired path of the platform, $\Pi(s)$ – desired path of the manipulator

Śledzenie ścieżki jest realizowane w odmienny sposób, w zależności od budowy nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, dlatego należy je rozważyć oddzielnie dla manipulatorów mobilnych typu (nh, h) i (nh, nh).

9.1. Śledzenie ścieżki manipulatora mobilnego (nh, h)

Zachowanie manipulatora mobilnego można opisać za pomocą współrzędnych $q^T = (q_m^T, q_r^T)$, gdzie q_m to wektor współrzędnych platformy, a $q_r \in R^p$ to wektor współrzędnych przegubowych manipulatora pokładowego

$$q_r = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)^T. \tag{9.1}$$

Manipulator mobilny typu (nh, h) jest opisany równaniami dynamiki (3.15) wyrażonymi we współrzędnych pomocniczych (η, q_r)

$$Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{q}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} + D^* = B^* \tau,$$

a także równaniami ograniczeń nieholonomicznych (3.12)

$$\dot{q}_m = G(q_m)\eta,$$

które są nałożone jedynie na ruch podsystemu nieholonomicznego, czyli kołowej platformy mobilnej.

Jak wspomniano na początku rozdziału, śledzenie ścieżki będzie zdekomponowane na osobne zadania dla obu podsystemów manipulatora mobilnego. Ze względu na różne wielkości przestrzeni roboczej każdego z podsystemów, w przypadku holonomicznego manipulatora śledzenie ścieżki można zakończyć zatrzymaniem efektora w pewnym punkcie końcowym, natomiast platforma powinna poruszać się w sposób ciągły wzdłuż zadanej krzywej na podłożu.

Cel sterowania można wówczas sformułować następująco:

> Należy znaleźć sterowanie τ oraz parametryzację ścieżki $s = s(t)$ dla ramienia manipulacyjnego, które zagwarantują realizację zadań dla każdego z podsystemów z osobna, co spowoduje zbieżność błędów śledzenia do zera, w obecności ograniczeń nieholonomicznych.

Aby zaprojektować sterowanie śledzące ścieżkę dla manipulatora mobilnego, należy przypomnieć, że pełny opis manipulatora (nh, h) jest układem kaskadowym zawierającym zarówno równania ograniczeń nieholonomicznych, jak i równania dynamiki. Z tego względu sterowanie musi być podzielone na dwa układy pracujące równolegle: sterowanie kinematyczne i sterowanie dynamiczne.

9.1.1. Sterowanie kinematyczne

Aby zrealizować śledzenie ścieżki przez platformę, należy opisać ruch podsystemu nieholonomicznego względem zadanej krzywej płaskiej $P(s)$. W rozdziale 4.2.3 pokazano, jak za pomocą parametryzacji Freneta (l, s) (l jest odległością układu stowarzyszonego ze środkiem masy platformy od zadanej ścieżki, s zaś jest bieżącą długością ścieżki, czyli odległością krzywoliniową od ustalonego punktu na ścieżce), można przekształcić prędkości kartezjańskie lokalnego układu platformy do prędkości krzywoliniowych

$$\dot{l} = (-\sin\theta_r \quad \cos\theta_r)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \qquad \dot{s} = \frac{(\cos\theta_r \quad \sin\theta_r)}{1 \mp c(s)l}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

gdzie $\dot{x}$ i $\dot{y}$ są wyrażone za pomocą ograniczeń nieholonomicznych, $c(s)$ jest krzywizną ścieżki, a θ_r jest zadaną orientacją układu Freneta na ścieżce.

Postura platformy mobilnej jest wyrażona nie tylko poprzez położenie jej środka masy, ale również poprzez jej orientację θ. Z tego wynika, że należy zdefiniować dodatkowy błąd śledzenia orientacji równy

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_r. \tag{9.3}$$

Zadana orientacja platformy θ_r spełnia zależność (4.18)

$$\dot{\theta}_r = \pm c(s)\dot{s}.$$

Współrzędne Freneta oraz błąd orientacji, czyli zmienne

$$\xi^T = (l, \tilde{\theta}, s) \tag{9.4}$$

opisują wówczas błędy śledzenia ścieżki dla platformy mobilnej z ograniczoną mobilnością. Warto również przypomnieć, że parametryzacja Freneta (l, s) jest słuszna jedynie lokalnie, w pobliżu rozważanej ścieżki.

W dotychczasowych pracach do rozwiązania zadania śledzenia ścieżki przez platformę stosowano algorytm Pometa (5.50). Zaletą wspomnianego algorytmu jest możliwość zastosowania do dowolnej klasy nieholonomicznych platform mobilnych, co pokazano w [51]. Jednak algorytm Pometa cechuje się powolną zbieżnością, przełączaniem kierunków ruchu i praktycznie może być stosowany tylko w procesie zbliżania się do ścieżki. Jeżeli jednak jest wymagany algorytm sterowania zapewniający nie tylko zbieżność do ścieżki, ale również przemieszczanie się wzdłuż niej, to należy użyć algorytmu przeznaczonego dla określonej klasy platform mobilnych. Dla platform klasy $(2, 0)$ takim algorytmem jest algorytm Samsona (5.62). W dalszej części rozdziału ograniczymy rozważania do platform należących do tej właśnie klasy.

Spośród błędów śledzenia ścieżki ξ można rozważać jedynie l i $\tilde{\theta}$, natomiast równanie różniczkowe na $\dot{s}$ nie musi być bezpośrednio sterowane, ponieważ przy asymptotycznym śledzeniu nie jest wymagane, aby platforma wjechała na ścieżkę począwszy od punktu początkowego, a jedynie zbliżała się do niej coraz bardziej. Równanie różniczkowe na $\dot{s}$ jest jednak obliczane w trakcie trwania regulacji, ponieważ błąd orientacji $\tilde{\theta}$ zależy od odległości krzywoliniowej s bieżącego punktu od początku ścieżki. Zgodnie z wzorami (9.2) i (4.18), współrzędne Freneta dla platformy $(2, 0)$ opisanej ograniczeniami nieholonomicznymi

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

można zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{l} &= v \sin\tilde{\theta}, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_r = \omega - c(s)\dot{s} = \omega - v\cos\tilde{\theta}\frac{c(s)}{1 \mp c(s)l}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Dla układu (9.6) sterowanie kinematyczne Samsona (5.62) równe

$$\begin{aligned} v_r &= \text{const}, \\ \omega_r &= -k_2 l v_r \frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} - k_3\tilde{\theta} + v_r \cos\tilde{\theta}\frac{c(s)}{1 \mp c(s)l} \end{aligned}$$

gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia ścieżki $(l, \tilde{\theta})$ do zera, co pokazano w rozdziale 5.3.1.

Z kolei zadana ścieżka dla manipulatora może być rozumiana jako pewna krzywa geometryczna $\Pi(s)$, którą efektor ma osiągnąć i wzdłuż której ma realizować swój ruch. Taka ścieżka musi być zdefiniowana w lokalnej przestrzeni R^ρ wyrażonej względem układu stowarzyszonego z platformą $X_bY_bZ_b$, przy czym $\rho \leq p$ (p – liczba stopni swobody manipulatora). Celem sterowania jest wymuszenie ruchu efektora wzdłuż ścieżki $\Pi(s)$ z błędami śledzenia dążącymi do zera, czyli

$$e_p = k(q_r) - \Pi(s) \quad \longrightarrow \quad 0. \tag{9.7}$$

Wektor $k(q_r)$, będący kinematyką manipulatora, zazwyczaj opisuje lokalne współrzędne położenia chwytaka, jednak niekiedy może zawierać również współrzędne orientacji, na przykład wtedy, gdy zachodzi pewien związek pomiędzy orientacją chwytaka i jego odległością krzywoliniową s (parametrem ścieżki) liczoną wzdłuż ścieżki. W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że przekształcenie $\frac{\partial k}{\partial q_r} = J$, czyli jakobian analityczny manipulatora, zawsze jest pełnego rzędu ρ (manipulator unika konfiguracji osobliwych). Podobnie jak w parametryzacji Freneta dla platformy, s jest bieżącym parametrem opisującym ścieżkę $\Pi(s)$ (na ogół jest odległością krzywoliniową od zadanego punktu początkowego), przy czym nie jest to ten sam parametr, gdyż ścieżki P i Π są definiowane dla różnych podsystemów.

Tak jak u Galickiego [26], gdzie została sformułowana idea śledzenia ścieżki dla manipulatorów stacjonarnych, załóżmy, że w chwili początkowej, dla której zachodzi $s(0) = 0$, efektor manipulatora znajduje się na ścieżce

$$k(q_r(0)) = \Pi(0),$$

a w chwili początkowej i końcowej efektor nie porusza się

$$\dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0, \qquad T \longrightarrow \infty.$$

Takie sformułowanie zadania oznacza, że manipulator powinien przemieszczać się wzdłuż ścieżki, a nie zbliżać się do niej asymptotycznie. Ponadto, ze względu na ograniczoną przestrzeń roboczą manipulatora, długość ścieżki $\Pi(s)$ jest ograniczona pewną wartością $s_{\max}$. To oznacza, że błędy śledzenia ścieżki powinny

obejmować nie tylko błędy śledzenia współrzędnych kinematyki e_p, ale również krzywoliniową odległość od końca ścieżki, czyli błąd odległości równy

$$e_s = s - s_{\max}.$$

Aby zapewnić śledzenie ścieżki przez manipulator, należy zdefiniować sposób parametryzacji ścieżki $s = s(t)$. Parametryzację ścieżki $s = s(t)$ otrzymuje się jako rozwiązanie skalarnego równania różniczkowego

$$\ddot{s} = -K_d\dot{s} - K_m e_s \left(\frac{1}{2}\frac{d\gamma}{ds}e_s + \gamma\right) + 2K_2 e_p^T F, \qquad F = \frac{d\Pi}{ds}, \tag{9.8}$$

gdzie $K_d, K_m, K_2 > 0$ są parametrami regulacji, γ zaś to ściśle dodatnia funkcja zmiennej s, która z założenia spełnia warunek

$$\frac{1}{2}\frac{d\gamma}{ds}e_s + \gamma \neq 0.$$

Rolą funkcji $\gamma(s)$ jest wpływanie na zachowanie chwytaka w pobliżu punktu końcowego ścieżki $s_{\max}$. Jeśli funkcja γ lub jej pochodna $\frac{d\gamma}{ds}$ będą miały duże wartości, to zbieżność błędu odległości od końca ścieżki e_s, która jest tylko asymptotyczna, będzie szybsza. Jednak nawet najprostsza funkcja $\gamma(s) = 1$ również jest dopuszczalna.

9.1.2. Sterowanie dynamiczne

Rozważmy model dynamiki manipulatora mobilnego (3.15) wyrażony we współrzędnych pomocniczych oraz równanie ograniczeń nieholonomicznych (3.12). Załóżmy, że znane są prędkości $\eta_r(t) = (v_r, \omega_r)$ obliczone według algorytmu Samsona (5.62), które gwarantują rozwiązanie zadania śledzenia ścieżki przez platformę mobilną.

Zaproponujmy następujące sterowanie dynamiczne zapewniające asymptotyczną zbieżność wszystkich współrzędnych manipulatora mobilnego do ich wartości zadanych

$$\begin{aligned} \tau \;=\; & (B^*)^{-1}\left\{Q^*\begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ -\dot{J}^T e_p - J^T J\dot{q}_r + J^T F\dot{s} \end{pmatrix} + C^*\begin{pmatrix} \eta_r \\ -J^T e_p \end{pmatrix}\right. \\ & \left. +D^* - C_K E_v - K E_v\right\}, \end{aligned} \tag{9.9}$$

gdzie F jest dane wzorem (9.8), natomiast pozostałe symbole oznaczają

$$E_v = \begin{pmatrix} e_\eta \\ \dot{q}_r + J^T e_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ \dot{q}_r + J^T e_p \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix}, \qquad K_{11} = \mathrm{diag}\{K_1\}, \quad K_{12} = \mathrm{diag}\{K_2\}, \quad K_1 > 0,$$

K_2 zaś jest tym parametrem regulacji, który został użyty do parametryzacji ścieżki manipulatora (9.8). Dynamika (3.15) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (9.9) jest opisana równaniem błędu

$$Q^* \dot{E}_v = -KE_v - (C^* + C_K)E_v. \tag{9.10}$$

Aby udowodnić zbieżność trajektorii obu podsystemów manipulatora mobilnego do zadanych ścieżek, wybierzmy funkcję Lapunowa, która jest modyfikacją funkcji zaproponowanej przez Galickiego w pracy [26]

$$W(\xi, E_v, e_s, \dot{s}) = V_k(\xi) + \frac{1}{2}E_v^T Q^* E_v + \frac{1}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\gamma K_m e_s^2 + K_2 e_p^T e_p, \tag{9.11}$$

gdzie $V_k(\xi)$ jest funkcją Lapunowa (5.63) dla ograniczeń nieholonomicznych (3.12) przekształconych do zadania śledzenia ścieżki (5.61). Pochodna po czasie funkcji W jest równa

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{V}_k + E_v^T Q^* \dot{E}_v + \frac{1}{2}E_v^T \dot{Q}^* E_v + \dot{s}\ddot{s} + \left(\frac{1}{2}\frac{d\gamma}{ds}e_s^2 + \gamma e_s\right) K_m \dot{s} \\ &+ 2K_2 e_p^T \dot{e}_p. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Zanim rozpoczniemy obliczanie pochodnej $\dot{W}$ wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.61), (5.62), (9.8) i (9.10), należy zauważyć, że na poziomie kinematycznym pojawiają się dodatkowe błędy pochodzące od dynamiki i zakłócające sterowanie kinematyczne (5.62). Potraktujmy η_r jako sterowanie kinematyczne w przypadku idealnym, tj. bez dynamiki. Sterowanie kinematyczne działające na system w przypadku rzeczywistym $\eta = \eta_r + e_\eta$ przyjmuje wówczas postać zmodyfikowaną

$$v = \mathrm{const} + e_{\eta 1}, \tag{9.13}$$

$$\omega = -k_2 l v \frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} - k_3\tilde{\theta} + v\cos\tilde{\theta}\frac{c(s)}{1 \mp c(s)l} + e_{\eta 2}. \tag{9.14}$$

Następnie oszacujmy $\dot{W}$ dane wzorem (9.12) wzdłuż trajektorii układu (5.61), (5.62), (9.8)–(9.14)

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -k_3\tilde{\theta}^2 + \tilde{\theta}e_{\eta 2} - e_\eta^T K_{11} e_\eta - K_2 \dot{q}_r^T \dot{q}_r - K_d \dot{s}^2 - K_2 e_p^T J J^T e_p \\ &= -\left(k_3 - \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\tilde{\theta} - e_{\eta 2}\right)^2 - K_1 e_{\eta 1}^2 - \left(K_1 - \frac{1}{2}\right)e_{\eta 2}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -K_2\dot{q}_r^T\dot{q}_r - K_d\dot{s}^2 - K_2 e_p^T J J^T e_p \\
\leq\ & -\left(k_3 - \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta}^2 - K_1 e_{\eta 1}^2 - \left(K_1 - \frac{1}{2}\right) e_{\eta 2}^2 - K_2\dot{q}_r^T\dot{q}_r - K_d\dot{s}^2 - K_2 e_p^T J J^T e_p \\
\leq\ & 0. \qquad (9.15)
\end{aligned}
$$

Łatwo zauważyć, że funkcja Lapunowa W nie rośnie wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, jeśli parametry regulacji są odpowiednio dobrane, tzn. $K_1, k_3 > 1/2$.

Macierz JJ^T jest macierzą manipulowalności sztywnego manipulatora i jest zawsze dodatnio określona, ponieważ z założenia manipulator unika konfiguracji osobliwych. Z twierdzenia La Salle'a–Yoshizawy (patrz rozdz. 11, tw. 7) wynika więc, że

$$(\tilde{\theta}, e_{\eta 1}, e_{\eta 2}, \dot{q}_r, \dot{s}, e_p) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu. Kolejną zmienną, której zbieżność do zera należy pokazać, jest współrzędna Freneta l. Zbieżności l można dowieść na mocy argumentów przedstawionych w rozdziale 5.3.1.

Ponieważ W nie rośnie wzdłuż trajektorii układu, oznacza to, że współrzędne $(\tilde{\theta}, e_{\eta 1}, e_{\eta 2}, \dot{q}_r, \dot{s}, e_p)$ są ograniczone. Ponieważ $\tilde{\theta} = 0$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu, łatwo pokazać, że $\ddot{\tilde{\theta}}$ jest również ograniczona, a więc $\dot{\tilde{\theta}}$ musi dążyć do zera. We wzorze (5.62) opisującym dynamikę błędu $\dot{\tilde{\theta}}$ wyrażenia k_2, v i $\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}}$ są różne od zera w pobliżu $\tilde{\theta} = 0$, czyli zachodzi $l \to 0$.

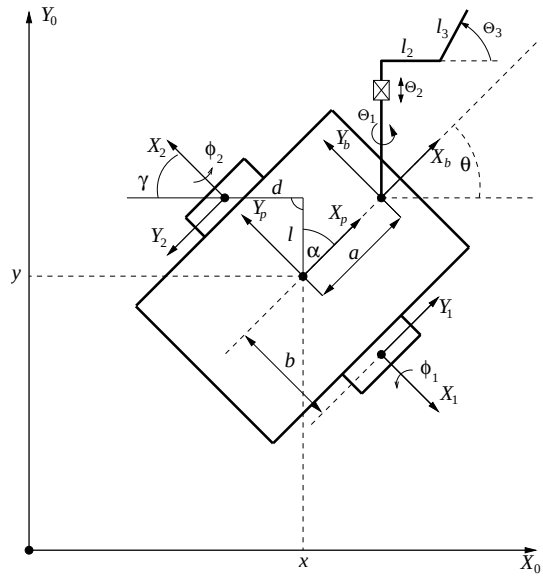
Ostatnim błędem, którego zbieżności należy dowieść, jest e_s. Funkcja Lapunowa W nie rośnie wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, dlatego wszystkie zmienne definiujące tą funkcję, tj. ξ, E_v, $\dot{s}$, e_s i e_p, są ograniczone. Używając właściwości funkcji γ i Π oraz ograniczoności wspomnianych zmiennych, można pokazać, że również $s^{(3)}$ jest ograniczona. Stosując lemat Barbalata do funkcji $\ddot{s}$, można pokazać, że $\ddot{s}(T) \to 0$ dla $T \to \infty$. Z równania opisującego parametryzację ścieżki dla manipulatora (9.8) łatwo wywnioskować, że musi być spełnione następujące równanie

$$\ddot{s}(\infty) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{ds}e_s^2(\infty) + \gamma e_s(\infty) = 0.$$

To oznacza, że albo $e_s(\infty) = 0$ albo $\frac{1}{2}\frac{d\gamma}{ds}e_s(\infty) + \gamma = 0$. Jednakże z właściwości funkcji $\gamma(s)$ wynika, że druga możliwość nie zachodzi. Stąd można wywnioskować, że $e_s(\infty) = 0$. To kończy dowód asymptotycznej zbieżności algorytmu śledzenia ścieżki dla manipulatora mobilnego (nh, h).

9.1.3. Badania symulacyjne

Badania symulacyjne zostały przeprowadzone przy użyciu pakietu Matlab/Simulink. Jako obiekt symulacji wybrano manipulator typu RTR zamontowany na monocyklu, przedstawiony na rys. 9.2.



Rys. 9.2. Manipulator RTR zamontowany na platformie klasy $(2, 0)$
Fig. 9.2. RTR manipulator mounted on the mobile platform of $(2, 0)$ class

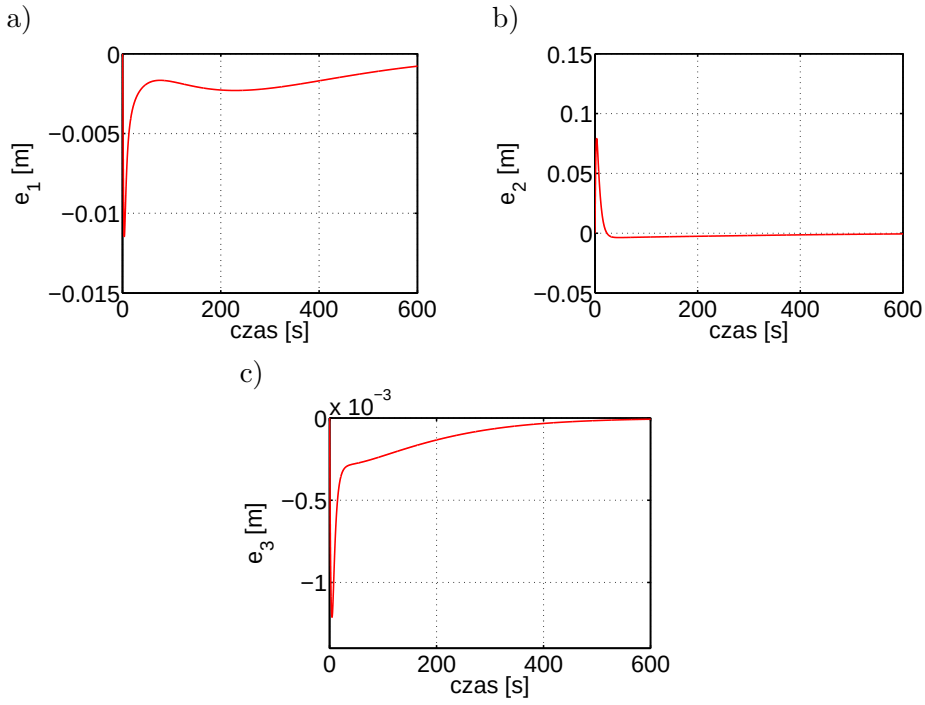
Model dynamiki manipulatora RTR umieszczonego na platformie $(2, 0)$ został pominięty ze względu na obszerność, jednak można go znaleźć w pracy [59]. Symulacje miały na celu sprawdzenie, czy układ sterowania (9.8), (9.9), (9.13) i (9.14) zaproponowany w tej pracy spełnia swoje zadanie. Zadana ścieżka dla manipulatora RTR została wybrana jako

$$
\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= 0,4 \text{ m}, \\
\Pi_2(s) &= 0,866s, \ [\text{m}], \\
\Pi_3(s) &= 0,5s + 0,5, \ [\text{m}], \\
s_{\max} &= 0,2 \text{ m}, \\
\gamma(s) &= 1,
\end{aligned}
$$

natomiast zadana ścieżka dla platformy była linią prostą o równaniu

$$x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s, \ [\mathrm{m}], \qquad \mathrm{y(s)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{s}, \ [\mathrm{m}].$$

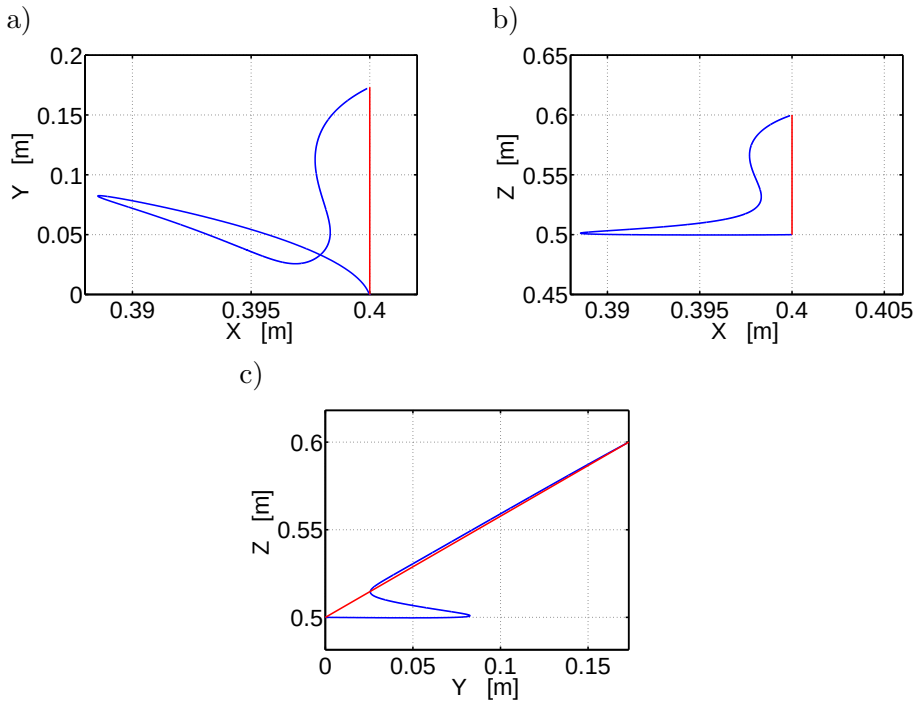
Położenie początkowe przegubów ramienia to $(\theta_1; \theta_2; \theta_3)(0)= (0; 0,6732; -\pi/3)$, natomiast położenie początkowe platformy wynosiło $(x; y; \theta)(0) = (0; 2; 3\pi/4)$. Parametry sterownika dynamicznego były równe $K_d = K_m = 1$, $K_1 = K_2 = 0,01$, sterownika zaś kinematycznego: $v = 1$, $k_2 = 0,1$ i $k_3 = 1$. Śledzenie ścieżki manipulatora zostało pokazane na rys. 9.3–9.4, a śledzenie ścieżki przez platformę pokazano na rys. 9.5.



Rys. 9.3. Błędy śledzenia ścieżki manipulatora RTR: a) błąd składowej x, b) błąd składowej y, c) błąd składowej z

Fig. 9.3. Path tracking errors for the RTR manipulator: a) error of the x variable, b) error of the y variable, c) error of the z variable

Jak wynika z rysunków 9.3–9.5, algorytm proponowany w tej pracy działał poprawnie. Jednocześnie warto podkreślić, że, w odróżnieniu od algorytmu Pometa, który był dotychczas wykorzystywany do śledzenia ścieżki przez platformę, prezentowany algorytm Samsona cechuje się dobrą zbieżnością, bez gwałtownego



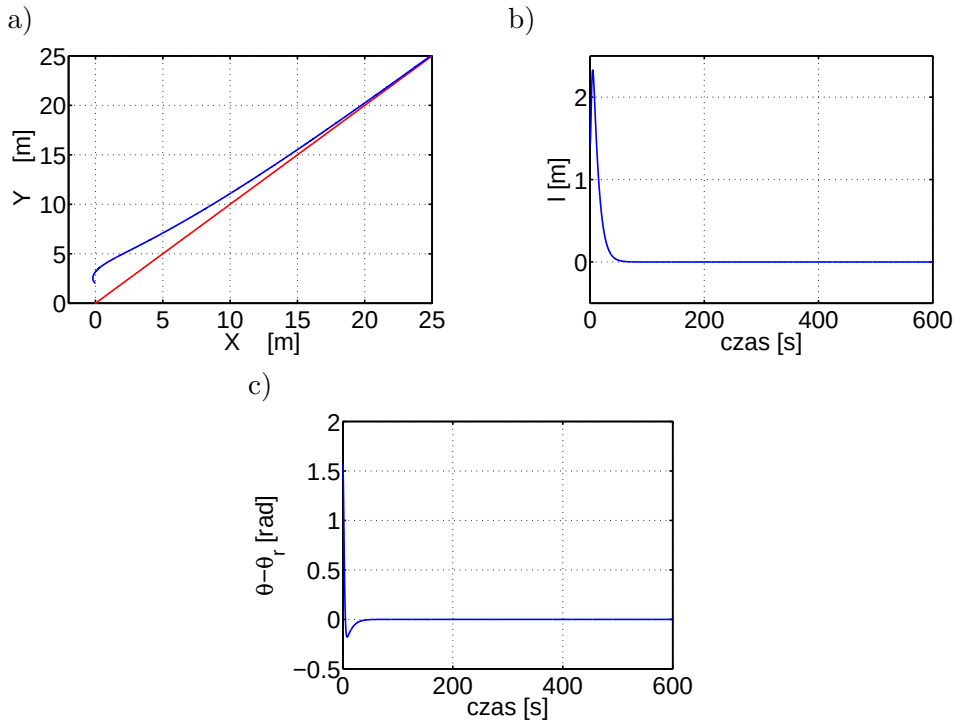
Rys. 9.4. Śledzenie ścieżki przez manipulator RTR: a) rzut na płaszczyznę XY, b) rzut na płaszczyznę XZ, c) rzut na płaszczyznę YZ

Fig. 9.4. Tracking of the desired path for the RTR manipulator: a) projection on XY plane, b) projection on XZ plane, c) projection on YZ plane

przełączania i zmian kierunku ruchu, co mogłoby uszkodzić mechanikę robota. Ponadto, inaczej niż w algorytmie Pometa, algorytm kinematyczny Samsona zapewnia nie tylko dojście do zadanej ścieżki, ale również poruszanie się wzdłuż ścieżki ze stałą prędkością.

9.2. Śledzenie ścieżki manipulatora mobilnego (nh, nh)

Inaczej niż dla manipulatora mobilnego (nh, h), zadanie śledzenia ścieżki dla podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego nie było do tej pory rozważane w literaturze. Jednak ze względu na fakt, że oba podsystemy nieholonomiczne są podobne, na przykład można przekształcić je do tej samej postaci normalnej, jaką jest układ łańcuchowy, to zadanie śledzenia ścieżki można zdefiniować tak samo dla obu podukładów, wykorzystując do poszukiwania sterowania



Rys. 9.5. Śledzenie ścieżki przez platformę klasy $(2,0)$: a) rzut na płaszczyznę XY, b) błąd odległości l, c) błąd orientacji $\tilde{\theta}$

Fig. 9.5. Tracking of the desired path for the mobile platform: a) projection on XY plane, b) distance tracking error l, c) orientation tracking error $\tilde{\theta}$

parametryzację Freneta. W dalszej części rozdziału przyjmiemy założenie, że manipulator z nieholonomicznym przeniesieniem napędu jest planarny, na przykład jest to planarne nieholonomiczne trójwahadło na monocyklu przedstawione na rys. 8.2.

Przedstawmy zatem zadanie, jakie manipulator mobilny powinien zrealizować:

- efektor manipulatora ma śledzić w sposób asymptotyczny pewną ograniczoną ścieżkę $\Pi(s)$, zdefiniowaną względem podstawy manipulatora, a więc względem platformy,
- platforma ma się poruszać wzdłuż pewnego konturu P po podłożu.

Ponieważ manipulator mobilny (nh, nh) zawiera dwa podsystemy nieholonomiczne, więc rozwiązanie zadania będzie wymagało zastosowania dwóch algorytmów kinematycznych dla każdego z równań opisujących ograniczenia nieholonomiczne, tj. (3.12) i (3.14).

9.2.1. Sterowanie kinematyczne

Zadanie śledzenia ścieżki dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego na monocyklu można wyrazić za pomocą współrzędnych Freneta (9.4). Podobnie jak w rozdziale 9.1.1, do rozwiązania zadania śledzenia ścieżki przez platformę zostanie zastosowany algorytm Samsona (5.62), przeznaczony dla klasy $(2, 0)$ kołowych nieholonomicznych platform mobilnych, natomiast dla manipulatora nieholonomicznego zostanie zastosowane odsprzęganie i linearyzacja we–wy. Dla manipulatorów planarnych z nieholonomicznym napędem również można wykorzystać parametryzację Freneta przedstawioną w rozdziale 4.2.3, przy czym punkt M będzie punktem znajdującym się na końcu efektora, orientacją zaś efektora θ_m będzie kąt obrotu stowarzyszonego z nim układu odniesienia wokół osi $-Y_b$, umieszczonej w podstawie manipulatora. Orientacja efektora w planarnym manipulatorze nieholonomicznym będzie więc równa

$$\theta_m = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

W rozważanym przypadku planarnego manipulatora nieholonomicznego zależności pomiędzy prędkościami punktu M efektora wyrażonymi we współrzędnych kartezjańskich i krzywoliniowych mają postać

$$\dot{l}_m = (-\sin\theta_{rm}\ ,\ \cos\theta_{rm}) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \qquad \dot{s} = \frac{(\cos\theta_{rm}\ ,\ \sin\theta_{rm})}{1 \mp c(s) l_m} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{9.16}$$

gdzie l_m oznacza odległość punktu M od ścieżki $\Pi(s)$, θ_{rm} zaś jest orientacją układu Freneta w punkcie M$'$ (patrz rys. 4.1). Dolne indeksy zostały wprowadzone w celu rozróżnienia współrzędnych Freneta dla obu podsystemów.

Współrzędne chwytaka typu n-wahadło względem układu podstawy są równe

$$x = \sum_{i=1}^{n} l_i \cos\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right), \qquad z = \sum_{i=1}^{n} l_i \sin\left(\sum_{j=1}^{i} \theta_j\right), \tag{9.17}$$

gdzie l_i jest długością i-tego ogniwa n-wahadła. Po zróżniczkowaniu zmiennych (9.17) po czasie i wstawieniu otrzymanych wyrażeń do (9.16) dostaniemy następujące równania

$$\dot{l}_m = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i} \theta_j\right) l_i \sum_{k=1}^{i} \dot{\theta}_k, \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_m &= \dot{\theta}_m \pm c(s)\dot{s} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i \pm \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l_m} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i} \theta_j\right) l_i \sum_{k=1}^{i} \dot{\theta}_k. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Korzystając z postaci ograniczeń nieholonomicznych (2.10)–(2.11) dla manipulatora, równania (9.18) i (9.19) można przedstawić w postaci macierzowej jako

$$\dot{\xi}_m = \begin{pmatrix} \dot{l}_m \\ \dot{\tilde{\theta}}_m \end{pmatrix} = H(q_r, \xi_m) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} = H(q_r, \xi_m) G_2(q_r) u = K_d(q_r, \xi_m) u, \quad (9.20)$$

gdzie $q_r = (\theta_1, ..., \theta_p)$, a $\xi_m = (l_m, \tilde{\theta}_m)$. Macierz $K_d(q_r, \xi_m) \in R^{2\times 2}$ będzie odwracalna, jeśli wykluczy się takie konfiguracje obu podsystemów, które prowadzą do jej osobliwości.

Można zaproponować następujące sterowanie, które zapewni zbieżność błędów śledzenia ścieżki dla nieholonomicznego manipulatora ξ_m do zera

$$u = -K_d^{-1}(q_r, \xi_m) \Lambda \xi_m, \qquad \Lambda = \Lambda^T > 0. \quad (9.21)$$

Widać, że równanie układu (9.20) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (9.21) ma postać

$$\dot{\xi}_m + \Lambda \xi_m = 0,$$

a więc algorytm gwarantuje asymptotyczną zbieżność ξ_m do zera, czyli śledzenie ścieżki $\Pi(s)$ przez nieholonomiczny manipulator.

9.2.2. Sterowanie dynamiczne

Manipulator mobilny typu (nh, nh) jest opisany równaniami ograniczeń (3.14)

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = G\zeta$$

i dynamiką daną wzorem (3.15) jako

$$Q^* \dot{\zeta} + C^* \zeta + D^* = B^* \tau.$$

Jako sterownik dynamiczny wybierzmy prawo sterowania

$$\tau = (B^*)^{-1} \left\{ Q^* \begin{pmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{u}_r \end{pmatrix} + C^* \begin{pmatrix} \eta_r \\ u_r \end{pmatrix} + D^* - (K + C_K) E_v \right\}, \quad (9.22)$$

gdzie symbole są zdefiniowane w następujący sposób

$$E_v = \begin{pmatrix} e_\eta \\ e_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta - \eta_r \\ u - u_r \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_1 I_2 & 0 \\ 0 & K_2 I_2 \end{bmatrix}, \qquad K_1, K_2 > 0.$$

Przed rozpoczęciem dowodu zbieżności należy rozważyć wpływ błędów e_u na sterowanie kinematyczne (9.21). Wpływ błędów e_η na algorytm Samsona omówiono w rozdziale 9.1.1.

Jak rozważano to w poprzednich rozdziałach, prędkości referencyjne u_r to sygnały uzyskiwane w przypadku idealnym, tzn. bez uwzględniania dynamiki obiektu. Jednak w praktyce powinny być rozważone zmodyfikowane sterowania

$$u = -K_d^{-1}(q_r, \xi_m)\Lambda\xi_m + e_u, \tag{9.23}$$

w których występują błędy prędkości e_u. Błędy te pojawiają się wtedy, gdy prędkość rzeczywista obiektu u nie może osiągnąć wartości referencyjnej u_r, najczęściej ze względu na bezwładność manipulatora.

Aby udowodnić zbieżność trajektorii obu podsystemów manipulatora mobilnego do zadanych ścieżek, wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$\begin{aligned} V(\xi, \xi_m, E_v) &= V_k(\xi) + V_m(\xi_m) + V_d(E_v) \\ &= k_2\frac{l^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}\xi_m^T\xi_m + \frac{1}{2}E_v^T Q^* E_v. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Funkcja $V_k(\xi)$ jest funkcją Lapunowa dla platformy klasy $(2,0)$ śledzącej ścieżkę za pomocą algorytmu Samsona (5.63), funkcja $V_m(\xi_m)$ jest funkcją Lapunowa dla nieholonomicznego manipulatora sterowanego według algorytmu kinematycznego (9.23), a $V_d(E_v)$ jest funkcją Lapunowa dla równań dynamiki podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (9.22). Z kolei symbolem $\xi = (l, \tilde{\theta})$ oznaczono współrzędne Freneta dla platformy, a $\xi_m = (l_m, \tilde{\theta}_m)$ to współrzędne Freneta dla nieholonomicznego manipulatora.

Po wstawieniu do ogólnego wzoru na pochodną po czasie funkcji V

$$\dot{V} = k_2 l\dot{l} + \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + \xi_m^T\dot{\xi}_m + \frac{1}{2}E_v^T\dot{Q}^* E_v + E_v^T Q^* \dot{E}_v$$

równania zamkniętej pętli układu (3.15) ze sprzężeniem zwrotnym (9.22), czyli

$$Q^*\dot{E}_v + (C^* + C_K)E_v + KE_v = 0,$$

oraz równania rzeczywistych sterowań kinematycznych (9.13), (9.14) i (9.23) otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_2 l[(v + e_{\eta 1})\sin\tilde{\theta}] + \tilde{\theta}[-k_2 l(v + e_{\eta 1})\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} - k_3\tilde{\theta} + e_{\eta 2}] \\ &\quad + \xi_m^T K_d(q_r, \xi_m)(-K_d(q_r, \xi_m)\Lambda\xi_m + e_u) + \frac{1}{2}E_v^T\dot{Q}^* E_v \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +E_v^T[-(C^* + C_K)E_v - KE_v] \\
= & -k_3\tilde{\theta}^2 + \tilde{\theta}e_{\eta 2} - \xi_m^T\Lambda\xi_m + \xi_m^T K_d(q_r,\xi_m)e_u - E_v^T K E_v \\
= & -k_3\tilde{\theta}^2 + \tilde{\theta}e_{\eta 2} - \xi_m^T\Lambda\xi_m + \xi_m^T K_d(q_r,\xi_m)e_u - e_\eta^T K_1 e_\eta - e_u^T K_2 e_u \\
= & -\left(k_3 - \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\tilde{\theta} - e_{\eta 2}\right)^2 - \left(K_1 - \frac{1}{2}\right)e_{\eta 2}^2 - K_1 e_{\eta 1}^2 - \xi_m^T\left(\Lambda - \frac{I_2}{2}\right)\xi_m \\
& +\frac{1}{2}e_u^T K_d(q_r,\xi_m)^T K_d(q_r,\xi_m)e_u - e_u^T K_2 e_u + \\
& -\frac{1}{2}(\xi_m - K_d(q_r,\xi_m)e_u)^T(\xi_m - K_d(q_r,\xi_m)e_u).
\end{aligned}
$$

Dla nieholonomicznego trójwahadła macierz $K_d(q_r,\xi_m)$ ma postać

$$
K_d(q_r,\xi_m) = \begin{bmatrix} K_{d11} & K_{d12} \\ K_{d21} & K_{d22} \end{bmatrix},
$$

z elementami zdefiniowanymi jako

$$
\begin{aligned}
K_{d11} &= \sum_{i=1}^{3} l_i \cos\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i}\theta_i\right), \\
K_{d12} &= a_2 s_1 \left\{\sum_{i=2}^{3} l_i \cos\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i}\theta_i\right)\right\} + a_3 s_2 c_1 l_3 \cos\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{3}\theta_i\right), \\
K_{d21} &= 1 \pm \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l_m}\left\{\sum_{i=1}^{3} l_i \sin\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i}\theta_i\right)\right\}, \\
K_{d22} &= a_2 s_1 \left\{1 \pm \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l_m}\left(\sum_{i=2}^{3} l_i \sin\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{i}\theta_i\right)\right)\right\} \\
& \quad + a_3 s_2 c_1 (1 \pm \frac{c(s)}{1 \mp c(s) l_m} l_3 \sin\left(\theta_{rm} - \sum_{j=1}^{3}\theta_i\right).
\end{aligned}
$$

Warto przypomnieć, że transformacja Freneta jest słuszna jedynie lokalnie, tzn. $l_m(0) < r_{\min}$, przy czym $r_{\min}$ jest odwrotnością maksymalnej krzywizny $c_{\max}$ ścieżki manipulatora $\Pi(s)$. Wówczas macierz $K_d(q_r,\xi_m)$ jest ograniczona, czyli zachodzi

$$
\| K_d(q_r,\xi_m) \| = \sqrt{\bar{\lambda}_{K_d K_d^T}(q_r,\xi_m)} \leq \max_{q_r,\xi_m} \sqrt{\bar{\lambda}_{K_d K_d^T}(q_r,\xi_m)} = K_{\max} < \infty.
$$

Pochodna po czasie funkcji V może być wtedy oszacowana w następujący sposób

$$
\dot{V} = -\left(k_3 - \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\tilde{\theta} - e_{\eta 2}\right)^2 - \left(K_1 - \frac{1}{2}\right)e_{\eta 2}^2 - K_1 e_{\eta 1}^2
$$

$$
\begin{aligned}
& -\xi_m^T\left(\Lambda - \frac{I_2}{2}\right)\xi_m + \frac{1}{2}e_u^T K_d(q_r,\xi_m)^T K_d(q_r,\xi_m)e_u - e_u^T K_2 e_u \\
& -\frac{1}{2}(\xi_m - K_d(q_r,\xi_m)e_u)^T(\xi_m - K_d(q_r,\xi_m)e_u) \\
\leq\ & -\left(k_3 - \frac{1}{2}\right)\tilde{\theta}^2 - \left(K_1 - \frac{1}{2}\right)e_{\eta 2}^2 - K_1 e_{\eta 1}^2 - \xi_m^T\left(\Lambda - \frac{I_2}{2}\right)\xi_m \\
& -e_u^T\left(K_2 - \frac{K_{\max}^2}{2}\right)e_u \\
\leq\ & -W(\tilde{\theta}, e_\eta, e_u, \xi_m) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Ponieważ pochodna po czasie funkcji Lapunowa jest ujemna, więc V jest malejąca, a więc zmienne definiujące funkcję V, czyli ξ, ξ_m i E_v są ograniczone. Ponadto, jeżeli parametry regulacji zostaną odpowiednio wybrane, tzn.

$$k_3 > \frac{1}{2}, \quad K_1 > \frac{1}{2}, \quad \Lambda > \frac{I_2}{2}, \quad K_2 > \frac{K_{\max}^2}{2},$$

to powyższe oszacowanie spełnia założenia twierdzenia La Salle'a (tw. 5, rozdz.11). To oznacza, że punkt

$$(\tilde{\theta}, e_\eta, e_u, \xi_m) = (0, 0, 0, 0)$$

jest lokalnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi (lokalność jest konsekwencją wyboru współrzędnych Freneta, definiowanych w niewielkiej odległości od zadanej ścieżki, do przekształcenia zadania śledzenia scieżki). Zbieżność zmiennej l dla platformy zachodzi na mocy argumentów przedstawionych w podrozdziale 9.1.2. To kończy dowód zbieżności algorytmu sterowania dla manipulatora mobilnego typu (nh, nh) przedstawionego w tym rozdziale.

9.2.3. Badania symulacyjne

Badania symulacyjne zostały przeprowadzone dla nieholonomicznego trójwahadła zamontowanego pionowo na monocyklu.

Zadaną ścieżką dla manipulatora był okrąg

$$
\begin{aligned}
\Pi_1(s) &= 0,25\cos 4s + 1, \ [\mathrm{m}], \\
\Pi_2(s) &= -0,25\sin 4s + 0,6, \ [\mathrm{m}],
\end{aligned}
$$

natomiast zadana ścieżka dla platformy była linią prostą o równaniu

$$x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s, \ [\mathrm{m}], \qquad \mathrm{y(s)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{s}, \ [\mathrm{m}].$$

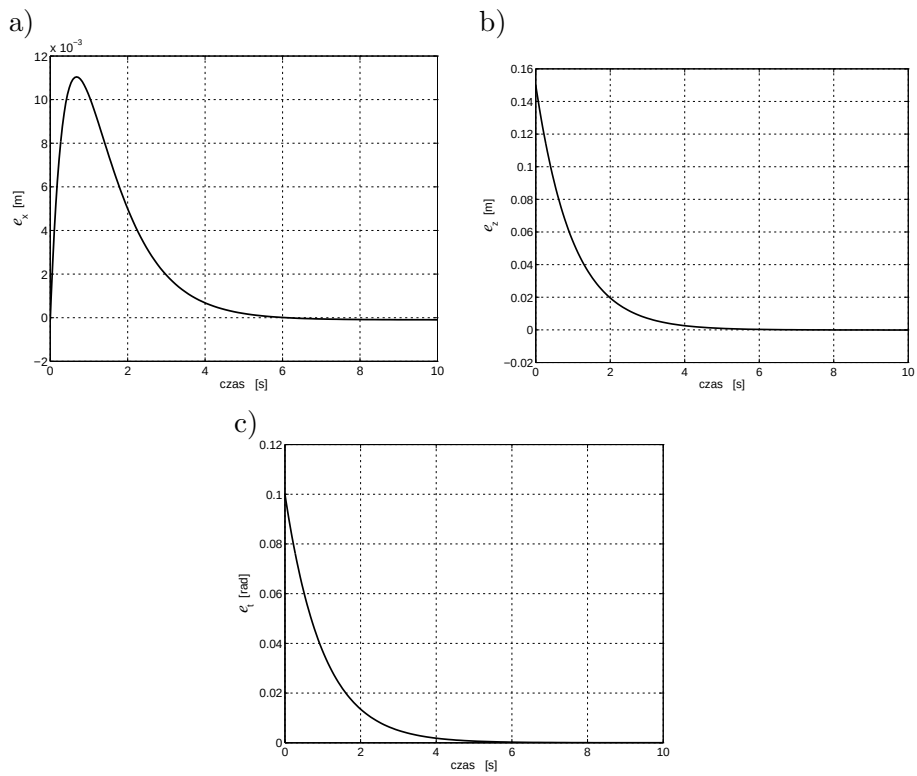
Położenie początkowe przegubów ramienia to $(\theta_1;\theta_2;\theta_3)(0)=(0;\pi/2;-\pi/2+0,1)$, natomiast położenie początkowe platformy wynosiło $(x;y;\theta)(0) = (0;2;3\pi/4)$. Parametry sterownika dynamicznego były równe

$$K_1 = 1, \qquad K_2 = 10,$$

parametry sterowania dla algorytmu kinematycznego Samsona wynosiły

$$v = 1, \qquad k_2 = 0,1, \qquad k_3 = 1,$$

natomiast macierz regulacji w sterowniku kinematycznym dla nieholonomicznego manipulatora to $\Lambda = \mathrm{diag}\{1\}$. Śledzenie ścieżki dla manipulatora zostało pokazane na rys. 9.6, natomiast platforma śledziła ścieżkę identycznie jak w przypadku manipulatora mobilnego typu (nh, h).



Rys. 9.6. Błędy śledzenia ścieżki dla trójwahadła: a) błąd składowej x, b) błąd składowej z, c) błąd orientacji $\tilde{\theta}$

Fig. 9.6. Path tracking for the 3-pendulum: a) an error of x coordinate, b) an error of z coordinate, c) an error of orientation $\tilde{\theta}$

10. Uwagi końcowe

W monografii przedstawiono jednolite podejście pozwalające na znalezienie sterowania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych w przypadku, gdy różne zadania podlegają dekompozycji na podzadania definiowane osobno dla każdego z systemów składowych, jakimi są kołowa platforma mobilna oraz ramię manipulacyjne zamontowane na tej platformie. Spośród czterech typów manipulatorów mobilnych rozważono tylko takie, w których kołowa platforma porusza się w sposób ściśle toczny, bez poślizgu, buksowania i blokowania kół, a więc jest nieholonomiczna. Natomiast w przypadku manipulatora dopuszczono zarówno bezpośrednie napędy, jak i napędy nieholonomiczne.

Najtrudniejszym zjawiskiem wymagającym specjalnego podejścia są ograniczenia nieholonomiczne pojawiające się w rozważanych obiektach. Takie ograniczenia zmieniają jakościowo zarówno problem modelowania, jak i sterowania takimi robotami. W przypadku gdy obiekt robotyczny składa się z połączonych podsystemów, z których choć jeden ma ograniczenia nieholonomiczne nałożone na ruch, niezbędne staje się uwzględnienie tych ograniczeń w modelowaniu i sterowaniu całym układem złożonym. W pracy pokazano, jak można sprawdzić nieholonomiczność ograniczeń i jak należy je uwzględnić w procesie otrzymywania modelu kinematyki i dynamiki manipulatora mobilnego.

Równania ruchu układów nieholonomicznych zawierają zarówno równania ograniczeń, które muszą być spełnione w każdej chwili, jak i równania dynamiki, połączone w strukturę kaskadową. Z tego względu do projektowania sterowania dla różnych zadań zastosowano procedurę całkowania wstecznego, która wymaga jednoczesnego rozwiązywania równania ograniczeń i użycia otrzymanych rozwiązań do sterowania na poziomie dynamicznym. Jednym z częstych braków spotykanych w wielu pracach jest nieuwzględnianie błędów pochodzących z poziomu dynamiki i zakłócających działanie sterownika kinematycznego (układu rozwiązującego równania ograniczeń), który jest projektowany w przypadku idealnym, a więc bez wzięcia pod uwagę efektów dynamicznych, takich np. jak duża masa czy bezwładność układu. W monografii przedstawiono takie rozwiązania dla wszystkich rozważanych zadań, w których wspomniane błędy zostały sprowa-

dzone do zera. Proponowane w pracy algorytmy sterowania działają poprawnie, co potwierdzają dowody zbieżności i badania symulacyjne.

W rozdziałach 2–5 przedstawiono przegląd znanych metod modelowania i wybranych zagadnień sterowania dla układów nieholonomicznych. Na tle przeglądu następujące wyniki stanowią oryginalny dorobek autorki:

- Syntetyczne podejście do zagadnienia modelowania manipulatorów mobilnych typu (nh, h) i (nh, nh), i wyrażanie równań ruchu w różnych współrzędnych – uogólnionych, pomocniczych, linearyzujących.
- Szczegółowe wyprowadzenie współrzędnych Freneta dla ruchu układu na płaszczyźnie i otrzymanie parametryzacji wykorzystywanej w zadaniu śledzenia ścieżki – rozdział 4.2.3.
- Postać sterowników dynamicznych – dysypatywnego i uniwersalnego – zarówno w przypadku pełnej znajomości modelu dynamiki, jak i dla parametrycznej niepewności modelu – rozdział 4.3.
- Algorytm osiągania zadanej konfiguracji z zatrzymaniem dla układów łańcuchowych – rozdział 5.2.1.
- Śledzenie ścieżki dla wszystkich klas kołowych platform mobilnych z wykorzystaniem współrzędnych Freneta – rozdział 5.3.1.

Rozdziały 6–9 stanowią całkowicie oryginalne opracowanie dotyczące zagadnień sterowania zapewniającego realizację różnych zadań dla wybranych dwóch typów nieholonomicznych manipulatorów mobilnych:

- Sterowanie zapewniające osiągnięcie zadanej konfiguracji dla obu typów manipulatorów mobilnych. Na przykładzie manipulatora nieholonomicznego pokazano, jak algorytm sterowania pracujący w pętli otwartej jest zaburzany przez dynamikę układu i dlaczego w celu dokładnej realizacji wybranego zadania niezbędne jest zastosowanie algorytmów ze sprzężeniem zwrotnym. Wykazano, że w procesie sterowania należy uwzględnić dodatkowe błędy pochodzące z poziomu dynamicznego i zaburzające sterowanie kinematyczne i dowieść ich zbieżności do zera. To zagwarantuje poprawną realizację zadania i prawidłowe zachowanie obiektu.
- Śledzenie trajektorii w przestrzeni zmiennych stanu (wewnętrznej). W obu typach obiektów w roli sterowania kinematycznego zastosowano znane z literatury algorytmy śledzenia trajektorii ogólnego przeznaczenia i pokazano, jak zaprojektować algorytmy sterowania dynamicznego w przypadku pełnej

znajomości i parametrycznej nieznajomości równań dynamiki manipulatora mobilnego. Wymóg znajomości trajektorii referencyjnych, zarówno dla platformy mobilnej, jak i ramienia manipulatora, powoduje utratę przez nieholonomiczny manipulator mobilny podstawowej jego właściwości, tzn. nadmiarowości stopni swobody. W związku z tym zaproponowane algorytmy sterowania nie są w ogólnym przypadku optymalne.

- Śledzenie trajektorii w przestrzeni roboczej (zewnętrznej). Wprowadzono pojęcie rozszerzonych funkcji wyjściowych umożliwiających ruch manipulatora względem platformy. Poprzez procedurę odsprzęgania i linearyzacji transformacji wejściowo-wyjściowej uzyskano możliwość śledzenia trajektorii efektora dla obu typów manipulatorów mobilnych. Ponieważ warunki regularności wymagają, aby w trakcie trwania procesu regulacji konfiguracje manipulatora były dostatecznie oddalone od osobliwości, więc niezbędne jest wybranie dostatecznie dużych wzmocnień regulatorów, tak aby nie występowały nadmierne przeregulowania. W konsekwencji generowane sterowania mogą nie być realizowalne z uwagi na fizykalne ograniczenia sygnałów sterujących, dostarczanych przez układy napędowe. Należy podkreślić, że brak uwzględnienia ograniczeń na sterowanie dotyczy wszystkich zadań analizowanych w poszczególnych rozdziałach.

- Śledzenie ścieżki przez każdy z podsystemów. Zadanie to jest definiowane w odmienny sposób dla manipulatorów holonomicznych i nieholonomicznych – manipulatory z bezpośrednimi napędami mogą poruszać się wzdłuż ścieżki o skończonej długości i zatrzymać się na jej końcu. Z kolei zadanie sterowania dla manipulatorów nieholonomicznych polega na asymptotycznym zbliżaniu się do ścieżki. Do celów sterowania wykorzystano parametryzację Freneta zmodyfikowaną dla planarnych manipulatorów nieholonomicznych.

Przedstawione algorytmy sterowania obejmują większość zadań, jakie można sformułować dla każdego z podsystemów składowych nieholonomicznego manipulatora mobilnego. Metoda postępowania w każdym przypadku jest podobna: należy znaleźć algorytm kinematyczny zapewniający realizację zadania dla danego podukładu nieholonomicznego, a następnie wykorzystać otrzymany „profil prędkościowy” do zaprojektowania sterowania na poziomie dynamicznym. Wybór jednego spośród zaprezentowanych algorytmów dynamicznych jest dowolny, jednak algorytm dysypatywny i uniwersalny mogą w prosty sposób zostać zmodyfikowane do postaci adaptacyjnej, stosowanej w przypadku parametrycznej niepewności co do modelu dynamiki, co wymaga jednak dodatkowego użycia układu estymującego nieznane parametry tego modelu.

Sformułowanie problemu sterowania w tak ogólnej postaci pozwala również na realizację zadań mieszanych dla poszczególnych podsystemów, na przykład platforma może podążać do zadanej konfiguracji, natomiast manipulator w tym samym czasie może śledzić zadaną trajektorię przegubową. Jedynym warunkiem wymaganym do poprawnej realizacji zadań jest użycie algorytmu kinematycznego o odpowiednich właściwościach, na przykład funkcji Lapunowa gwarantującej globalną lub półglobalną asymptotyczną stabilność dla układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

Wszystkie otrzymane algorytmy sterowania nie uwzględniają ograniczeń na zmienne stanu. Fakt ten nabiera szczególnego znaczenia w przypadku istnienia przeszkód w przestrzeni roboczej nieholonomicznego manipulatora mobilnego. Wydaje się, że zwłaszcza w przypadku zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni wewnętrznej zaproponowane algorytmy nie dadzą się w prosty sposób zaadaptować do zadań wymagających unikania kolizji.

Prezentowane wyniki mogą mieć zastosowanie przy syntezie algorytmów sterowania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych podczas realizacji różnych zadań. W literaturze przedmiotu przedstawiane są również inne podejścia do zagadnień sterowania takimi obiektami. Jednak jest naturalne, że nawet w przypadku problematyki omawianej w tej monografii istnieje wiele szczegółowych problemów w dziedzinie projektowania algorytmów sterowania dla rozważanych obiektów, które wymagają dalszego rozwoju badań teoretycznych i praktycznych.

Wydaje się celowa kontynuacja badań dotyczących zarówno różnych aspektów sterowania manipulatorami mobilnymi, na przykład w przypadku występowania niewielkiego poślizgu kół, czyli nieznacznego przekroczenia ograniczeń nieholonomicznych, jak i rozszerzenie prezentowanej metody projektowania układów sterowania na inne układy złożone, w których przynajmniej jeden podsystem składowy jest nieholonomiczny, oraz uwzględnienie istnienia ograniczeń na zmienne stanu i sterowania w procesie regulacji.

11. Podstawowe definicje i twierdzenia o stabilności

11.1. Układy autonomiczne

Oprócz metod Lapunowa, do podstawowych narzędzi do badania stabilności układów autonomicznych należy *zasada niezmienniczości La Salle'a*, która może być wypowiedziana w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5 (La Salle, [38]). *Niech będzie dany układ dynamiczny*

$$\dot{x} = f(x), \tag{11.1}$$

$x \in R^n$, *z funkcją Lapunowa* $V(x)$ *klasy* C^1, *taką że zachodzi*

$$\dot{V}(x) = \mathrm{d}V(x)f(x) \leq 0. \tag{11.2}$$

Zdefiniujmy zbiór

$$E = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; \dot{V}(x) = 0 \right\}. \tag{11.3}$$

Ograniczone trajektorie układu (11.1) dążą wówczas do największego zbioru niezmienniczego $M \subseteq E$.

11.2. Układy nieautonomiczne

11.2.1. II Metoda Lapunowa

Przed sformułowaniem twierdzenia o stabilności wprowadzimy następującą definicję:

Definicja 1. *Funkcja ciągła* $\gamma : [0, a) \to R_+$ *należy do klasy* K, *jeśli jest ściśle rosnąca i* $\gamma(0) = 0$. *Jeśli dodatkowo* $a = \infty$ *oraz* $\gamma(r) \to \infty$ *dla* $r \to \infty$, *to funkcja* γ *należy do klasy* K_∞.

Twierdzenie 6. *Niech $x = 0$ będzie punktem równowagi gładkiego układu nieautonomicznego*[1]

$$\dot{x} = f(x, t). \tag{11.4}$$

Zdefiniujmy kulę otwartą $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Niech $V : D \times R \to R_+$ będzie funkcją klasy C^1, taką że dla wszystkich $t \geq 0$, $x \in D$ zachodzi

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|), \tag{11.5}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|). \tag{11.6}$$

Punkt równowagi $x = 0$ jest wówczas:

- jednostajnie stabilny, *jeśli γ_1 i γ_2 są funkcjami klasy K na przedziale $[0, r)$ oraz $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ na przedziale $[0, r)$,*

- jednostajnie asymptotycznie stabilny, *jeśli γ_1, γ_2 i γ_3 są funkcjami klasy K na przedziale $[0, r)$,*

- eksponencjalnie stabilny, *jeśli $\gamma_i(\rho) = k_i \rho^\alpha$ na przedziale $[0, r)$, przy $k_i > 0$, $\alpha > 0$, $i = 1, 2, 3$,*

- globalnie jednostajnie stabilny, *jeśli $D = R^n$, γ_1 i γ_2 są funkcjami klasy K_∞, a $\gamma_3(\cdot) \geq 0$ na R_+,*

- globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny, *jeśli $D = R^n$, funkcje γ_1 i γ_2 są klasy K_∞, a γ_3 jest funkcją klasy K na R_+,*

- globalnie eksponencjalnie stabilny, *jeśli $D = R^n$, a $\gamma_i(\rho) = k_i \rho^\alpha$ na R_+, $k_i > 0$, $\alpha > 0$, $i = 1, 2, 3$.*

11.2.2. Lemat Barbalata

Lemat 1. *Niech $f(t)$ będzie pewną funkcją rzeczywistą klasy C^2. Załóżmy, że $f(t)$ jest ograniczona od dołu, oraz że pochodna $\dot{f}(t) \leq 0$. Wówczas, jeżeli druga pochodna $\ddot{f}(t)$ jest ograniczona, to $\lim_{t \to +\infty} \dot{f}(t) = 0$.*

[1] W istocie wystarczy, żeby odwzorowanie $f : R^n \times R \to R^n$ było lokalnie lipschitzowskie względem x i ciągłe względem t.

11.2.3. Twierdzenie La Salle'a–Yoshizawy

Odpowiednikiem zasady niezmienniczości La Salle'a dla układów nieautonomicznych jest następujące twierdzenie La Salle'a–Yoshizawy.

Twierdzenie 7. *Niech $x = 0$ będzie punktem równowagi układu nieautonomicznego (11.4). Załóżmy, że $V : R^n \times R \longrightarrow R$ jest funkcją klasy C^1, taką że dla każdego czasu $t \geq 0$, $x \in R^n$*

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x,t) \leq \gamma_2(\|x\|), \tag{11.7}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \leq -W(x) \leq 0, \tag{11.8}$$

gdzie γ_1, γ_2 są funkcjami klasy K_∞, W zaś jest funkcją ciągłą. Wszystkie trajektorie $x(t)$ układu (11.4) są wówczas globalnie ograniczone i spełniają warunek

$$\lim_{t \to +\infty} W(x(t)) = 0. \tag{11.9}$$

Jeśli dodatkowo funkcja $W(x)$ jest dodatnio określona, to punkt $x = 0$ jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Wszystkie zamieszczone w tym rozdziale twierdzenia i lematy są przytoczone w takim samym brzmieniu jak w pracy [87], którą autorka współtworzyła razem z kolegami z Zakładu Podstaw Cybernetyki i Robotyki, Instytutu Informatyki, Automatyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej.

Bibliografia

[1] Astolfi A., *Exponential stabilization of a car-like vehicle.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nagoya, 1995, s. 1391–1396.

[2] Bayard D., Wen J., *New class of control laws for robotic manipulators, part 2: adaptive case.* Int. Journal of Control, 1988, wolumen 47, s. 1387–1406.

[3] Bayle B., Fourquet J.Y., Renaud M., *Manipulability of wheeled mobile manipulators: application to motion generation.* Int. Journal of Robotics Research, 2003, wolumen 22, numer 7, s. 565–581.

[4] Berghuis H., *Model-based robot control: from theory to pratice.* Praca doktorska, Universiteit Twente, 1993.

[5] Brockett R.W., *Asymptotic stability and feedback stabilization.* Boston, MA, Birkhaeuser 1983, wolumen 27, Differential Geometric Control Theory, s. 181–191.

[6] Campion G., Bastin G., d'Andréa-Novel B., *Structural properties and classification of dynamical models of wheeled mobile robots.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1996, wolumen 12, numer 5, s. 47–61.

[7] Canudas de Wit C. et al., *Nonlinear control design for mobile robots.* World Scientific 1994, wolumen 11 serii *Robotics and Automated Systems*: Recent Trends in Mobile Robots, s. 121–156.

[8] Canudas de Wit C., Siciliano B., Bastin G., *Theory of Robot Control.* London, Springer-Verlag 1996.

[9] Canudas de Wit C., Sørdalen O.J., *Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1992, wolumen 37, numer 11, s. 1791–1797.

[10] Charlet B., Lévine J., Marino R., *On dynamic feedback linearization.* Systems & Control Letters, 1989, wolumen 13, s. 143–151.

[11] Charlet B., Lévine J., Marino R., *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization.* SIAM J. Control Optim., 1991, wolumen 29, s. 38–57.

[12] Chung J.H., Velinsky S.A., Hess R.A., *Interaction control of a redundant mobile manipulator.* Int. Journal of Robotics Research, 1998, wolumen 17, numer 12, s. 1302–1309.

[13] Coron J.M., *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drifts.* Math. Control, Signals and Systems, 1992, wolumen 5, s. 295–315.

[14] Coron J.M., *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws.* SIAM J. Control Optim., 1995, wolumen 33, s. 804–833.

[15] Craig J.J., *Wprowadzenie do robotyki.* Warszawa, WNT 1993.

[16] D'Andréa-Novel B., Bastin G., Campion G., *Modelling and control of nonholonomic wheeled mobile robots.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Sacramento, 1991, s. 1130–1135.

[17] D'Andréa-Novel B., Campion G., Bastin G., *Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization.* Int. Journal of Robotics Research, 1995, wolumen 14, numer 3, s. 543–559.

[18] De Luca A., Oriolo G., Vendittelli M., *Stabilization of the unicycle via dynamic feedback linearization.* W: Proc. of the 6th IFAC Symposium Robot Control 2000 SYROCO'00, Vien, 2000, s. 397–402.

[19] Descusse J., Moog C.H., *Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems.* Int. Journal of Control, 1985, wolumen 42, s. 1387–1398.

[20] Dixon W.E. et al., *Robust tracking and regulation control for mobile robots.* Int. J. Robust Nonlinear Control, 2000, wolumen 10, s. 199–216.

[21] Do K.D. et al., *Global output feedback universal controller for stabilization and tracking of underactuated odin – an underwater vehicle.* W: Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, Las Vegas, 2002.

[22] Dulęba I., *Modeling and control of mobile manipulators.* W: Proc. of the 6th IFAC Symposium Robot Control 2000 SYROCO'00, Wiedeń, 2000, s. 687–692.

[23] Feng W., Postlethwaite I., *A simple robust control scheme for robot manipulators with only joint position measurements.* Int. Journal of Robotics Research, 1993, wolumen 12, numer 5, s. 490–496.

[24] Fliess M. et al., *Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and applications.* Int. Journal of Control, 1995, wolumen 61, s. 1327–1361.

[25] Fradkov A., Miroshnik I., Nikiforov V., *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers 1999.

[26] Galicki M., *Adaptive control of kinematically redundant manipulator.* W: Lecture Notes in Control Inf. Sci. 335, London, 2006, s. 129–139.

[27] Gurvits L., Li Z.X., *Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning.* New York, Kluwer Academic Publishers 1992, Progress in Nonholonomic Motion Planning.

[28] Hossa R., *Modele i algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych.* Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, 1996.

[29] Huang Q., Sugano S., Tanie K., *Motion planning for a mobile manipulator considering stability and task constraints.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Leuven, 1998, s. 2192–2198.

[30] Isidori A., *Nonlinear Control Systems.* Second edition. Heidelberg, Springer-Verlag 1989.

[31] Jiang Z.P., *A unified Lyapunov framework for stabilization and tracking of nonholonomic systems.* W: Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, 1999, s. 2088–2093.

[32] Jiang Z.P., Nijmeijer H., *Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping.* Automatica, 1997, wolumen 33, numer 7, s. 1393–1399.

[33] Jiang Z.P., Nijmeijer H., *A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, wolumen 44, numer 2, s. 265–279.

[34] Kanayama Y. et al., *A stable tracking control method for an autonomous mobile robot.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Cincinnati, 1990, s. 384–389.

[35] Kozlov V.V., *Realization of nonintegrable constraints in classical mechanics.* Soviet Physics. Doklady. A translation of the physics sections of Doklady Akademii Nauk SSSR, 1983, wolumen 28, s. 735–737.

[36] Kozłowski K., Majchrzak J., *A new control algorithm for a nonholonomic mobile robot.* Archives of Control Sciences, 2002, wolumen 12, numer 1/2, s. 37–70.

[37] Kozłowski K., Pazderski D., *Strojony oscylator w zadaniu sterowania integratorem nieholonomicznym z ograniczeniem sygnału wejściowego.* W: Postępy robotyki: sterowanie, percepcja i komunikacja. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2006, s. 151–161.

[38] Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P., *Nonlinear and Adaptive Control Design.* New York, J. Wiley and Sons 1995.

[39] Lee T.C., Lee C.H., Teng C.C., *Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robots by computed torque.* W: Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, 1999.

[40] Lefeber E., Robertsson A., Nijmeijer H., *Linear controllers for exponential tracking of systems in chained form.* Int. J. Robust Nonlinear Control, 2000, wolumen 10, s. 243–263.

[41] Lewis A.D., Murray R., *Variational principles for constrained systems: theory and experiment.* Journal of Nonlinear Mechanics, 1995, wolumen 30, numer 6.

[42] Lizárraga D.A., *Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems.* Math. Control, Signals and Systems, 2003, wolumen 16, s. 255–277.

[43] Marino R., *On the largest feedback linearizable subsystem.* Systems & Control Letters, 1986, wolumen 6, s. 345–351.

[44] Mazur A., *Algorytmy sterowania robotów oparte na zasadzie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania.* Praca doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, 1996.

[45] Mazur A., *Algorytmy sterowania manipulatorów mobilnych – analiza jakości.* Raport instytutowy, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, seria SPR 14/00, 2000.

[46] Mazur A., *Universal adaptive control law of mobile manipulators with dynamic linearizable nonholonomic platform.* W: Proc. of the 6th Int. Conf. on Methods and Models in Autom. Robot. MMAR 2000, Międzyzdroje, 2000, s. 681–686.

[47] Mazur A., *An adaptive control law for mobile manipulators with parametric uncertainty in the dynamics.* W: Proc. of the 10th Int. Conf. on Advanced Robotics ICAR 2001, Budapeszt, 2001, s. 167–173.

[48] Mazur A., *Control algorithms for the kinematics and the dynamics of mobile manipulators: a comparative study.* Archives of Control Sciences, 2001, wolumen 11, numer 3, s. 223–245.

[49] Mazur A., *Sterowanie kinematyką i dynamiką manipulatorów mobilnych – badania porównawcze.* W: VII Krajowa Konferencja Robotyki, Lądek Zdrój, 2001, s. 45–58.

[50] Mazur A., *Universal adaptive control algorithm for nonholonomic mobile manipulators.* W: Proc. of the 7th IFAC Symposium Robot Control SYROCO'03, Wrocław, Pergamon, 2003, s. 593–598.

[51] Mazur A., *Hybrid adaptive control laws solving a path following problem for nonholonomic mobile manipulators.* Int. Journal of Control, 2004, wolumen 77, numer 15, s. 1297–1306.

[52] Mazur A., *Modelling and control of the rigid manipulators with nonholonomic gear.* W: Cybernetics of Robotic Systems. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2004, s. 117–132.

[53] Mazur A., *New approach to designing input-output decoupling controllers for mobile manipulators.* Bull. of the Polish Academy of Sciences Tech. Sci., 2005, wolumen 53, numer 1, s. 31–37.

[54] Mazur A., *Trajectory tracking control in workspace-defined tasks for nonholonomic mobile manipulators.* Robotica. W druku, 2009.

[55] Mazur A., Arent K., *Trajectory tracking control for nonholonomic mobile manipulators.* W: Lecture Notes in Control Inf. Sci. 335, London, 2006, s. 140–154.

[56] Mazur A. et al., *Algorytmy sterowania do punktu dla podwójnie nieholonomicznego manipulatora mobilnego 3R+(2,0).* W: Postępy robotyki: sterowanie, percepcja i komunikacja. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2006, s. 161–172.

[57] Mazur A., Łukasik B., *The input-output decoupling controller for nonholonomic mobile manipulators.* W: Proc. of the 4th Int. Work. on Robot Motion and Control RoMoCo'04, Puszczykowo, 2004, s. 155–160.

[58] Mazur A., Łukasik B., *The modified input-output decoupling controller for nonholonomic mobile manipulators.* W: Proc. of the 10th Int. Conf. on Methods and Models in Autom. Robot. MMAR 2004, Międzyzdroje, 2004, s. 979–984.

[59] Mazur A., Szakiel D., *On path following control of nonholonomic mobile manipulators.* Int. Journal of Applied Mathematics and Computer Science. W recenzji, 2009.

[60] M'Closkey R.T., Murray R.M., *Convergence rates for noholonomic systems in power form.* W: Proc. of the 1993 Amer. Contr. Conf., San Francisco, 1993.

[61] M'Closkey R.T., Murray R.M., *Exponential stabilization of chained nonholonomic systems.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, wolumen 40, numer 1, s. 35–49.

[62] M'Closkey R.T., Murray R.M., *Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1997, wolumen 42, numer 5, s. 614–628.

[63] Montgomery R., Zhitomirski M., *Geometric approach to Goursat flags.* Ann. Inst. H. Poincare, 2001, wolumen 18, s. 459–493.

[64] Morin P., Samson C., *A characterization of the Lie algebra rank condition by transverse periodic functions.* SIAM J. Control Optim., 2001, wolumen 40, s. 1227–1249.

[65] Murray R., Li Z., Sastry S., *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation.* Boca Raton, CRC Press 1994.

[66] Murray R.M., Sastry S.S., *Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1993, wolumen 38, numer 5, s. 700–716.

[67] Muszyński R., Mehl Ł., *Dobór parametrów predykcyjnego algorytmu kinematyki odwrotnej dla manipulatorów mobilnych.* W: Postępy robotyki. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 2005, s. 183–192.

[68] Nakamura Y., Chung W., Sørdalen O.J., *Design and control of the nonholonomic manipulator.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, 2001, wolumen 17, numer 1, s. 48–59.

[69] Nijmeijer H, van der Schaft A.J., *Nonlinear Dynamical Control Systems.* New York, Springer-Verlag 1990.

[70] Ortega R., Spong M., *Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial.* Automatica, 1989, wolumen 25, numer 3, s. 877–888.

[71] Oya M., Su C.-Y., Katoh R., *Robust adaptive motion/force tracking control of uncertain nonholonomic mechanical systems.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, 2003, wolumen 19, numer 1, s. 175–181.

[72] Pomet J.B., *Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift.* Systems & Control Letters, 1992, wolumen 18, s. 147–158.

[73] Roszkowska E., *Provably correct closed-loop control for multiple mobile robot systems.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Barcelona, 2005, s. 2810–2815.

[74] Sadegh N., Horowitz R., *Stability and robustness analysis of a class of adaptive controllers for robotic manipulators.* Int. Journal of Robotics Research, 1990, wolumen 9, numer 3, s. 74–94.

[75] Samson C., *Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart.* W: Proc. of the Int. Workshop in Adaptive and Nonlinear Control: Issues in Robotics, Grenoble, 1990.

[76] Samson C., *Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robots.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Advanced Robotics and Computer Vision, Singapore, 1992, s. 1.1–1.5.

[77] Samson C., *Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots.* Int. Journal of Robotics Research, 1993, wolumen 12, numer 1, s. 55–64.

[78] Samson C., *Control of chained systems – application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, wolumen 40, numer 1, s. 147–158.

[79] Samson C., Ait-Abderrahim K., *Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Sacramento, 1991, s. 1136–1141.

[80] Sastry S., Bodson M., *Adaptive Control.* Boston, J. Wiley & Sons 1999.

[81] Slotine J.J., Li W., *Adaptive manipulator control: a case study.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1988, wolumen 33, numer 11, s. 995–1003.

[82] Sontag E.D., *Mathematical Control Theory.* New York, Springer-Verlag 1998.

[83] Sørdalen O.J., *Conversion of the kinematics of the car with n-trailers into a chained form.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Atlanta, 1993, s. 1130–1135.

[84] Spong M., Vidyasagar M., *Dynamika i sterowanie robotów.* Warszawa, WNT 1997.

[85] Tchoń K., Jakubiak J., *Acceleration-driven kinematics of mobile manipulators: an endogenous configuration space approach.* W: On Advances in Robot Kinematics, J. Lenarčič i C. Galletti, edytorzy, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 2004, s. 469–476.

[86] Tchoń K., Jakubiak J., Zadarnowska K., *Doubly nonholonomic mobile manipulators.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, New Orleans, 2004, s. 4590–4595.

[87] Tchoń K. et al., *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie.* Warszawa, PLJ 2000.

[88] Tilbury D. et al., *Steering car-like systems with trailers using sinusoids.* W: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nicea, 1992, s. 1993–1998.

[89] Tilbury D., Murray R., Sastry S., *Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1995, wolumen 40, numer 5, s. 802–819.

[90] Walsh G. et al., *Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, wolumen 39, numer 1, s. 216–222.

[91] Yamamoto Y., Yun X., *Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, wolumen 39, numer 6, s. 1326–1332.

[92] Yamamoto Y., Yun X., *Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators.* IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1996, wolumen 12, numer 5, s. 816–824.

Model-based control for nonholonomic mobile manipulators

In the monograph a unified approach to the control synthesis for nonholonomic mobile manipulator has been presented. Different tasks designed for such an robotic object can be decomposed into subtasks defined separately for each subsystem of the complete mobile manipulator. In this work there are considered only two from four types of mobile manipulators, namely types for which mobile platform moves without any slippage of its wheels. However for rigid manipulating arm not only direct drive but nonholonomic drives designed by Nakamura, Chung and Sørdalen have been taken into considerations.

In many works an influence of the dynamics on the solution to the purely mathematical, kinematic control has been neglected. It is not appropriate approach because large mass or inertia of the system can result in very big difference between real velocities of the object and reference velocities, which are the output signals from kinematic control level. In this book we have presented such method for solving the control problem that the mentioned errors coming from dynamical level while disturbing kinematic level converge to zero.

Description of any nonholonomic system contains dynamics and constraint equations which can be treated as a cascade. For this reason a backstepping procedure to design a control law for whole nonholonomic mobile manipulator must be applied. Control algorithms presented in this book concern all tasks, which can be formulated for any subsystem of whole mobile manipulator: control to the constant configuration, trajectory tracking and following along a desired path. The method of control synthesis proposed in the monograph should be executed in two steps: design of kinematic controller (solution to strictly mathematical equations of nonholonomic constraints) and next design of dynamic controller (practical control algorithm acing on system with mass, inertia etc.).

Presented method of control synthesis can find many applications, such as loading and unloading a payload during a transportation process, tracking of desired trajectory defined in joint space or in workspace etc.

Spis treści

1. Wprowadzenie **5**
1.1. Nieholonomiczne manipulatory mobilne 5
1.2. Przegląd zawartości rozprawy 7

2. Kinematyka układów nieholonomicznych **11**
2.1. Nieholonomiczność ograniczeń 12
2.2. Ograniczenia nieholonomiczne dla kołowych platform mobilnych . . 14
2.3. Ograniczenia nieholonomiczne dla manipulatorów 18
2.4. Układy łańcuchowe 20
2.4.1. Postać łańcuchowa dla nieholonomicznych kołowych platform mobilnych 21
2.4.2. Postać łańcuchowa dla manipulatorów nieholonomicznych . 23

3. Modelowanie nieholonomicznych manipulatorów mobilnych **25**
3.1. Zasada d'Alemberta 26
3.2. Model dynamiki we współrzędnych uogólnionych 27
3.2.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych uogólnionych 29
3.2.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych uogólnionych 30
3.3. Model dynamiki we współrzędnych pomocniczych 31
3.3.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych pomocniczych 31
3.3.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych pomocniczych 32
3.4. Model dynamiki we współrzędnych linearyzujących 33
3.4.1. Model manipulatora mobilnego (nh, h) we współrzędnych linearyzujących 35
3.4.2. Model manipulatora mobilnego (nh, nh) we współrzędnych linearyzujących 35
3.5. Podsumowanie 36

4. Sformułowanie problemu sterowania 39
4.1. Algorytm całkowania wstecznego 40
4.2. Sterownik kinematyczny 44
4.2.1. Sterowanie do punktu 44
4.2.2. Śledzenie trajektorii 45
4.2.3. Śledzenie ścieżki 47
4.3. Sterownik dynamiczny 51
4.3.1. Przypadek pełnej znajomości modelu 51
4.3.2. Przypadek parametrycznej nieznajomości modelu 54

5. Wybrane algorytmy sterowania kinematyką 57
5.1. Algorytmy śledzenia trajektorii 57
5.1.1. Śledzenie trajektorii układów łańcuchowych 57
5.1.2. Śledzenie trajektorii kołowych platform mobilnych 60
5.2. Algorytmy sterowania do punktu 67
5.2.1. Sterowanie do punktu dla układów łańcuchowych 68
5.2.2. Sterowanie do punktu dla kołowych platform mobilnych . . 74
5.3. Algorytmy śledzenia ścieżki 75
5.3.1. Śledzenie ścieżki kołowych platform mobilnych 76

6. Sterowanie manipulatorów mobilnych do punktu 83
6.1. Sterowanie manipulatora mobilnego (nh, h) do ustalonej konfiguracji 83
6.1.1. Sterowanie kinematyczne 84
6.1.2. Sterowanie dynamiczne 85
6.1.3. Dowód zbieżności 86
6.2. Sterowanie manipulatora mobilnego (nh, nh) do ustalonej konfiguracji 88
6.2.1. Sterowanie kinematyczne 88
6.2.2. Sterowanie dynamiczne 92

7. Śledzenie trajektorii manipulatorów mobilnych 93
7.1. Śledzenie trajektorii manipulatora mobilnego (nh, h) 93
7.1.1. Sterowanie kinematyczne 94
7.1.2. Sterowanie dynamiczne 96
7.1.3. Dowód zbieżności 97
7.1.4. Badania symulacyjne 100
7.2. Śledzenie trajektorii manipulatora mobilnego (nh, nh) 104
7.2.1. Sterowanie kinematyczne 107
7.2.2. Sterowanie dynamiczne 108

7.2.3. Dowód zbieżności 109
7.2.4. Badania symulacyjne 110

8. Odsprzęganie we–wy manipulatorów mobilnych 114
8.1. Warunki regularności 115
8.2. Odsprzęganie we–wy manipulatora mobilnego (nh, h) 117
8.2.1. Algorytm Yamamoto i Yuna 118
8.2.2. Rozszerzone funkcje wyjściowe 119
8.2.3. Śledzenie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej przez manipulator mobilny (nh, h) 122
8.2.4. Badania symulacyjne 123
8.3. Odsprzęganie we–wy manipulatora mobilnego (nh, nh) 126
8.3.1. Sledzenie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej przez manipulator mobilny (nh, nh) 128
8.3.2. Badania symulacyjne 130

9. Śledzenie ścieżki manipulatorów mobilnych 133
9.1. Śledzenie ścieżki manipulatora mobilnego (nh, h) 134
9.1.1. Sterowanie kinematyczne 135
9.1.2. Sterowanie dynamiczne 138
9.1.3. Badania symulacyjne 141
9.2. Śledzenie ścieżki manipulatora mobilnego (nh, nh) 143
9.2.1. Sterowanie kinematyczne 145
9.2.2. Sterowanie dynamiczne 146
9.2.3. Badania symulacyjne 149

10. Uwagi końcowe 151

11. Podstawowe definicje i twierdzenia o stabilności 155
11.1. Układy autonomiczne 155
11.2. Układy nieautonomiczne 155
11.2.1. II Metoda Lapunowa 155
11.2.2. Lemat Barbalata 156
11.2.3. Twierdzenie La Salle'a–Yoshizawy 157

Bibliografia 158

Streszczenie w języku angielskim 166